ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

федеральное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

(МИИТ)

ОДОБРЕНО:
Кафедра «Высшая и
прикладная математика»

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ф-та УПП
Декан ф-та ТС
«__» ______2011г.

Составители: Блистанова Л.Д., д.ф.-м.н., проф., Голечков Ю.И., д.ф.-м.н., доц., Захарова М.В., к.ф.-м.н., доц., Сперанский Д.В., д.т.н., проф.

МАТЕМАТИКА

Задания на контрольные работы № 1 – 3

для студентов 1 курса заочной формы обучения специальностей:

190300.65 – Подвижной состав железных дорог, специализации – ПВ, ПТ, ПЛ, ПЭ, ПН;

190401.65 – Эксплуатация железных дорог, специализация – ДМ.

Москва 2011г.

Методические указания по выполнению контрольных работ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из сборника задач, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 0, в контрольной работе №1 решает задачи 1.1.10, 2.1.20, 2.2.20, 3.3.40, 3.1.50; в контрольной работе №2 – 6.2.40, 6.3.20, 7.1.10, 7.2.60, 7.3.30; в контрольной работе №3 – 8.1.10, 8.2.40, 9.1.20, 9.1.60, 10.1.10.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

1.1.1. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(3;-2;3)$; $B(2;0;1)$; $C(-2;3;1)$. Сделать чертеж.

1.1.2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;0;1)$; $B(5;-2;2)$; $C(-1;-3;1)$. Сделать чертеж.

1.1.3. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(2;4;-1)$; $B(0;4;0)$; $C(-1;4;-2)$. Сделать чертеж.

1.1.4. Найти угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(5;2;1)$; $B(2;4;2)$; $C(1;0;7)$. Сделать чертеж.

1.1.5. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(2;-1;3)$; $B(1;2;3)$; $C(1;-3;3)$. Сделать чертеж.

1.1.6. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(2;5;-3)$; $B(5;2;-3)$; $C(0;5;-1)$. Сделать чертеж.

1.1.7. Найти косинус угла между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(4;-1;4)$; $B(3;1;2)$; $C(-1;4;2)$. Сделать чертеж.

1.1.8. Найти косинус угла между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(0;-3;-2)$; $B(2;-5;-1)$; $C(-4;-6;-2)$. Сделать чертеж.

1.1.9. Найти угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(5;7;2)$; $B(3;7;3)$; $C(2;7;1)$. Сделать чертеж.

1.1.10. Найти угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(-2;0;-2)$; $B(0;2;0)$; $C(-1;-2;5)$. Сделать чертеж.

2.1.11. Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $P(-1;\ 0)$ – точка пересечения его диагоналей. Сделать чертеж.

2.1.12. Даны уравнения одной из сторон ромба $x-3y+10=0$ и одной из ее диагоналей $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке $P(0;\ 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

2.1.13. Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.

2.1.14. Даны две вершины $A(-3;\ 3)$ и $B(5;\ -1)$ и точка $D(4;\ 3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.15. Даны вершины $A(3;\ -2)$, $B(4;\ -1)$, $C(1;\ 3)$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции. Сделать чертеж.

2.1.16. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x-4y+15=0$ и $4x+y-9=0$. Его медианы пересекаются в точке $P(0;\ 2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.

2.1.17. Даны две вершины $A(2;\ -2)$ и $B(3;\ -1)$ и точка $P(1;\ 0)$ пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C. Сделать чертеж.

2.1.18. Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0;\ 2)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

2.1.19. Даны уравнения двух медиан треугольника $x-2y+1 = 0$ и $y-1=0$ и одна из его вершин $A(1;\ 3)$. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.20. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x-2y-8=0$ и $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

2.2.11. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} y+3z-1=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

а) $5x+3y-z+2=0$; б) $5x-3y+-z+1=0$; в) $5x+3y+2z-3=0$;
г) $-x+5y+3z=0$; д) $3x+5y-z-4=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.12. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} -x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

а) $3x+y-5z+1=0$; б) $x-3y-5z+2=0$; в) $-5x+y+3z=0$;
г) $x+3y-5z+3=0$; д) $3x-y+5z-2=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.13. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y-3z+5=0 \end{cases}$$

а) $5x-8y-z+3=0$; б) $-8x+5y-z-1=0$; в) $-x+5y+8z=0$;

г) $-x-8y+5z+2=0$; д) $x-3y+z-4=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.14. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ -2x+y-z=0 \end{cases}$$

а) $7x-2y-3z+1=0$; б) $2x-7y-3z+2=0$; в) $x-3y+7z=0$;

г) $2x+7y+3z-5=0$; д) $x+3y-7z+3=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.15. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} -x+2y-z+5=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$$

а) $2x-y-4z+1=0$; б) $-x+2y+4z-3=0$; в) $2x+y+4z=0$;

г) $-4x-y+2z+5=0$; д) $4x+y-3z-8=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.16. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} 5x+y-z-7=0 \\ -2x+y-3z=0 \end{cases}$$

а) $7x-2y+17z=0$; б) $7x+2y-17z+5=0$; в) $-2x+17y+7z+3=0$;

г) $2x-17y+7z+2=0$; д) $17x+7y-2z+1=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.17. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} 4x+y-z+4=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$$

а) $2x-5y+3z+5=0$; б) $2x+5y-3z+1=0$; в) $5x+3y-2z-3=0$;

г) $x+2y-z+2=0$; д) $3x-5y-2z+7=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.18. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} 2x-y+3z+3=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

а) $3x-5y+z-1=0$; б) $3x+7y-z+5=0$; в) $7x-3y+z+3=0$;

г) $-7x+2y+3z-1=0$; д) $-x+7y+3z-6=0$.

Сделать схематический чертеж.

2.2.19. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \\ x+2y-z-6=0 \end{cases}$$

а) $3x-7y-z+5=0$; б) $-7x+3y-z+1=0$; в) $7x+3y+z-2=0$;
г) $-3x+y-z=0$; д) $-x+7y+7z+3=0$.
Сделать схематический чертеж.

2.2.20. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямая:

$$\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$$

а) $x+3y-5z-2=0$; б) $-3x+y+5z-1=0$; в) $5x+3y-z+2=0$;
г) $x-3y-5z+1=0$; д) $x-5y-z-3=0$.
Сделать схематический чертеж.

3.3.31–3.3.40. Приведите к каноническому виду уравнения линий второго порядка. Установите тип этих линий и их расположение. Сделайте схематический чертеж.

3.3.31. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3.3.32. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$;
3.3.33. $xy + 3x - 3y - 9 = 0$;
3.3.34. $3x^2 - 4xy + 4 = 0$;
3.3.35. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$;
3.3.36. $4xy + 9 = 0$;
3.3.37. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
3.3.38. $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$;
3.3.39. $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$;
3.3.40. $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

3.1.41–3.1.70. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса. Сделать проверку.

3.1.41. $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

3.1.42. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+2z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$

3.1.43. $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y+2z=-2 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$

3.1.44. $\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x-y+z=0 \\ x+y=5 \end{cases}$

3.1.45. $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+3y+z=11 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$

3.1.46. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y-z=-2 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$

3.1.47. $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=6 \\ x-z=0 \end{cases}$ 3.1.48. $\begin{cases} 3x-y-z=5 \\ x+z=3 \\ x-2y-z=1 \end{cases}$

3.1.49. $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 3x+y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ 3.1.50. $\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ x+2y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Введение в математический анализ. Производная и ее приложения.

6.2.31–6.2.40. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

6.2.31. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5}{(2x^2-1)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{5-2x}\right)^{2x+1}$.

6.2.32. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2+3x^3}{x^3-(2x-1)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{5+3x}\right)^{\frac{2+x}{x}}$.

6.2.33. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x-5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin^2 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-7}{(x^3-3)(2-x^3)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x+3}$.

6.2.34. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x-7}+2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-2)^3}{(x^2+1)(2-x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.2.35. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+14}-2\sqrt{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)(2-x^2)}{(x-1)^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+3}\right)^{x^2-1}$.

6.2.36. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{5x^2-9x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 7}{(x^2 - 3)^2}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

6.2.37. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{5x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\arcsin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - 2x - x^3}{(2+x)^2 - 3x^3}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-1}\right)^{x^2+5}$.

6.2.38. а) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{5\sqrt{1-x} - 2\sqrt{4-7x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4-x} - 2}{\arcsin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7 + x + x^2 - 2x^3}{(1-x)^3}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.2.39. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{3x}$; б) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{tg 2x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^2-3)^2 + 5}{(1-2x^2)^2 + 7}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{7x+1}{7x-1}\right)^{x+2}$.

6.2.40. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x+1} - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{x+1} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 + x - x^5}{2 + x^2 - 3x^5}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{7+x}{7-x}\right)^{\frac{7}{x}}$.

6.3.11–6.3.20. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

6.3.11. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2 + 2, & -1 \le x < 1; \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$

6.3.12. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1; \\ x^2 + 1, & -1 < x \le 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

6.3.13. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

6.3.14. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$

6.3.15. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

6.3.16. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi;\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

6.3.17. $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0;\\ x, & x>0.\end{cases}$

6.3.18. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \pi/4;\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

6.3.19. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$

6.3.20. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

7.1.1–7.1.10. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

7.1.1. а) $y=\arccos\sqrt{x}$; б) $y=\ln ctg\dfrac{x}{3}$;

в) $x=2t^2+t, \quad y=\ln t.$

7.1.2. а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+\dfrac{25}{2}\arccos\dfrac{x}{5}$; б) $y=\exp(ctg 2x)$;

в) $x=\dfrac{1-t}{1+t^2}; \quad y=\dfrac{2+t^2}{t^2}.$

7.1.3. а) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$; б) $y = arcctg\, [\exp(5x)]$;

в) $x = sin^2 3t,\ y = cos^2 3t$.

7.1.4. *а*) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; *б*) $y=\dfrac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}$;

в) $x = t^4 + 2t,\ y = t^2 + 5t$.

7.1.5. *а*) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\arccos\dfrac{1}{x^2}$; *б*) $y=(x-1)\exp\left(x^2\right)$;

в) $x = t - ln\, sint,\ y = t + ln\, cost$.

7.1.6. а) $y=\dfrac{1}{2}ctg^2x+\ln\sin x$; б) $y = exp(cos3x)$.

в) $x = tg\, t\ ,\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}.$

7.1.7. а) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)+\sqrt{x^2-2x}$; б) $y = 3x\, exp(-x^{-2})$;

в) $x = t^2 - t^3 ,\ y = 2t^3$.

7.1.8. а) $y = ln\, cos2x - ln\, sin2x$; б) $y=2^{ctg^2 3x}$;

в) $x = cos^3 t ,\ y = sin^3 t$.

7.1.9. а) $y=\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $y=\ln ctg\sqrt{x+2}$;

в) $x = 3sint,\ y = 3cos^2 t$.

7.1.10. *а*) $y=\dfrac{tg^3x}{3}-\dfrac{ctg^2x}{2}+\ln\sin x$; *б*) $y=x\ \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $x = 2t - t^2 ,\ y = 2t^3$.

7.2.51–7.2.60. Подобрать соответствующую функцию и найти ее экстремум.

7.2.51. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V. Каковы должны быть высота и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести ?

7.2.52. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

7.2.53. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей ?

7.2.54. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R ?

7.2.55. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R ?

7.2.56. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность ?

7.2.57. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света ?

7.2.58. В точках A и B, расстояние между которыми равно a, находятся источники света соответственно с силами F_1 и F_2 . На отрезке AB найти наименее освещенную точку M_0 .

Замечание. Освещенность точки источником света силой F обратно пропорциональна квадрату расстояния r ее от источника света: $E = kF / r^2, k = \text{const}$.

7.2.59. Из круглого бревна, диаметр которого равен d, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка наибольшее сопротивление на изгиб ?

Замечание. Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения на квадрат его высоты y: $Q = kxy^2, k = \text{const}$.

7.2.60. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна p_1 руб., а стенок – p_2 руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

7.3.21–7.3.30. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию $y = f(x)$ для $\forall x \in R$ и по результатам исследования построить ее график; б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке $[a; b]$.

7.3.21. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, б) $[-3;\ 3]$.

7.3.22. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, б) $[-1;\ 1]$.

7.3.23. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, б) $[-2;\ 2\ ]$.

7.3.24. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$, б) $[-2;\ 2]$.

7.3.25. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$, б) $[\ 1;\ 4]$.

7.3.26. а) $y=(x-1)\mathrm{e}^{3x+1}$, б) $[\ 0;\ 1]$.

7.3.27. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, б) $[\ 1;\ 9]$.

7.3.28. а) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}}$, б) $[-1;\ 1]$.

7.3.29. а) $y=x\mathrm{e}^{-x^2}$, б) $[-2;\ 2]$.

7.3.30. а) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+9}$, б) $[-2;\ 2]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Неопределенный и определенный интегралы.
Функции нескольких переменных. Кратные интегралы.
Криволинейные и поверхностные интегралы.

8.1.1–8.1.10. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

8.1.1. а) $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x^4\right)dx;$ б) $\int(2x+1)^{20}\,dx;$

в) $\int (x-1)\mathrm{e}^x\,dx$; г) $\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$.

8.1.2. а) $\int \left(x^2+\frac{1}{\cos^2 x}+2e^x\right)dx$; б) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$;

в) $\int (x+3)\cos x\,dx$; г) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$.

8.1.3. а) $\int \left(e^x-\frac{1}{\sin^2 x}+5\right)dx$; б) $\int \sin(2-3x)\,dx$;

в) $\int \ln 4x\,dx$; г) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$.

8.1.4. а) $\int \left(3^x+\frac{1}{1+x^2}-\sin x\right)dx$; б) $\int \frac{x}{x^2-3}\,dx$;

в) $\int x\sin x\,dx$; г) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

8.1.5. а) $\int \left(\cos x+\frac{1}{4+x^2}-x^3\right)dx$; б) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$;

в) $\int (x+2)\,\mathrm{e}^x\,dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$.

8.1.6. а) $\int \left(\frac{1}{9-x^2}+e^x-7\right)dx$; б) $\int \sin\left(\frac{x}{5}+3\right)dx$;

в) $\int x\cos 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

8.1.7. а) $\int \left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\sin x\right)dx$; б) $\int 2e^{1-2x}dx$;

в) $\int x\ln 4x dx$; г) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.

8.1.8. а) $\int \left(\cos x+\frac{1}{\sin^2 x}+6^x\right)dx$; б) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$;

в) $\int (x-3)\sin x dx$; г) $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

8.1.9. а) $\int \left(3x^2-4+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$; б) $\int e^{4-8x}dx$;

в) $\int arctgxdx$;   г) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

8.1.10. а) $\int \left(2 + \frac{1}{1-x^2} + \sin x\right) dx$;   б) $\int \frac{dx}{\cos^2(7x+5)}$;

в) $\int \ln x dx$;   г) $\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15} dx$.

8.2.31–8.2.40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

8.2.31. $x^2 + 2y = 0, \quad 5x + 2y - 6 = 0$.

8.2.32. $x^2 - 2y = 0, \quad x - 2y + 6 = 0$.

8.2.33. $x^2 - 2y = 0, \quad x + 2y - 6 = 0.$

8.2.34. $x^2 - 6y = 0, \quad x + 6y - 12 = 0$.

8.2.35. $x^2 + 2y = 0, \quad 2x - y - 3 = 0$.

8.2.36. $2x + y^2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$.

8.2.37. $2x - y^2 = 0, \quad 2x - y - 6 = 0$.

8.2.38. $2x - y^2 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0$.

8.2.39. $6x - y^2 = 0, \quad 6x + y - 12 = 0$.

8.2.40. $x + y^2 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0$.

9.1.11–9.1.20. Найти производные функции двух переменных.

9.1.11. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u\sin(u+v)$, где $u = \frac{y}{x}, \quad v = 3x - y$.

9.1.12. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^2x^3y - zy - x + y + 1 = 0$.

9.1.13. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = vtg(u-v)$, где $u = y^2 - x^2, \quad v = x\sqrt{y}$.

9.1.14. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = v\cos(u-v),$ где $u = y + x^2, \quad v = xy$.

9.1.15. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $ye^{\frac{z^2}{x}} - z^3y + x - 2y - 10 = 0$.

9.1.16. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u\sin(u^2 - v^2)$, где $u = x^2 + y^2, \quad v = x - 2y$.

9.1.17. $\frac{dz}{dx}$, если $z=\sqrt{u}\sin(u-v^2)$, где $u=e^{2x}$, $v=2x\ln x$.

9.1.18. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $xe^{\frac{x+y}{z}}-xyz-10x+z^2-2=0$.

9.1.19. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=2u\sin(\frac{u}{u+v})$, где $u=e^{x-y}$, $v=\frac{y}{x}$.

9.1.20. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\sqrt[3]{u-v}$ где $u=x+2y$, $v=xy$.

9.1.51–9.1.60. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и изменить порядок интегрирования.

9.1.51. D: $y=0$; $y=x^2$; $y=2-x$.
9.1.52. D: $y=2x$; $y=2(x-2)^2$; $y=0$.
9.1.53. D: $y=2-(x-1)^2$; $y=1-x$.
9.1.54. D: $y^2=x$; $x+y-2=0$.
9.1.55. D: $y=0$; $y=(x+1)^2$; $y=(x-1)^2$.
9.1.56. D: $y^2=x$; $x=(y-2)^2$; $x=0$.
9.1.57. D: $y^2=x$; $x=(y-2)^2$; $y=0$.
9.1.58. D: $y=1-x^2$; $y=1-(x-2)^2$; $y=1$.
9.1.59. D: $y=1–x^2$; $y=1–(x–2)^2$; $y=0{,}5$.
9.1.60. D: $y=(x+2)^2$; $y=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$; $y=0$.

10.1.1–10.1.10. Вычислить криволинейный интеграл. Сделать чертеж дуги кривой L.

10.1.1. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx+\frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2;1).

10.1.2 . $\int\limits_L \frac{x^2}{y+2}dx+\frac{x+2y}{3x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1;1) до точки (2;2).

10.1.3. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{x+1}dx+\frac{x+1-y}{2}dy$, где L – дуга кривой $y=\ln(x+1)$ от точки (0; 0) до точки (e – 1;1).

10.1.4. $\int\limits_L \frac{y^2-1}{x+1}dx + \frac{1}{x}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (1;1) до точки (2;4).

10.1.5. $\int\limits_L (y^2 - x)dx + (x^2 - y)dy$, где L – верхняя половина окружности $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$. Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.6. $\int\limits_L (\frac{y}{x} - 1)dx + \frac{1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (–1;1) до точки (–2; 4).

10.1.7. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$, где L – верхняя четверть окружности $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$. Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.8. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx + \frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2; 1).

10.1.9. $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x-1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (1; 1) до точки (2; 4).

10.1.10. $\int\limits_L (y - x)dx + (x - y)dy$, где L – верхняя половина эллипса $x = 3\sin 2t$, $y = 4\cos 2t$. Интегрировать против часовой стрелки.