ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Элементы векторной и линейной алгебры. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Части I и II

Рабочая программа
Методические указания к выполнению контрольных работ.
Задания на контрольные работы №№1,2,3,4

Направления и специальности подготовки дипломированных специалистов все, направления подготовки бакалавров все

Санкт-Петербург
2005

Утверждено редакционно-издательским советом университета
УДК 517 (07)

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Элементы векторной и линейной алгебры. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Части I и II. Рабочая программа. Задания на контрольные работы *N N* 1,2,3,4. - СПб.: СЗТУ.2005, 83с.

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по всем направлениям и специальностям подготовки дипломированных специалистов, по всем направлениям подготовки бакалавров.

Рассмотрено и утверждено кафедрой высшей математики 23 декабря 2004г., одобрено методической комиссией факультета информатики и систем управления 27 декабря 2004г.

Рецензенты: кафедра высшей математики Северо-Западного государственного заочного технического университета (зав.кафедрой А.А.Потапенко, д.ф.-м.н., профессор); кафедра высшей математики С-Пб института точной механики и оптики (технического университета) (В.М.Фролов,к.ф.-м.н.,доцент):

Составители:
И.Б.Ерунова канд. физ. - мат. наук, доцент, Е.А.Карпова канд. физ. - мат. наук, доцент, И.А.Волынская ст. преп., А.В.Мясников, доцент

Северо-Западный Государственный заочный технический университет

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

(объем курса 255 часов)
Часть I

1.1 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии (67 часов)

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n-го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
2. Матрицы, действия с ними. Понятие обратной матрицы.
3. Системы двух и трех линейных уравнений. Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера. Системы n линейных уравнений с n неизвестными.
4. Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Пространства R^2 и R^3. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекции вектора на ось. Направляющие косинусы и длина вектора. Понятие о векторных диаграммах в науке и технике (диаграмма сил, моментов сил, электрических токов, напряжений и т.п.). Координаты центра масс системы точек.
5. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
6. Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл определителя второго порядка. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике: момент силы; сила, действующая на проводник с током в магнитном поле; скорость точки вращающегося тела; направление распространения электромагнитных волн; понятие о явлении гироскопии.
7. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл определителя третьего порядка.
8. Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
9. Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. Угол между прямыми.
10. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Технические приложения геометрических свойств кривых (использование фокальных свойств, математические модели формообразования биологических, техниче-

ских и других объектов).
11. Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Сфера. Конусы. Гиперболоиды. Параболоиды. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их форм методом сечений. Технические приложения геометрических свойств поверхностей (использование фокальных свойств, модели строительных конструкций, физические модели элементов и т.д.).
12. Полярные координаты на плоскости. Спираль Архимеда.
13. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Различные способы задания линий и поверхностей в пространстве.
14. Пространство R^n. Линейные операции над векторами. Различные нормы в R^n. Скалярное произведение в R^n.
15. Линейные и квадратичные формы в R^n. Условие знакоопределенности квадратичной формы.
16.Понятие линейного (векторного) пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Примеры. Линейные операторы. Примеры линейных операторов для моделирования различных процессов.

1.2 Введение в математический анализ (26 часов)

17. Элементы математической логики. Необходимое и достаточное условия. Прямая и обратная теоремы. Символы математической логики, их использование. Бином Ньютона. Формулы сокращенного умножения.
18. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Понятие кривой. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
19. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций.
20. Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности. Стабилизация десятичных знаков у членов последовательности, имеющей предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
21. Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Предел монотонной функции.
22. Непрерывность функции в точке. Непрерывность основных элементарных функций.

23. Бесконечно малые функции в точке, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций. Символы 0 и о.
23. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений. Метод бисекции.

1.3 Дифференциальное исчисление функций одной переменной (22 часа)

25. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации.
26. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Уравнение касательной к кривой в данной точке, Правила нахождения производной и дифференциала.
27. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
28. Производные и дифференциалы высших порядков.

Часть П. (объем курса 100 часов)

1.4 Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков(36 часов)

29. Точки экстремума. Теорема Ферма.
30. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение.
31. Правило Лопиталя.
32. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Представление функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ по формуле Тейлора.
33. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие, достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.
34. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.
35. Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении.

36. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
37. Кривизна плоской кривой. Радиус кривизны. Эволюта и эвольвента.

1.5 **Элементы высшей алгебры** (14 часов)

38. Комплексные числа, действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Корни из комплексных чисел.
39. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.
40. Разложение рациональных дробей на простейшие.

1.6 **Неопределенный интеграл** (16 часов)

41. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
42. Методы интегрирования. Использование таблиц интегралов.

1.7 **Определенный интеграл** (12 часов)

43.Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства.
44. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенного интеграла.
45. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их свойства.
46. Векторные функции действительного переменного, их дифференцирование.
47. Комплексные функции действительного переменного, их дифференцирование.

1.8. **Функции нескольких переменных** (22 часа)

48. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.
49. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными

производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

50. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

51. Неявные функции. Теорема существования. Дифференцирование неявных функций.

52. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия.

53. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применения при поиске оптимальных решений.

Перечень тем практических занятий (40 часов)

1. Элементы линейной алгебры (6 часов).
2. Предел функции. Вычисление пределов (4 часа).
3. Вычисление производных и дифференциалов функции (6 часов).
4. Исследование функций (4 часа).
5. Методы интегрирования Определенный интеграл. Несобственные интегралы (10 часов).
6. Функции нескольких переменных (10 часов).

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. И.И.Лобунина. Линейная алгебра. Учебное пособие. - СПб.; СЗТУ, 2001, 2003.
2. Н.Б.Шепелявая. Аналитическая геометрия. Учебное пособие. - СПб.; СЗТУ, 2002.
3. Н.Б.Шепелявая. Введение в математический анализ. Учебное пособие. - СПб.; СЗТУ, 2003.
4. И.А.Волынская. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие. СПб.; СЗТУ, 2002.
5. А.А.Потапенко. Интегральное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие. СПб.; СЗТУ, 2003.
6. В.Л.Гаврилов. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Учебное пособие. СПб.; СЗТУ, 2003.
7. Н.С.Григорьева, А.А.Потапенко. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Учебное пособие. СПб.; СЗПИ, 1992.

8. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1,2 - М.; 1985.
Дополнительная:
9. Н.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах, т. 1.-М.; Высшая школа, 1980.
10. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы анализа /Под. ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича /, -М.; Наука, 1981-1986.
11. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов./Под редакцией Б.П.Демидовича/. - М.; Наука, 1964-1978.
12. Д.Т.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-пресс, 2004.

При ссылках на литературу пособия обозначаются номерами, заключенными в квадратные скобки. Например, [8] означает учебник Н.С.Пискунова.

Перечень тем лекционных занятий для студентов очно-заочной формы обучения (32 часа)

1. Матрицы и действия над ними. Определитель матрицы. Свойства определителей (2 часа).
2. Системы уравнений (2 часа).
3. Векторы. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов (2 часа).
4. Плоскость. Различные виды уравнения плоскости. Прямая на плоскости и в пространстве (2 часа).
5. Кривые и поверхности второго порядка. (2 часа)
6. Предел функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции, их классификация (4 часа).
7. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции (2часа).
8. Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа, их применение (2 часа).
9. Исследование функций и построение их графиков (4 часа).
10. Комплексные числа, действия над ними (2 часа).
11. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.(2 часа)
12. Определенный интеграл. (2 часа)
13. Функции нескольких переменных. Область определения. Частные производные (2 часа).
14. Экстремумы функции нескольких переменных (2 часа).

2. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первом семестре студенты изучают разделы курса высшей математики, содержащиеся в части I, и выполняют контрольные работы N I и N 2, а во втором семестре - разделы, содержащиеся в части II, и выполняют контрольные работы N 3 и N 4.

Прежде чем выполнять контрольные работы, следует изучить теоретический материал по указанной литературе, выработать навыки решения примеров и задач по соответствующей теме, разобрать решения типовых задач, приведенных в данном комплексе. При выполнении контрольных работ необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради в клетку, с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество студента, шифр (номер студенческого билета), курс, факультет и специальность, по которой студент обучается, номер контрольной работы, год издания методических указаний, из которых взято контрольное задание. .
3. Условия задачи переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится подробное решение со ссылками на использованные при решении определения, теоремы, формулы; в конце решения записывается ответ; чертежи можно выполнять аккуратно от руки.
4. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольные задания, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
5. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
6. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ *N*1

3.1. Определители и системы линейных уравнений

[1],Гл.1,§6;[10], гл.3,§§1,4

В различных разделах курса высшей математики используется понятие определителя. Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 4 + 3 = 7$

Определитель третьего порядка будем вычислять, раскладывая его по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k}$$

где i и k - целые числа от 1 до 3.

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ - алгебраические дополнения элементов a_{ik}; M_{ik}-миноры элементов a_{ik} - определители второго порядка, получаемые вычеркиванием строки или столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ik}.

ПРИМЕР 1. 1) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1(1 \cdot 2 - 0(-1)) + 0 \cdot (-1)(4 - 0) + (-1) \cdot 1(-2 - 0) = 2 + 0 + 2 = 4.$$

2). Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первого столбца.

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1\cdot 1 + 4(-1)(-1) + 0 = -3 + 4 = 1.$$

При решении систем n линейных уравнений с n неизвестными следует знать, что система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда ее определитель не равен нулю. Решение системы уравнений в этом случае находят по формулам Крамера. Если же определитель системы равен нулю, система или несовместна, или имеет бесконечно много решений.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 4x + 5z = 19 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Вычисляем определитель системы - определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, разложив его, например, по элементам второго столбца.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)(-6) + 0 + 1(-1)\cdot 14 = 12 + 0 - 14 = -2$$

Так как $D \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \qquad (1)$$

Здесь D - определитель системы, D_x, D_y, D_z - определители, получающиеся из определителя системы заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов. Вычисляем D_x, D_y, D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 19 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 19 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 19 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6.$$

Таким образом,

$$x = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{-4}{-2} = 2; \quad z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Проверим полученное решение, подставив значения $x = 1, y = 2,$ $z = 3$ в систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 3 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 19 \\ 2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7 \end{cases}$$

Все уравнения системы обратились в тождества, значит, система решена верно.

3.2. Матрицы и операции над ними

[1], гл.2; [9], гл.4, §2; [10], гл.3, §2;[12]

ПРИМЕР 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 4x + 5z = 19 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

с помощью обратной матрицы.

РЕШЕНИЕ:

Введем следующие матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

- матрица составлена из коэффициентов при неизвестных (матрица системы);

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - матрица-столбец из неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов. При этом исходная система может быть записана в матричной форме: $A \cdot X = B$. Решим это уравнение. Для этого умножим слева обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A (в предположении, что матрица A^{-1} существует): $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как по определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, где

$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ - единичная матрица, то матричное уравнение примет вид:

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или } X = A^{-1} \cdot B (\text{так как } EX = X.).$$

Таким образом, матрица-столбец X находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Обратная матрица A^{-1} существует, если определитель исходной матрицы A отличен от нуля: $D(A) \neq 0$, и вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

где A_{ik} - алгебраические дополнения элементов a_{ik}. матрицы $A(i,к=1,2,3)$. Определитель матрицы A равен

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ (см. пример 2).}$$

таким образом, $D(A) \neq 0$, следовательно A^{-1} существует. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}0 & 5\\1 & 1\end{vmatrix}=-5; \qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}4 & 5\\2 & 1\end{vmatrix}=6; \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=-3; \qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}=4; \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\0 & 5\end{vmatrix}=10; \quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & 5\end{vmatrix}=-14; \quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 0\end{vmatrix}=-8.$$

Следует обратить внимание, что при нахождении обратной матрицы алгебраические дополнения элементов строк располагаются в качестве столбцов. Отсюда

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}-5 & -3 & 10\\6 & 4 & -14\\4 & 2 & -8\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2{,}5 & 1{,}5 & -5\\-3 & -2 & 7\\-2 & -1 & 4\end{Vmatrix}.$$

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица. Для этого убедимся, что $A^{-1}\cdot A=E$. Произведение матриц $A^{-1}\cdot A$ найдем по правилу умножения матриц, согласно которому каждый элемент c_{ik} произведения $C=A\cdot B$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-ой строки матрицы B.

$$A^{-1}\cdot A=\begin{Vmatrix}2{,}5 & 1{,}5 & -5\\-3 & -2 & 7\\-2 & -1 & 4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 0 & 5\\2 & 1 & -1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}5+6-10 & 5-5 & -2{,}5+7{,}5-5\\-6-8+14 & -6+7 & 3-10+7\\-4-4+8 & -4+4 & 2-5+4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно. Найдем теперь неизвестную матрицу X:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{Vmatrix}2{,}5 & 1{,}5 & -5\\-3 & -2 & 7\\-2 & -1 & 4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}3\\19\\7\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}7{,}5+28{,}5-35\\-9-38+49\\-6-19+28\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$A\cdot X=\begin{Vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 0 & 5\\2 & 1 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2+4-3\\4+15\\2+2+3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3\\19\\7\end{Vmatrix}=B.$$

Матрица X найдена верно. Таким образом,

$$X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix},$$

следовательно, решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$$

3.3. Векторы,операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

[2], гл.1; [9], гл.2; [10], гл.2; §1

При решении задач на эту тему необходимо знать определения скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, уметь вычислять и применять эти произведения.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\angle \vec{a}; \vec{b}\right).$$

Зная координаты перемножаемых векторов

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \left(a_x; a_y; a_z\right);$

$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = \left(b_x; b_y; b_z\right);$, можно вычислить скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Условием ортогональности (перпендикулярности) векторов a и b является равенство нулю их скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2) образует с ними правую тройку $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и

3) длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\angle \vec{a}; \vec{b}\right)$. Если известны координаты перемножаемых векторов, то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ есть скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и вычисляется по формуле

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ -правая тройка векторов, то $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)>0$, если левая, то $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)<0$; $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$ - условие компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

ПРИМЕР 4. На векторах $\overrightarrow{AB}=-5\vec{m}+11\vec{n}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{m}+6\vec{n}$ построен треугольник *ABC*. Найти площадь треугольника *ABC* и его высоту, опущенную на сторону *BC,* если длины векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны соответственно 1 и $\sqrt{2}$, а угол, образованный векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, равен 135°.

РЕШЕНИЕ: 1) Найдем площадь S треугольника *ABC*. Площадь треугольника, построенного на векторах, равна половине модуля их векторного произведения, то есть $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого применим распределительное свойство векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(-5\vec{m}+11\vec{n}\right)\times\left(2\vec{m}+6\vec{n}\right)=-10\vec{m}\times\vec{m}+22\vec{n}\times\vec{m}-30\vec{m}\times\vec{n}+66\vec{n}\times\vec{n}.$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулевому вектору, следовательно $\vec{m}\times\vec{m}=\vec{0}$, $\vec{n}\times\vec{n}=\vec{0}$; при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный, значит $-30\vec{m}\times\vec{n}=30\vec{m}\times\vec{n}$. Отсюда,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=22\vec{n}\times\vec{m}+30\vec{n}\times\vec{m}=52\vec{n}\times\vec{m}.$$

Находим модуль полученного вектора

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = 52\left|\vec{n}\times\vec{m}\right| = 52\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\sin 135^0 = 52\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 52.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2}\cdot 52 = 26.$

2) Найдем сторону BC треугольника $ABC,$ то есть длину вектора $\vec{BC}$.
Согласно правилу треугольника сложения векторов,

$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$, откуда

$$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}=\left(2\vec{m}+6\vec{n}\right)-\left(5\vec{m}+11\vec{n}\right)=2\vec{m}+6\vec{n}+5\vec{m}-11\vec{n}=7\vec{m}-5\vec{n}.$$

Найдем длину полученного вектора по формуле: $\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{\vec{BC}\cdot\vec{BC}}.$

Под корнем стоит скалярное произведение вектора $\vec{BC}$ самого на себя.
Найдем его

$$\vec{BC}\cdot\vec{BC}=\left(7\vec{m}-5\vec{n}\right)\cdot\left(7\vec{m}-5\vec{n}\right)=49\vec{m}\cdot\vec{n}-35\vec{n}\cdot\vec{m}-35\vec{m}\cdot\vec{n}+25\vec{n}\cdot\vec{n}.$$

С учетом того, что $\vec{m}\cdot\vec{m}=\left|\vec{m}\right|^2,\ \ \vec{n}\cdot\vec{n}=\left|\vec{n}\right|^2,\ \ \vec{n}\cdot\vec{m}=\vec{m}\cdot\vec{n},$ получаем

$$\vec{BC}\cdot\vec{BC}=49\left|\vec{m}\right|^2-70\vec{m}\cdot\vec{n}+25\left|\vec{n}\right|^2=49\cdot 1^2-70\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135^0+25\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=49-70\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+25\cdot 2=49+70+50=169.$$

Таким образом, $BC=\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{169}=13.$

3) Найдем высоту h треугольника $ABC,$ опущенную на сторону $BC.$ По формуле площади треугольника имеем $S=\frac{1}{2}h\cdot BC,$ откуда $h=\frac{2S}{BC}$. Площадь треугольника S и сторона BC найдены ранее: $S = 26,\ \ BC = 13$. Следовательно, $h=\frac{2\cdot 26}{13}=\frac{52}{13}=4.$

3.4. Приложение векторной алгебры к задачам аналитической геометрии

[2],гл.2,3; [9],гл.3,§1; [10],гл.2,§2

Задачи на прямую и плоскость в пространстве рекомендуется решать средствами векторной алгебры. При решении задач необходимо уметь использовать различные формы уравнений прямых и плоскостей, а также уметь переходить от одной формы уравнения к другой.

ПРИМЕР 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-2,3)$, $M_2(2,-1,0)$ и точку пересечения прямой

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{1}$ с плоскостью xOy.

РЕШЕНИЕ: Найдем координаты точки $M_3(x,y\ z)$ - точки пересечения заданной прямой с плоскостью xOy. Для этого от канонических уравнений прямой перейдем к параметрическим и, добавив уравнение плоскости xOy $z = 0$, получим систему для определения координат искомой точки:

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2+2t \\ z = -2+t \\ z = 0 \end{cases}$$

Из третьего и четвертого уравнений получим $t = 2$, тогда $x = 7$; $y = 2$; $z = 0$. Таким образом, $M_3(7,2,0)$ - точка пересечения заданной прямой с плоскостью xOy.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1,M_2,M_3.$ Если точка $M(x,y,z)$ - текущая точка плоскости, то векторы

$\overrightarrow{M_1M}=(x-1,\ \ y+2,\ \ z-3)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(2-1,\ -1-(-2),\ 0-3)=(1,\ 1,\ -3)$

и $\overrightarrow{M_1M_3}=(6,4,-3)$ - компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\left(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right)=0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв этот определитель по элементам первой строки, получим уравнение искомой плоскости:

$$9(x-1)-15(y+2)-2(z-3)=0 \text{ или } 9x-15y-2z-33=0.$$

ПРИМЕР 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;1)$ и прямую $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ 3x-y-z+1 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ: Приведем общие уравнения прямой к каноническому виду $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $\vec{S}=(m;n;p)$ - направляющий вектор прямой, а $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - точка, лежащая на этой прямой. Так как прямая лежит в обеих данных плоскостях, в плоскости x - у + $2z$ + 1 = 0 и в плоскости $3x$ - y - z + 1 = 0, то ее направляющий вектор $\vec{S}$ перпендикулярен нормальным векторам этих плоскостей N_1 = (1; -1;2) и N_2 = (3; -1; -1), поэтому можно выбрать

$$\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k}.$$

Координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ найдем из системы уравнений, задающих прямую $\begin{cases} x_0-y_0+2z_0+1=0 \\ 3x_0-y_0-z_0+1=0 \end{cases}$. Выбирая одну из координат произвольно, например, положим $z_0=0$, получим $\begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ 3x_0-y_0+1=0 \end{cases}$, откуда $x_0=0,\ y_0=1$. Значит, $M_0(0;1;0)$, $\vec{S}=(3;7;2)$ и канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z}{2}$. Теперь найдем уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку A. Выберем произвольную точку искомой плоскости $M(x,y,z)$, тогда три вектора $\overrightarrow{M_0M}=(x;y-1;z)$, $\overrightarrow{M_0A}=(2;-2;1)$, $\vec{S}=(3;7;2)$) компланарны, (см. рис. 1), значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\overrightarrow{M_0A}\times\vec{S}\right)=0.$

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\overrightarrow{M_0A}\times\vec{S}\right)=\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$+z\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-11x-y+1+20z.$$

Т.о. уравнение искомой плоскости $11x + y - 20z - 1 = 0$.

3.5. Геометрические образы уравнений на плоскости и в пространстве

[2],гл.4; [9], гл.3,§2; [10],гл.2,§§3,4, [12]

В декартовой системе координат на плоскости всякому уравнению первой степени относительно текущих координат соответствует прямая линия, а уравнению второй степени соответствует в общем случае кривая второго порядка - эллипс (окружность), гипербола или парабола. (Возможны и вырожденные случаи: например, уравнению $x^2 - y^2 = 0$ соответствуют две пересекающиеся прямые $x - y = 0$ и $x + y = 0$, а $x^2 + y^2 = 0$ - точка $x = 0, y = 0$).

ПРИМЕР 7. Найти координаты точек пересечения кривых $x^2+y^2-6x+1=0$ и $x+y^2=5$. Указать вид кривых. Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ: Определим вид кривых. Уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$; $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 1 = 9$; $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ определяет окружность с центром в точке (3; 0) и радиусом $R = 2\sqrt{2}$.

Уравнению $x + y^2 = 5$ или $y^2 = -(x - 5)$ соответствует парабола, симметричная относительно оси $0x$, ветви которой направлены влево, а вершина находится в точке (5,0). Координаты точек пересечения двух заданных линий являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+1=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

Подставляя $y^2 = 5 - x$ из второго уравнения в первое, получим $x^2 - 7x + 6 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Тогда при $x_1=1,\ \ y^2=4,\ \ y=\pm 2$. При $x_2 = 6$ уравнение $y^2 = 5 - x$ решения не имеет. Таким образом, заданные окружность и парабола пересекаются в двух точках $M_1(1;2)$ и $M_2(1;-2)$ (см.рис.2).

В декартовой системе координат в пространстве всякому уравнению первой степени относительно текущих координат соответствует плоскость, а уравнению второй степени в общем случае соответствует поверхность второго порядка (за исключением вырожденных случаев).

ПРИМЕР 8. Тело в пространстве задано системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-2)^2 \le 0 \\ x^2 + y^2 \le z \\ z \le 2 \end{cases}$$

Определить вид поверхностей, его ограничивающих, и изобразить это тело.

РЕШЕНИЕ: Уравнение $x^2 + y^2 - (z - 2)^2 = 0$ задает в пространстве конус с осью Oz, смещенный вдоль оси Oz на 2 (рис.3). Он разбивает все пространство на три части. Объединение двух из них, содержащих точки оси Oz, задается неравенством $x^2 + y^2 - (z - 2)^2 \le 0$. Параболоид, задаваемый уравнением $x^2 + y^2 = z$ (рис.4), разбивает пространство на две части, одна из которых и задается неравенством $x^2 + y^2 \le z$. Так как координаты точки $A(0; 0; 2)$ удовлетворяют этому неравенству, то речь, очевидно, идет о части пространства, лежащей внутри параболоида.

Наконец, $z \le 2$ задает то полупространство, которое лежит ниже плоскости $z = 2$. Поверхности $x^2 + y^2 = z$ и $x^2 + y^2 - (z - 2)^2 = 0$ пересекаются в плоскости $z = 1$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Объединяя эти результаты, мы получим, что исследуемое тело имеет вид, указанный на рис.5.

ПРИМЕР 9. Сделать схематический рисунок тела, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ x^2 + y^2 - z^2 \ge 12 \end{cases}$$

Указать вид поверхностей, ограничивающих тело. Определить, по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются эти поверхности.

РЕШЕНИЕ: Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ задает цилиндр с осью Oz, направляющей которого является окружность радиуса 4 с центром в начале координат (рис.6). Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 12$ задает однополостный гиперболоид (ось вращения - ось Oz), радиус "горла" (сечение плоскостью $z = 0$) равен $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (рис.7). Очевидно, что линиями пересечения поверхностей будут окружности того же радиуса, что и направляющая цилиндра. Определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности. Для этого из уравнений системы исключим x и y : $x^2 + y^2$ подставим в уравнение гиперболоида. Получим $16 - z^2 = 12$ или $z^2 - 4$, откуда $z = \pm 2$.

На рис.8 изображено тело, ограниченное снаружи цилиндром, а изнутри однополостным гиперболоидом, которые пересекаются по двум окружностям с центрами на оси Oz, с одинаковыми радиусами $R = 4$, расположенными в плоскостях $z = 2$ и $z = -2$.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ *N* 2

Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Вычисление пределов

[3],§1,§2; [8],т.1,гл.2; [9],гл.4,§§1-5;[10],гл.1,§4; [11],гл.1,§§2,3;[12]

4.1. Вычисление пределов с использованием теорем о конечных пределах

Справедливы следующие теоремы:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, ($C$ - постоянная)
2. $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет при $x \to a$ конечный предел, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\cdot g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Для нахождения предела элементарной функции $f(x)$ при $x\to a$ в случае, если a - конечная точка, принадлежащая области определения $f(x)$, нужно вычислить значение этой функции при $x = a$. Это значение и будет искомым пределом, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ПРИМЕР 10. Найти пределы функций при $x \to a$:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5; \;\; a = -1;$

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}; \;\; a = 2;$

в) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\cos 2x}; \;\; a = \dfrac{\pi}{2}.$

РЕШЕНИЕ: Данные функции элементарные, поэтому можно применить сформулированное правило:

а) $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 - 2x + 5) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 10;$

б) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} = 3;$

в) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\sin x + \dfrac{1}{\cos 2x} \right) = \sin \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{2} \right)} = 1 + (-1) = 0.$

4.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$; функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Справедливы теоремы:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций - бесконечно малая функция.
2. Если *f(x)* - функция, ограниченная в некоторой окрестности точки *a,* функция g(x) - бесконечно малая в этой точке, то функция *f(x) · g(x)* - бесконечно малая.
3. Если при $x \to a$ функция *f(x)* стремится к отличному от нуля пределу, а функция $g(x)$ - бесконечно большая при $x \to a$, то функция *f(x) · g(x)* - бесконечно большая при $x \to a$.
4. Если функция *f(x)* - бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки не равна нулю, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая в точке a; если *f(x)* - бесконечно большая в точке a, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

ПРИМЕР 11. Найти а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+3}$.

РЕШЕНИЕ:

а) При $x\to 1$ функция $(x - 1)$ - бесконечно малая, значит, $\dfrac{1}{x-1}$ - бесконечно большая, $\cos x \to \cos 1 \neq 0$, следовательно, $\cos x\dfrac{1}{x-1}$ - бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x}{x-1}=\infty$.

б) При $x\to\infty$ функция $(x^2 + 3)$ -бесконечно большая, поэтому $\dfrac{1}{x^2+3}=0$- бесконечно малая. Функция *sinx* - ограниченная, значит, произведение $\sin x\dfrac{1}{x^2+3}$ - бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+3}=0$.

4.3. Раскрытие неопределенностей

Если при формальной подстановке предельного значения аргумента получается выражение вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0, 1^\infty,$$

то для нахождения пределов функций необходимо проводить преобразования данных выражений.

ПРИМЕР 12. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

РЕШЕНИЕ: Непосредственная подстановка значения $x=1$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, выделим общий множитель и сократим на него дробь.

Для разложения числителя воспользуемся формулой:
$\left(a^3-b^3\right)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, т.е. $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$.

В знаменателе дроби стоит квадратный трехчлен. Если квадратный трехчлен имеет корни $x_1, x_2,$ то он раскладывается на множители следующим образом: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Данный квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,$ поэтому $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2} = -3.$$

ПРИМЕР 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}$.

РЕШЕНИЕ: Непосредственно подставляя $x = 0$, получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Умножим и разделим данную дробь на выражение, сопряженное числителю, то есть на $\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-2x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}+1} = -1.$$

Замечание: Если в примере иррациональность имеется в числителе и знаменателе дроби, то дробь следует умножить и разделить на выражение, сопряженное числителю и на выражение, сопряженное знаменателю.

ПРИМЕР 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}$.

РЕШЕНИЕ: В этом примере неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки в числителе x^3, а в знаменателе x^2 (наивысшую степень x для каждого многочлена):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}\right)..$$

Величины $1/x$, $1/x^2$,$1/x^3$, обратные бесконечно большим,- бесконечно малые, и, значит, выражение в скобках стремится к 3/7. x - бесконечно большая величина, следовательно, произведение $x \cdot 3/7$ также величина бесконечно большая, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}=\infty.$$

Аналогичный прием вычисления пределов можно использовать для раскрытия неопределенностей в случае иррациональных функций.

ПРИМЕР 15. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}.$$

Так как $x\to+\infty$, то $x>0$ и, значит, $|x|=x$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{8}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\frac{5+0}{\sqrt{4-0}}=\frac{5}{2}.$$

ПРИМЕР 16. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

РЕШЕНИЕ: Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим данное выражение на сопряженное:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}.$$

Получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее стандартным способом:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}.$$

Так как $x\to-\infty$, то $x<0$ и, значит, $|x|=-x$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right)=-1.$$

4.4. Вычисление пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых величин

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность бесконечно малых обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. При раскрытии неопределенностей можно пользоваться правилом: предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если эти бесконечно малые под знаком предела заменить им эквивалентными. Если при $x\to a$ $\alpha(x)$ - бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);$$

$$tg\alpha(x)\sim\alpha(x);\ \ a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a;\ \ \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n};$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad 1-\cos\alpha x\sim\frac{[\alpha(x)]^2}{2};\ \ arctg\alpha(x)\sim\alpha(x).$$

ПРИМЕР 17. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{3x^2}-1\right)\sin 2x}{\ln(1-3x)(1-\cos 2x)}$

РЕШЕНИЕ: Так как при $x\to0$, $3x^2\to0$, $2x\to0$, $(-3x)\to0$, то имеем неопределенность $\frac{0}{0}$ Заменим исходные бесконечно малые эквивалентными

$$e^{3x^2}-1\sim3x^2;\ \ \sin(2x)\sim2x;\quad \ln(1-3x)\sim(-3x);\quad 1-\cos2x\sim\frac{4x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x^2}-1\right)\sin 2x}{\ln(1-3x)(1-\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot 2x}{(-3x)\cdot 2x^2}=-1.$$

4.5. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точка разрыва функции

[3],§3; [8],гл.2,§9; [9],гл.6,§6; [10],гл.1,§4; [11],гл.1,§5, [12]

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности конечной точки a, то точка a называется точкой разрыва функции в двух случаях:

1) в точке $x = a$ функция $f(x)$ не определена;

2) в точке $x = a$ функция $f(x)$ определена, но не выполняется хотя бы одно из равенств:

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a), \tag{3}$$

где $f(a-0)$ и $f(a+0)$ - левосторонний и правосторонний пределы функции f в точке a.

Если при этом $f(a-0)$ и $f(a+0)$ конечны, то точка $x = a$ называется точкой разрыва первого рода (или точкой конечного разрыва) .Причем, если $f(a-0)=f(a+0)$,то разрыв называется устранимым.

Если хотя бы один из пределов в равенстве (3) не существует или бесконечный, то точка a называется точкой разрыва второго рода (точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из соответствующих пределов - бесконечный).

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

ПРИМЕР 18. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$, определить тип разрыва. Для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции. Построить график.

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0,\\ 3^x, & 0<x\le 1,\\ -2x+5, & x>1.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Внутри каждого из промежутков $(-\infty;0)$, (0; 1) и $(1;+\infty)$ функция *f(x)* совпадает с соответствующей элементарной функцией. Следовательно, внутри каждого из этих промежутков функция *f(x)* будет непрерывной, и разрывы могут быть только на концах

этих промежутков, то есть в точках x=0 и x=1.
Найдем односторонние пределы в этих точках:
1. Для точки $x = 0$ имеем:

$$f(0-o) = \lim_{x\to 0-o} f(x) = \lim_{x\to 0-o} x^3 = 0;$$

$$f(0+o) = \lim_{x\to 0+o} f(x) = \lim_{x\to 0+o} 3^x = 3^0 = 1.$$

Оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, значит, точка $x = 0$ есть точка разрыва I рода. В точке $x = 0$ функция *f(x)* имеет скачок $\delta = f(0+o) - f(0-o) = 1 - 0 = 1$.
2. Рассмотрим точку $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-o} f(x) = \lim_{x\to 1-o} 3^x = 3^1 = 3;$$

$$\lim_{x\to 1+o} f(x) = \lim_{x\to 1+o} (-2x+5) = -2\cdot 1 + 5 = 3;$$

$$f(1) = 3^1 = 3$$

Односторонние пределы равны и совпадают со значением функции в рассматриваемой точке, значит, в этой точке функция *f(x)* непрерывна. График функции изображен на рис.9.

ПРИМЕР 19. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{8|x+1|}{x^2-2x-3}$, установить тип разрыва, для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции, построить график в окрестности точек разрыва.

РЕШЕНИЕ: Преобразуем дробь:

$$f(x) = \frac{8|x+1|}{x^2-2x-3} = \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}.$$

Функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 3$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Найдем соответствующие односторонние пределы:

1. Для точки $x = -1$ при $x \to -1-o$ $x+1<0$ и, значит, $|x+1| = -(x+1)$. Следовательно,

$$f(-1-o) = \lim_{x\to -1-o} \frac{-(x+1)8}{(x+1)(x-3)} = -\lim_{x\to -1-o} \frac{8}{x-3} = 2.$$

Аналогично вычислим

$$f(-1+0) = \lim_{x\to -1+o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1+o} \frac{8(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1+o} \frac{8}{x-3} = -2.$$

Так как оба предела конечны, то точка x = - 1 - точка разрыва первого рода. Поскольку пределы не равны, то это - конечный разрыв I рода. $\delta = f(-1+o) - f(-1-o) = -2-2 = -4$ - скачок функции. В окрестности точки $x = 3$ $x + 1>0$, поэтому $|x + 1| = x + 1$ и, значит

$$f(3-o) = \lim_{x\to 3-o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3-o} \frac{8(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3-o} \frac{8}{x-3} = -\infty.$$

$$f(3+o) = \lim_{x\to 3+o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3+o} \frac{8}{x-3} = +\infty.$$

Таким образом, точка $x = 3$ - точка бесконечного разрыва второго рода. График функции представлен на рис.10.

ПРИМЕР 2О.Найти точки разрыва функции $f(x) = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$, определить тип разрыва, начертить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва.

РЕШЕНИЕ: Данная элементарная функция не определена в точках x = - 1 и x = 1 и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Найдем односторонние пределы, учитывая, что $a^t \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $a^t \to 0$ при $t \to -\infty$, если $a > 1$.

1. Рассмотрим точку x = - 1.

Так как при $x \to -1-o$ $x^2 - 1 > 0$, $\frac{x}{x^2-1} \to -\infty$, то

$$f(-1-o) = \lim_{x\to -1-o} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = 0.$$

При $x \to -1+o$ $x^2 - 1 < 0$, значит $\frac{x}{x^2-1} \to +\infty$.

Следовательно, $f(-1+o) = \lim\limits_{x\to -1+o} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty$.

Таким образом, точка x = - 1 - точка бесконечного разрыва второго рода.

2.Рассмотрим точку x = 1. Аналогично предыдущему получаем $f(1-o) = 0$; $f(1+o) = +\infty$, то есть в точке x = 1 функция имеет бесконечный разрыв второго рода.

2. Рассмотрим поведение функции при $x \to \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = 2^0 = 1$. Следовательно, $y = 1$ - асимптота функции. Эскиз графика функции изображен на рис.11.

4.6. Производная и дифференциал

[3],§4; [8],т.1,гл.3,§§2-16; [9],гл.7,§1; [10],гл.5,§§1,2; [11],гл.2,§§1-6

Вычисление производных

Основные правила дифференцирования:

Если функция *u(x)* и *v(x)* дифференцируемы в точке *x,* то в этой точке:

$$1.\ (u+v)' = u' + v' \quad 2.\ (cu)' = cu'(c = \text{const})$$

$$3.\ (uv)' = u'v + uv' \quad 4.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Таблица производных:

1. $(c)' = 0$	2. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$	3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(arcctgx)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	11. $\left(e^x\right)' = e^x$	12. $\left(a^x\right)'_{(a>0,\ a\neq 1)} = a^x \ln a$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	14. $(\log_a x)'_{(a>0,\ a\neq 1)} = \dfrac{1}{x\ln a}$	

ПРИМЕР 21. Найти производную функции $y = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{x^2}{2} + 3$

РЕШЕНИЕ: Используем первое и второе правила дифференцирования

$$y' = \left(2\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\frac{5}{x^2}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + (3)' = 2\left(x^{1/3}\right)' - 5\left(x^{-2}\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + (3)'$$

Далее используем формулу для нахождения производной степенной функции (табличная формула $N\,2$):

$$y' = 2\frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1} - 5(-2)x^{-2-1} + \frac{1}{2}2x^{2-1} + 0 =$$

$$= \frac{2}{3}x^{-2/3} + 10x^{-3} + x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{10}{x^3} + x$$

ПРИМЕР 22. Найти производную функции $y = (\cos x + 5)e^x$.

РЕШЕНИЕ: Используем правило дифференцирования произведения и табличные формулы $N\,4$ и $N\,11$:

$$y' = (\cos x + 5)' e^x + (\cos x + 5)\left(e^x\right)' =$$

$$= (-\sin x + 0)e^x + (\cos x + 5)e^x = e^x(\cos x - \sin x + 5).$$

ПРИМЕР 23. Найти производную функции $y = \dfrac{arctgx}{\ln x}$

РЕШЕНИЕ: Используем правило дифференцирования частного и табличные формулы $N\,9$ и $N\,13$:

$$y' = \frac{(arctgx)'\ln x - arctgx(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\ln x - arctgx \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x\ln x - \left(1+x^2\right)arctgx}{x\left(1+x^2\right)\ln^2 x}.$$

4.7. Дифференцирование сложной функции

Производная сложной функции $y = f(u(x))$ вычисляется по формуле

$$y'_x = f'_u(u)u'_x.$$

То есть, чтобы найти производную сложной функции, нужно сначала продифференцировать "внешнюю" функцию по промежуточному аргументу и так, как если бы аргумент *u* был независимой переменной, после чего умножить полученный результат на производную от функции *u* по переменной *x*.

Это правило распространяется на сложную функцию, состоящую из любого конечного числа дифференцируемых функций.

ПРИМЕР 24. Найти производную функции $y = \ln(1 + 2\cos x)$.

РЕШЕНИЕ: Данная функция - сложная, промежуточный аргумент $u = (1 + \cos 2x)$. Согласно приведенному правилу имеем

$$y' = (\ln u)'_u u'_x = \frac{1}{u}(1 + 2\cos x)' = \frac{1}{1 + 2\cos x}(-2\sin x).$$

ПРИМЕР 25. Найти производную функции $y = \sqrt{8 + \sin^2 x}$.

РЕШЕНИЕ: Данная сложная функция составлена из трех функций $y = f(u(v(x)))$, где $f(u) = \sqrt{u}$, $u(v) = 8 + v^2$, $v = \sin x$. Применяем правило дифференцирования сложной функции (начиная дифференцировать с "внешней" функции f):

$$f'_u u'_x = f'_u u'_v v'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(8 + \sin^2 x\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}} 2vv'_x =$$

$$= \frac{2\sin x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}}(\sin x)' = \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}}.$$

4.8. Геометрический смысл производной и дифференциала функции

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задана кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$ и на ней точка $M_0(x_0, y_0)$. Производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ геометрически представляет собой *угловой коэффициент касательной к* графику функции в точке с абсциссой x_0, т.е. $f'(x_0) = k = tg\varphi$ (см. рис.12). Тогда *уравнение касательной к* кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 находится по формуле $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, т.е. равен произведению производной функции в заданной точке на дифференциал(приращение) независимой переменной. Геометрически дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой *приращение ординаты касательной* к графику функции в точке x_0 и при $\Delta x \to 0$ Δy и dy являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому справедливо приближенное равенство $\Delta y \sim dy$, позволяющее приближенно заменять приращение функции дифференциалом.

ПРИМЕР 26. Найти координаты точки пересечения с осью Oy касательной к кривой $y=f(x)$, где $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, проведенной к ней в точке $M_0(-1;4)$.

РЕШЕНИЕ: Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Найдем сначала производную $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)x^2-2x(x-1)^2}{x^4}=\frac{2(x-1)x-2(x-1)^2}{x^3}=\frac{2x-2}{x^3}=\frac{2(x-1)}{x^3}.$$

Вычислим $f'(-1)=\dfrac{2(-1-1)}{(-1)^3}=4$, тогда уравнение касательной к заданной кривой в точке $Mo(-1,4)$ запишется в виде:

$$y-4=4(x+1) \text{ или } y=4x+8.$$

Теперь находим координаты точки пересечения полученной прямой с осью Oy.

Для всех точек, лежащих на оси Oy, $x=0$. Подставим в уравнение касательной $x=0$, получим $y=8$. Значит, касательная $y=4x+8$ пересекает ось Oy в точке(0,8).

4.9. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производная функции $y=y(x)$, заданной в параметрической форме: $y=y(t)$ x - $x(t)$, находится по формуле

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t} \qquad (2)$$

ПРИМЕР 27. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции

$y=y(x)$,

заданной в параметрической форме $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin 2t} \\ y=\ln tgt \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим x'_t и y'_t:

$$x'_t=\left[(\sin 2t)^{-1}\right]'=-(\sin 2t)^{-2}(\sin 2t)'=-\frac{\cos 2t(2t)'}{\sin^2 2t}=\frac{-2\cos 2t}{\sin^2 2t}.$$

$$y'_t=[\ln tgt]'=\frac{1}{tgt}(tgt)'=\frac{ctgt}{\cos^2 t}=\frac{1}{\sin t\cos t}=\frac{2}{\sin 2t}.$$

Используя формулу (2), получим

$$y'_x=\frac{2}{\sin 2t}:\left(-\frac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}\right)=-\frac{\sin^2 2t}{\sin 2t\cos 2t}=-tg2t.$$

Итак, $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=-tg2t.$ Так как $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, то для нахождения $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ можно использовать ту же формулу дифференцирования функции, заданной параметрически, применив ее к функции $\dfrac{dy}{dx}$, то есть:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} \qquad (3)$$

Вычислим $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t=(-tg2t)'=-\frac{1}{\cos^2 2t}(2t)'=-\frac{2}{\cos^2 2t}.$$

Следовательно, используя формулу (3), получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{2}{\cos^2 2t}\right):\left(-\frac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}\right)=\frac{2\sin^2 2t}{\cos^2 2t\cdot 2\cos 2t}=\frac{tg^2 2t}{\cos 2t}.$$

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПОВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ *N* 3

Применение правила Лопиталя к нахождению предела функции

[4],гл.1,16; [8],т.1,гл.4,§§4-5; [9],гл.7,§2; [10],гл.5,§3; [11],гл.11,§9, [12]

При отыскании предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ подстановка предельного значения $x=a$ в ряде случаев приводит к неопределенным выражениям типа: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, $\infty^0, 1^\infty$. Тогда вычисление заданного предела называют раскрытием неопределенности соответствующего типа. Обычно при этом используют *правило Лопиталя.*

5.1. Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ | и $\frac{\infty}{\infty}$

Непосредственно применять правило Лопиталя можно только для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Согласно этому правилу, предел отношения двух бесконечно малых (или двух бесконечно больших) существует и равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если выполнены условия:

1) функции *f(x), g(x)* дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности (кроме, может быть самой точки a);

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$);

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), при этом a может быть как числом, так и одним из символов: $\infty, +\infty, -\infty$.

ПРИМЕР 28. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку $\lim\limits_{x\to\pi/3}(1-2\cos x)=1-2\cos\dfrac{\pi}{3}=$ $=1-2\cdot\dfrac{1}{2}=0$ и $\lim\limits_{x\to\pi/3}\sin(\pi-3x)=\sin\left(\pi-3\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin 0=0,$ то имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Функции $(1-2\cos x)$ и $\sin(\pi-3x)$ дифференцируемы на всей числовой оси. Найдем предел отношения их производных:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{0-2(-\sin x)}{\cos(\pi-3x)(\pi-3x)'}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\sin x}{-3\cos(\pi-3x)}=$$

$$=\frac{2\sin\pi/3}{-3\cos 0}=\frac{2\sqrt{3}/2}{-3\cdot 1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как этот предел существует, то согласно правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Замечание. Если предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя применяется еще раз.

5.2 Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределенность типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ следует вначале путем тождественных преобразований привести к неопределенностям типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которых можно непосредственно применить правило Лопиталя.

ПРИМЕР 29. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \cos x \ln(\pi - 2x)$.

РЕШЕНИЕ: При $x \to \pi/2 - o$ аргумент логарифмической функции $(\pi - 2x) \to 0 + o$. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \cos x = 0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \ln(\pi - 2x) = -\infty$, то возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Обычно в таких случаях один из сомножителей записывают в знаменатель данного выражения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\cos x \ln(\pi - 2x)}{1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\ln(\pi - 2x)}{1/\cos x}.$$

Получена неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\ln(\pi - 2x)}{(\cos x)^{-1}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{(\ln(\pi - 2x))'}{\left((\cos x)^{-1}\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\frac{1}{\pi - 2x}(-2)}{-(\cos x)^{-2}(-\sin x)} =$$

$$= -2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\cos^2 x}{\pi - 2x} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{1}{\sin x} = -2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\cos^2 x}{\pi - 2x}$$

(поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \sin x = 1$). Здесь имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой снова применяем правило Лопиталя:

$$-2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\cos^2 x}{\pi - 2x} = -2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{\left(\cos^2 x\right)'}{(\pi - 2x)'} = -2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o} \frac{2\cos x(-\sin x)}{-2} =$$

$$= -2\frac{2 \cdot 0 \cdot (-1)}{-2} = 0.$$

ПРИМЕР 30. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

РЕШЕНИЕ: Выражение в скобках, представляющее собой неопределенность типа $\infty-\infty$, приводим к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}.$$

Полученную неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ раскроем по правилу Лопиталя (в ходе вычислений это правило применено дважды):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x\left(e^x-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{1\left(e^x-1\right)+xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x-0+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

5.3. Раскрытие неопределенностей типа $1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

При раскрытии указанных неопределенностей используются:

а)основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$ (в частности, $e^{\ln b}=b$);

б) непрерывность показательной функции, в силу чего:

$$\lim_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$$

ПРИМЕР 31. Найти $\lim\limits_{x\to 0+o}\left(2-e^x\right)^{ctg3x}$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+o}\left(2-e^x\right)=2-1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0+o} ctg3x=+\infty$, имеем неопределенность типа 1^∞. Найдем вначале предел логарифма заданной функции:

$\lim\limits_{x\to 0+o}\ln\left(\left(2-e^x\right)^{ctg3x}\right)=\lim\limits_{x\to 0+o} ctg3x\ln\left(2-e^x\right)$. Здесь возникла неопределенность типа $0\cdot\infty$. Если учесть, что $ctg3x=\dfrac{1}{tg3x}$, то перейдем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+o} ctg3x\ln\left(2-e^x\right)=\lim_{x\to 0+o}\frac{\ln\left(2-e^x\right)}{tg3x}=\lim_{x\to 0+o}\frac{\left(\ln\left(2-e^x\right)\right)'}{\left(tg3x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+o}\frac{\frac{1}{2-e^x}\left(-e^x\right)}{\frac{1}{\cos^2 3x}3}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+o}\frac{e^x\cos^2 3x}{2-e^x}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1^2}{2-1}=-\frac{1}{3}.$$

Теперь используем основное логарифмическое тождество и свойство непрерывности показательной функции:

$$\lim_{x\to 0+o}\left(2-e^x\right)^{ctg3x}=\lim_{x\to 0+o} e^{\ln\left(2-e^x\right)^{ctg3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+o}\ln\left(2-e^x\right)^{ctg3x}}=e^{-1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Таким образом, для вычисления $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ в случае неопределенностей 1^∞, 0^0, ∞^0, применяем правило: $\lim\limits_{x\to a} u^v=e^q$, где $q=\lim\limits_{x\to a} v\ln u$.

5.4. Применение производной к исследованию функции. Построение графиков функций

[4],гл.2; [8],т.1,гл.5; [9],гл.7,§2; [10],гл.5,§4; [11],гл.3

Промежутки монотонности и точки экстремума функции

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$, а также ее точки экстремума, надо вначале найти первую производную $y'(x)$ заданной функции. Затем следует определить промежутки, на которых эта производная сохраняет свой знак: там, где $y'(x) > 0$, функция $y(x)$ возрастает; если же $y'(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ убывает.

Чтобы найти точки экстремума (максимума или минимума) функции $y(x)$, прежде всего определяют критические точки функции $y(x)$, то есть точки, входящие в множество определения функции, в которых выполняется необходимое условие экстремума: либо $y'(x) = 0$, либо $y'(x) = \infty$, либо $y'(x)$ не существует. Затем каждую из найденных критических точек проверяют на наличие экстремума с помощью одного из достаточных признаков существования экстремума (по первой или второй производной).

ПРИМЕР 32. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции, $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

РЕШЕНИЕ: Прежде всего отметим, что данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Продифференцируем эту функцию

$$y' = \frac{4x^3\left(x^3 - 1\right) - x^4 3x^2}{\left(x^3 - 1\right)} = \frac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$$

Очевидно, что точка $x_0 = 1$ не является критической, поскольку не принадлежит множеству определения функции. Имеем две критические точки, в которых $y' = 0$: это $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}58$. Чтобы найти промежутки возрастания функции $y(x)$, надо решить неравенство $y' > 0$, или $\dfrac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2} > 0$. Оно выполняется при $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\sqrt[3]{4};+\infty\right[$ - это промежутки возрастания функции. Соответственно, $y' < 0$ при $x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;\sqrt[3]{4}\right[$ - промежутки убывания данной функции.

В критических точках $x_1 = 0$; и $x_2 = \sqrt[3]{4}$ проверим выполнение достаточного условия существования экстремума с использованием первой производной. При переходе через точку $x = 0$ первая производная y' меняет знак с (+) на (-), значит, $x = 0$ - точка максимума. Аналогично, точка $x_2 = \sqrt[3]{4}$ - точка минимума, потому что при переходе через нее первая производная y' меняет знак с (-) на (+).

Найдем экстремальные значения функции:

$$\max y(x) = y(0) = 0; \quad \min y(x) = y\left(\sqrt[3]{4}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 2{,}1$$

5.5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба определяются с помощью второй производной y''. На промежутках выпуклости $y'' < 0$, на промежутках вогнутости $y'' > 0$.

Чтобы найти точки перегиба, исследуют точки, в которых либо $y'' = 0$, либо $y'' = \infty$, либо y'' не существует (причем в последних двух случаях y' в соответствующих точках определена). Точками перегиба являются те из найденных точек, при переходе через которые y'' изменяет свой знак.

ПРИМЕР 33. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

РЕШЕНИЕ: Зная первую производную $y' = \dfrac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3 - 1\right)^2}$, найдем вторую

$$y'' = \left(\frac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(6x^5 - 12x^2\right)\left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 - 4x^3\right)2\left(x^3 - 1\right)3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^3 + 2\right)}{\left(x^3 - 1\right)^3}$$

Поскольку первая производная в точке $x_0 = 1$ не определена, то исследуем только точки, в которых $y'' = 0$. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как при прохождении через нее вторая производная сохраняет свой знак (-). Точка $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ - это точка перегиба, поскольку при переходе через нее y'' меняет свой знак с (+) на (-). Промежутки вогнутости графика данной функции: $\left]-\infty; -\sqrt[3]{2}\right[$ и $\left]1; +\infty\right[$, на промежутке $\left]-\sqrt[3]{2}; 1\right[$ график функции выпуклый. Значение функции в точке перегиба: $y\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2} \approx -0{,}83$.

5.6. Асимптоты графика функции

а)Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции *y(x),* если хотя бы один из односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to a-o} y(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+o} y(x)$ обращается в бесконечность. Поэтому для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо найти точки бесконечного разрыва данной функции, которые относятся к точкам разрыва 2-го рода.

ПРИМЕР 34.Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

РЕШЕНИЕ: Как отмечалось, данная функция не определена в точке $x_0 = 1$. При этом

$$\lim_{x\to 1-o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x\to 1+o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции.

б) График функции *y(x)* имеет *наклонную асимптоту* $y = kx + b$ при $x \to +\infty (x \to -\infty)$, если существуют конечные пределы:

$k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{y(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[y(x) - kx\right]$. Если хотя бы один из этих пределов не существует или бесконечен, то график функции не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty (x \to -\infty)$.(Если асимптота задана уравнением y = b, то ее называют горизонтальной).

ПРИМЕР 35. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

РЕШЕНИЕ: Найдем значения *к* и *b* для данной функции при $x \to +\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[y(x)-1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4-x^4+x}{x^3-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Аналогично находим, что при $x\to-\infty$ по-прежнему $k=1;\ \ b=0$.

Таким образом, график функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ имеет одну и ту же наклонную асимптоту при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$; это прямая $y = x$.

5.7. Общий план исследования функции

Чтобы составить достаточно полное представление о характере поведения функции и построить ее график, удобно проводить ее исследование по следующему плану:

1. Установить множество определения функции; при наличии точек разрыва найти в них односторонние пределы данной функции;

2.а) Найти точки пересечения графика функции с осями координат,

б) Отметить особенности графика заданной функции, не связанные с производными, например, симметрию, периодичность.

3. Установить промежутки возрастания и убывания функции, найти ее экстремумы.

4. Установить промежутки выпуклости и вогнутости график функции, найти точки перегиба.

5 Найти асимптоты графика функции.

ПРИМЕР 36. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

РЕШЕНИЕ: Как отмечалось в примере 32, множество определения данной функции - вся числовая ось *Ox,* исключая точку $x=1$: $X=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. График функции пересекается с осями координат в единственной точке 0(0,0). Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $y(-x)=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^3-1}=\dfrac{x^4}{-x^3-1}\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, поэтому график функции не обладает свойствами симметрии. Дальнейшее исследование этой функции фактически уже проведено в примерах 32 -35. По данным, полученным в этих примерах, сделан схематический чертеж графика заданной функции, который представлен на рис.13.

ПРИМЕР 37. Исследовать функцию $y=xe^{1/x}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

РЕШЕНИЕ: 1. Множество определения данной функции - вся числовая ось *Ox,* кроме точки $x=0$: $X=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Найдем односторонние пределы функции при $x\to 0$. Предел слева $\lim\limits_{x\to 0-o} xe^{1/x}=0,$ так как $\lim\limits_{x\to 0-o} x=0$ и $\lim\limits_{x\to 0-o} e^{1/x}=\lim\limits_{y\to -\infty} e^{y}=0$. При вычислении предела справа возникает неопределенность вида $0\cdot\infty$; приводим ее к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, к которой применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+o} xe^{1/x}=\lim_{x\to 0+o}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\lim_{x\to 0+o}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{\left(1/x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+o}\frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+o} e^{1/x}=+\infty$$

2. а) Точки пересечения графика функции с осью *Ox* определяются из условия $y = 0$. В данном случае уравнение $xe^{1/x}=0$ не имеет решений, так как $x = 0$ не входит в множество определения функции. Точки пересечения графика функции с осью *Oy* можно найти, положив $x = 0$. Для заданной функции это значение не входит в множество ее определения. Следовательно, график исследуемой функции не имеет точек пересечения с осями координат.

б) Поскольку $y(-x)=-xe^{-x}\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Находим $y' = \left(xe^{1/x}\right)' = e^{1/x} + xe^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{1/x}}{x}(x-1)$. Производная y' существует и конечна на всем множестве определения заданной функции $X = (-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Поскольку точка разрыва первой производной $x = 0$ не принадлежит множеству определения функции, то все критические точки функции $y(x)$ находим из условия: $y' = 0$, или $\frac{e^{1/x}}{x}(x-1) = 0$. Отсюда получаем $x = 1$.

Функция $y\ (x)$ возрастает, если $y'(x) > 0$, то есть при $-\infty < x < 0$ и $1 < x < +\infty$.

Функция $y(x)$ убывает, если $y' < 0$, в данном случае при $0 < x < 1$. Таким образом, при переходе через точку $x = 1$ первая производная меняет знак с (-) на (+), то есть $x = 1$ - точка минимума; $y(1) = \min y(x) = e.$

5. Находим $y'' = \left[e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]' = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$

Вторая производная существует и конечна во всех точках множества определения данной функции. Тогда все точки перегиба находим из условия: $y'' = 0$, то есть $\frac{e^{1/x}}{x^3} = 0$. Поскольку это уравнение не имеет решения, то точек перегиба нет. График функции - выпуклый, если $y'' < 0$; в данном случае при $x < 0$. График функции вогнутый при $x>0$; > 0, где $y'' > 0$.

6. Как было установлено в пункте 1, в точке $x = 0$ функция $y = xe^{1/x}$ имеет бесконечный разрыв, поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой ее графика. Для определения наклонных асимптот найдем:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)'}{\left(1/x\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1.$$

Значит, прямая у = $x+1$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Схематический чертеж графика функции приведен на рис.14.

ПРИМЕР 38. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ и сделать схематический чертеж графика.

РЕШЕНИЕ: 1). Данная функция определена на всей числовой оси $0x: X=(-\infty;+\infty)$.

2). Точки пересечения графика функции с осью Ox определяются из условия $y = 0$, откуда $x = \pm1$, а с осью Oy - из условия $x = 0$, при этом $y(0) = 1$. Данная функция - четная, поскольку $y(-x)=\sqrt[3]{\left((-x)^2-1\right)^2}=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}=y(x)$, значит, ее график симметричен относительно оси $0y$.

3). $y'=\left(\left(x^2-1\right)^{2/3}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}2x=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$. Первая производная обращается в бесконечность в точках $x = 1$, $x = -1$, в то время, как сама функция $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ в этих точках определена. Значит, эти точки - критические для данной функции. Еще одна критическая точка определяется из условия $y' = 0$; это $x = 0$. Функция убывает, если $y' < 0$, то есть при $-\infty<x<-1$ и $0<x<1$. Функция возрастает при $y' > 0$, то есть при $-1 < x < 0$ и при $x > 1$. Таким образом, $x = 0$ -точка максимума, $x=-1$ и $x=1$- точки минимума данной функции; $y(0)=\max y(x)$; $y(-1)=y(1)=\min y(x)=0$. В точках $x = -1$ и $x = 1$ данная функция имеет так называемый "острый" экстремум: касательная к графику функции в каждой из этих точек параллельна оси Oy.

4). $y'' = \frac{4}{3}\left(x\left(x^2-1\right)^{-1/3} \right)' = \frac{4}{9}\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$. Вторая производная обращается в бесконечность при $x = \pm 1$, но эти точки не принадлежат множеству определения $y'(x)$ и, следовательно, не являются критическими точками для первой производной. Значит, критические точки для нее определяем из условия $y'' = 0$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$, $y'' > 0$ при $-\infty < x < \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$, то график $y(x)$ в этих интервалах вогнутый, а в интервалах $-\sqrt{3} < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < \sqrt{3}$ - график выпуклый, так как там $y'' < 0$.

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt[3]{4}.$$

5). Поскольку функция определена на всей числовой оси Ox, то вертикальных асимптот у ее графика нет. Проверим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}} = \pm\infty.$$

Таким образом, наклонные асимптоты также отсутствуют. На рис.15 схематически изображен график функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Комплексные числа

[5],гл.1,§6; [8],гл.7,§§1,2,3; [10],гл.1,§5

Выражение $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа z, если a и b - вещественные числа, а $i^2 = -1$. Комплексное число i называется мнимой единицей, число a - вещественной частью комплексного числа z, число b - мнимой частью этого числа. Обозначается: $a = Rez$, $b = Imz$. Число bi называют чисто мнимым числом.

Операции сложения и умножения комплексных чисел в алгебраической форме можно выполнять по обычным правилам алгебры многочленов, если учесть, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и вообще $i^{4n+p} = i^p$. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным комплексному числу. Очевидно, $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.

ПРИМЕР 39. Найти вещественную и мнимую части комплексного числа

$$z=\frac{8\sqrt{2}+5i^7}{9i^4}+\frac{2i^3}{4-\sqrt{2}i^5}.$$

РЕШЕНИЕ: Чтобы упростить запись данного комплексного числа, учтем, что $i^7=i^{4+3}=i^3=-i,\ \ i^4=1,\ \ i^5=i.$

$$z=\frac{8\sqrt{2}-5i}{9}+\frac{-2i}{4-\sqrt{2}i}$$

Умножим числитель и знаменатель второй дроби на число, сопряженное знаменателю, и выполним очевидные преобразования:

$$z=\frac{8\sqrt{2}-5i}{9}+\frac{-2i\left(4+\sqrt{2}i\right)}{\left(4-\sqrt{2}i\right)\left(4+\sqrt{2}i\right)}=\frac{8\sqrt{2}-5i}{9}+\frac{-8i-2\sqrt{2}i^2}{16+2}=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-5i}{9}+\frac{-8i+2\sqrt{2}}{18}=\frac{8\sqrt{2}-5i-4i+\sqrt{2}}{9}=\frac{9\sqrt{2}-9i}{9}=\sqrt{2}-i.$$

Значит, $Rez=\sqrt{2}$; $Imz=-1$.

ПРИМЕР 40. Представить в тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости число $z=1-i$.

РЕШЕНИЕ: Изобразим комплексное число $z = 1-i$ точкой M на комплексной плоскости, откладывая по оси Ox его вещественную часть $Rez = 1$, а по оси Oy мнимую часть $Imz = -1$. Радиус-вектор OM составляет с осью Ox угол $\varphi,$ называемый аргументом комплексного числа $\varphi=\arg z,\ \ -\pi<\varphi\le\pi$ и находится с помощью формул

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В данном случае $\cos\varphi=1/\sqrt{2};\ \ \sin\varphi=-1/\sqrt{2}.$ Значит $\varphi=-\pi/4$. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина радиуса-вектора $OM: r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. В нашем примере $r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$ Тригонометрической формой комплексного числа z = a + bi называется выражение $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=|z|;\ \ \varphi=\arg z.$ Итак, $z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\pi/4\right)+i\sin\left(-\pi/4\right)\right)$ (см. рис.16)

Неопределенный интеграл

[5],гл.1; [7],гл.1; [8],т.1,гл.10; [9],гл.9;[10],гл.6,§§1-3; [11],гл.4, [12]

Интегрирование - нахождение функции по ее дифференциалу - это математическая операция, обратная дифференцированию функции.

В то время, когда дифференцирование функции проводится на основании общего правила, вытекающего из определения производной, для интегрирования функции нельзя указать такие общие правила. Техника интегрирования основана на применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int\left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right]dx = C_1\int f_1(x)dx + C_2\int f_2(x)dx$
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$

   (инвариантность формул интегрирования)
4. $\int dF(x) = F(x) + C$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C$

2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C; m \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

   в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{|a|} + C \\ -\arccos \frac{x}{|a|} + C \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

Основная трудность при интегрировании состоит в приведении подынтегрального выражения к виду, позволяющему использовать таблицу интегралов. Для некоторых видов подынтегральных функций можно указать ряд приемов, позволяющих это сделать.

5.8. Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)

Суть этого метода состоит в преобразовании данного подынтегрального выражения к подынтегральному выражению уже известной формулы интегрирования с помощью замены переменной по формуле $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ (причем функции $\varphi(t)$ или $\psi(x)$ должны иметь обратную функцию и быть непрерывно дифференцируемыми).

ПРИМЕР 40. Найти $I = \int \frac{e^x + 3e^{2x} - \sqrt{1-e^{2x}}\cos 5x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$

РЕШЕНИЕ: Разделив почленно числитель подынтегральной дроби на выражение, стоящее в знаменателе, и, применив свойство 2, получим сумму трех интегралов

$$I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} + 3\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \int \cos 5x dx.$$

В первом из них введем новую переменную $t = e^x$, тогда $dt = e^x dx$ и $\int \frac{e^{xdx}}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C$ (использована формула 9 из таблицы интегралов). Вычисляя второй интеграл, введем переменную $z = 1 - e^{2x}$, при этом $dz = -2e^{2x}dx$, тогда

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz = -\frac{1}{2}\frac{z^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{z} + C = -\sqrt{1-e^{2x}} + C.$$

(применена формула 2 из таблицы интегралов, причем m = -1/2). При нахождении последнего интеграла можно не вводить новую переменную t, а использовать прием, называемый подведением под знак дифференциала: умножим и разделим подынтегральную функцию на 5 и учтем, что $5dx = d(5x)$.

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{1}{5} 5dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x) d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

На последнем шаге здесь использовано свойство инвариантности и формула 5 из таблицы интегралов. Окончательно

$$I = \arcsin e^x - 3\sqrt{1-e^{2x}} - \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

5.9. Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле производят по формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Чтобы вновь полученный интеграл $\int vdu$ был проще исходного $\int udv$, нужно удачно выбрать выражения u и dv в заданном интеграле. Часто при этом удобно пользоваться правилами:

- если под интегралом стоит произведение многочлена на синус, косинус или экспоненту, то в качестве u берем многочлен;
- если подынтегральное выражение является произведением многочлена на какую-либо функцию от логарифма, арктангенса или арксинуса, то за u следует брать именно эту функцию.

ПРИМЕР 42.Найти $\int x^2 \arcsin x dx$.

РЕШЕНИЕ: Обозначим $u = \arcsin x$; $dv = x^2 dx$; тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Чтобы найти $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, введем новую переменную t по формуле: $t = \sqrt{1-x^2}$, тогда $t^2 = 1 - x^2$ и $2tdt = -2xdx$;

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{(1-t^2)(-tdt)}{t} = -\int (1-t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(3 - 1 + x^2) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(2 + x^2) + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{9}(2 + x^2) + C.$$

Иногда предварительно сделанная замена переменной упрощает задачу интегрирования по частям. Возможны ситуации, когда интегрирование по частям следует применить несколько раз.

5.10. Интегрирование дробно-рациональных функций от различных выражений

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь от аргумента x, ее следует предварительно разложить на сумму простейших дробей. Дробно-рациональная функция от тригонометрических выражений может быть сведена к алгебраической дробно-рациональной функции от нового аргумента t с помощью одной из подстановок: $t=\sin x$; $t=\cos x$; $t=tgx$; $t=tg\dfrac{x}{2}$ (*"универсальная"* тригонометрическая подстановка) .

ПРИМЕР 43. Найти $I=\int\dfrac{\sin x}{1-\sin x}dx.$

РЕШЕНИЕ: Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t=tg\dfrac{x}{2}$; при этом $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sin x}{1-\sin x}=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2dt}{1+t^2}}=\int\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)(t-1)^2}$$

Разложим дробь, получившуюся под интегралом, на сумму простейших дробей:

$$\frac{4t}{\left(1+t^2\right)(t-1)^2}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{(t-1)^2}.$$

Приведем выражение в правой части к общему знаменателю и учтем, что числители обеих дробей равны:

$$4t=(At+B)\left(t^2-2t+1\right)+C\left(1+t^2\right)(t-1)+D\left(1+t^2\right)$$

или

$$4t=(A+C)t^3+(-2A+B-C+D)t^2+(A-2B+C)t+(B-C+D).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях данного выражения:

$$\left.\begin{aligned} t^3 &: 0 = A + C \\ t^2 &: 0 = -2A + B - C + D \\ t^1 &: 4 = A - 2B + C \\ t^0 &: 0 = B - C + D \end{aligned}\right\}$$ Исключим переменную С, учитывая, что $C = -A$:

$$\begin{cases} -A + B + D & = 0 \\ -2B & = 4 \\ A + B + D & = 0 \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения B = -2, из первого и третьего уравнений: A = 0, тогда и C = 0, D = -B = 2. Итак,

$$I = \int \left(\frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{(t-1)^2} \right) dt = -2\int \frac{dt}{1+t^2} + 2\int (t-1)^2 d(t-1) =$$

$$= -2arctgt + 2\frac{(t-1)^{-1}}{-1} + C = -2arctg\left(tg\frac{x}{2} \right) - 2\frac{1}{tg\frac{x}{2} - 1} + C =$$

$$= -2\frac{x}{2} - \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} + C = -x - \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} + C.$$

Определенный интеграл

[5],гл.2; [7],гл.2,§§1-5; [8],т.1,гл.9,§§1-б;
[9],гл.10,§1; [10],гл.б,§4; [11],гл.5,§§2,4,5, [12]

Определенный интеграл вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x), F'(x) = f(x)$.

Если в определенном интеграле производится замена переменной, то надо найти пределы интегрирования для новой переменной. При вычислении определенного интеграла может также использоваться формула интегрирования по частям: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

ПРИМЕР 44. Вычислить $I = \int\limits_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}}$

РЕШЕНИЕ: Введем новую переменную t по формуле: $t = \sqrt[4]{2x-1}$ или $t^4 = 2x-1$, откуда $4t^3 dt = 2dx$ (показатель степени у новой переменной выбирается как наименьшее общее кратное показателей корней: в данном случае 4 - наименьшее общее кратное чисел 2 и 4). Из этой же формулы видно, что если $x = 1$, то $t = \sqrt[4]{2-1} = 1$, а при $x = 41 : t = \sqrt[4]{82-1} = 3$. Поэтому

$$I = \int\limits_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}} = \int\limits_1^3 \frac{2t^3 dt}{\sqrt{t^4} + 3\sqrt[4]{t^4}} = 2\int\limits_1^3 \frac{t^2 - 9 + 9}{t+3} =$$

$$= 2\left(\int\limits_1^3 \frac{(t-3)(t+3)dt}{t+3} + 9\int\limits_1^3 \frac{dt}{t+3} \right) = 2\left(\int\limits_1^3 (t-3)dt + 9\int\limits_1^3 \frac{d(t+3}{t+3} \right) =$$

$$= 2\left[\left(\frac{t^2}{2} - 3t \right)\Bigg|_1^3 + 9\ln|t+3|\,\Big|_1^3 \right] =$$

$$= 2\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1 \right) + 9\ln|3+3| - 9\ln|1+3| \right] = 2\left(-2 + 9\ln\frac{3}{2} \right).$$

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N4

Несобственные интегралы

[5],гл.2, §6;[7],гл.2, §6;[8],т.I,гл.9, §7;
[9],гл.10, §2;[10],гл.6, §5;[11],гл.5, §3, [12]

Интеграл называется несобственным в одном из двух случаев:

а) хотя бы один из пределов интегрирования бесконечен;

б) подынтегральная функция имеет бесконечные разрывы внутри промежутка интегрирования или на его концах.

6.1.Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Несобственным интегралом от функции *f(x)* по промежутку $[a,+\infty)$ называется предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

Он обозначается символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$

Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, в случаях, если предел бесконечен или не существует, - расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty,a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx.$$

Наконец, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty,+\infty)$ определяется в виде суммы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

где a - произвольное число, при этом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится только тогда, когда если оба интеграла в правой части сходятся.

ПРИМЕР 45. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} arctg(x+1)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} arctg(A+1) - arctg(0+1) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\pi/4$.

Для выяснения факта сходимости или расходимости несобственного интеграла часто используются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. В этом случае говорят, что интеграл сходится абсолютно.

ТЕОРЕМА 2. Если на промежутке интегрирования функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, неотрицательны и $\varphi(x) \le f(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 46. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

РЕШЕНИЕ: Заметим, что на всем промежутке интегрирования

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} \ge \frac{2}{\sqrt{x}} \ge 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty} \left(4\sqrt{x}\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(4\sqrt{A} - 4\right) = +\infty.$$

Рассмотренный интеграл расходится. Следовательно, по теореме 2, данный несобственный интеграл также расходится.

6.2 Несобственный интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, а в точке b имеет бесконечный разрыв: $\lim\limits_{x\to b-o} f(x) = \infty$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл называется сходящимся, если указанный предел существует и конечен, и расходящимся в противном случае.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв на левом конце промежутка интегрирования.

ПРИМЕР 47.Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2} + x^{1/2}}{x} dx.$$

РЕШЕНИЕ: Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке 0, поэтому

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2} + x^{1/2}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{x^{3/2} + x^{1/2}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_\varepsilon^1 x^{1/2} dx + \int_\varepsilon^1 x^{-1/2} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{2}{3} + 2 - \left(\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} + 2\varepsilon^{1/2} \right) \right) = 2\frac{2}{3}.$$

ПРИМЕР 48. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_3^5 \frac{x \cos x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx.$$

РЕШЕНИЕ: Интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 3$ на всем промежутке интегрирования

$$\left| \frac{x \cos x}{\sqrt{x^2 - 9}} \right| \le \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}, \text{ так как } |\cos x| \le 1, \quad x > 0.$$

Рассмотрим интеграл $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$. Сделаем в нем замену $t = \sqrt{x^2 - 9}$, тогда $x^2 = t^2 + 9$, $xdx = tdt$ и при $x = 3$, $t = 0$, а при $x = 5$, $t = 4$. Тогда

$$\int_3^5 \frac{x \cos x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx = \int_0^4 \frac{tdt}{t} = t \Big|_0^4 = 4.$$

Этот интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл сходится абсолютно и по теореме 1 - сходится.

Геометрические приложения определенного интеграла

[5],гл.2,§§7,8; [7],гл.2,§§7,8; [8],т.1,гл.12,§§1-6;
[9],гл.10,§§3-6; [10],гл.6, 6; [11],гл.5,§§7-10, [12]

Рассмотрим приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг кривых.

6.3. Вычисление площадей плоских фигур

Если фигура ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, а снизу графиком $y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис.17), то ее площадь S находится по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$$

ПРИМЕР 49. Вычислить площадь круга радиуса *R*.

РЕШЕНИЕ: Круг определяется неравенствами $-\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$. В таком случае $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\varphi(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, x изменяется от -*R* до *R*. Тогда

$$S = \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right]dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Сделаем в этом интеграле замену $x = R\sin t$, тогда $dx = R\cos t dt$, $\sqrt{R^2 - x^2} = R\cos t$, и при $x = -R$, $t = -\pi/2$, а при $x = R$, $t = \pi/2$. Тогда

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\cos tR\cos t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) = R^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi R^2.$$

ПРИМЕР 50. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$y \le 2 - x^2, \quad y \ge x, \quad y \ge -x.$$

РЕШЕНИЕ: Описанная фигура лежит под параболой и над биссектрисами 1-го и 2-го координатных углов (рис.18). Для вычисления ее площади разобьем промежуток интегрирования на два:

$$S = \int_{-1}^{0} \left(2 - x^2 - (-x)\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx =$$

$$\left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{7}{3}$$

В полярной системе координат площадь сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой, заданной непрерывной функцией $\rho = f(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис.19), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

ПРИМЕР 51. Вычислить площадь круга радиуса *R*, используя полярные координаты.

РЕШЕНИЕ: В полярных координатах уравнение окружности радиуса R с центром в полюсе имеет вид $\rho = R(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Тогда для площади круга имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2} \varphi\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

ПРИМЕР 52. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2\sin\varphi + 3$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

РЕШЕНИЕ: Вид фигуры, ограниченной данной кардиоидой, представлен на рис.20. Согласно условию, требуется найти площадь заштрихованной части фигуры, для которой полярный угол изменяется от 0 до $\pi/2$. Тогда искомая площадь будет равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2\sin\varphi+3)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(4\sin^2\varphi+12\sin\varphi+9\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}+12\sin\varphi+9\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(-2\cos 2\varphi+12\sin\varphi+11)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\sin 2\varphi-12\cos\varphi+11\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\pi+12\right)=\frac{11}{4}\pi+6.$$

6.4. Вычисление длин дуг кривых

Если плоская дуга задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \text{где } (\alpha\le t\le\beta),$$

и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся в ноль одновременно, то длина дуги

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

ПРИМЕР 53. Вычислить длину окружности радиуса R.

РЕШЕНИЕ: Окружность радиуса R задается в параметрическом виде уравнениями $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, где $t\in[0,2\pi]$, тогда

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,dt=R\int_0^{2\pi}dt=Rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi R$$

Если дуга задана в явном виде уравнением $y = f(x)$, $(a\le x\le b)$, то

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (4)$$

ПРИМЕР 54. Вычислить длину окружности радиуса R, используя формулу (4).

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим четверть окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенную в первом координатном угле. Она задается уравнением $y=+\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[0,R]$. Тогда $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и для длины окружности получаем

$$L = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Этот интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на правом конце отрезка интегрирования. Вычислим его:

$$L = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 4R \int_0^{R-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 4R \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^{R-\varepsilon} = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R.$$

Если плоская дуга задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а начальная и конечная точки дуги имеют полярные углы α и β соответственно, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}d\varphi \tag{5}$$

ПРИМЕР 55. Вычислить длину окружности радиуса *R*, используя формулу (5).

РЕШЕНИЕ: Окружность радиуса *R* с центром в полюсе системы координат задается уравнением $\rho = R (0 \le \varphi \le 2\pi)$. Тогда $\rho' = 0$ и длина

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + R^2}d\varphi = R\int_0^{2\pi} d\varphi = R\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

6.5. Вычисление площадей поверхностей вращения

Если плоская дуга *AB* задана уравнением $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$, причем *f(x)* неотрицательна и имеет непрерывную производную на *(a,b)*, то площадь поверхности, полученной при вращении дуги *AB* вокруг оси *Ox* может быть вычислена по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

ПРИМЕР 56. Вычислить площадь сферы радиуса *R*.

РЕШЕНИЕ: Сфера радиуса *R* может быть получена вращением полуокружности $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси *Ox*. Тогда $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ и для площади поверхности сферы получаем

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

6.6. Вычисление объемов тел вращения

Если плоская дуга *AB* задана уравнением $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$, причем *f(x)* неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой *AB,* вокруг оси *Ox* может быть вычислена по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если плоская дуга *CD* задана уравнением $x = \varphi(x)$, $(c \le y \le d)$, причем $\varphi(y)$ неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой *CD,* вокруг оси *Oy* может быть вычислена по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

ПРИМЕР 57. Вычислить объем шара радиуса *R*.

РЕШЕНИЕ: Шар радиуса *R* может быть получен вращением полукруга $y \le +\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси Ox. Тогда для объема шара имеем

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] =$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Переменная z называется функцией независимых переменных x, y в множестве E, если каждой паре (x,y) значений этих переменных из E ставится в соответствие одно определенное значение z. Аналогично определяются и функции большего числа переменных.

Частные производные

[6],гл.3; [7],гл.3,§§4,5,7,8; [8],т.1,гл.8,§§5,7,10,12;
[9],гл.8,§2; [10],гл.7,§§1,2; [11],гл.6,§§3,4,7,9, [12]

Для функции нескольких переменных вводится понятие частной производной по каждому из аргументов. Если $z = f(x,y)$, то по определению $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ частная производная z по x в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется и частная производная по y

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

При вычислении частных производных все аргументы функции, за исключением той, по которой производится дифференцирование, считаются постоянными (константами). При вычислении частных производных применяются те же приемы, что и при вычислении обыкновенных производных.

ПРИМЕР 58. Вычислить z'_x и z'_y для функции $z = f(x,y) = xy^2 \sin x$.

РЕШЕНИЕ: Найдем z'_x.

Считаем y^2 величиной постоянной, выносим его за знак производной. Дифференцируем $x\sin x$ по x как произведение.

$$z'_x = y^2 (x \sin x)'_x = y^2 \left(x' \sin x + x(\sin x)'\right) = y^2 (\sin x + x \cos x).$$

Для z'_y получаем

$$z'_y = x \sin x \left(y^2\right)'_y = x \sin x \cdot 2y = 2xy \sin x.$$

Частные производные второго порядка - это частные производные от производных первого порядка. Например:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx};\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$$

Если функция $z=f(x,y)$ обладает в некоторой точке непрерывными частными производными z''_{xy} и z''_{yx}, то эти производные равны. Аналогичный факт справедлив и для производных более высоких порядков и для большего числа аргументов, что позволяет выбирать порядок дифференцирования.

ПРИМЕР 59. Вычислить $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ для функции $u=e^{x/z}\sin y$.

РЕШЕНИЕ: По определению частных производных высших порядков, можно найти искомую производную следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x/z}\sin y\right)=(\sin y)\left(e^{x/z}\right)'_x=\frac{\sin y}{z}e^{x/z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin y}{z}e^{x/z}\right)=\frac{1}{z}\cos y\cdot e^{x/z};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos y\frac{1}{z}e^{x/z}\right)=\cos y\left[-\frac{1}{z^2}e^{x/z}+\frac{1}{z}e^{x/z}\left(-\frac{x}{z^2}\right)\right]=$$

$$=-\left(\frac{1}{z^2}e^{x/z}+\frac{xe^{x/z}}{z^3}\right)\cos y=-\frac{x+z}{z^3}e^{x/z}\cos y.$$

Если функция y от x задана неявно уравнением типа $F(x,y)=0$, то производная y по x вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\,.$$

где $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ - частные производные от $F(x,y)$ по x, y соответственно.

ПРИМЕР 60. Вычислить y'_x и дифференциал dy, если $F(x,y) = e^y + xy = 0$..

РЕШЕНИЕ: В данном случае $F'_x = y$, а $F'_y = e^y + x$. Тогда

$$y'_x = -\frac{y}{e^y + x}; \quad dy = -\frac{y}{e^y + x}dx.$$

Если функция z *от* x, y задана неявно уравнением типа $F(x, y, z) = 0$, то частные производные z по x, y могут быть вычислены из соотношений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad (6)$$

Полный дифференциал

Если функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x, y)$, то ее полным дифференциалом в этой точке называется выражение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ПРИМЕР 61. Найти полный дифференциал dz в точке $M_0\left(0, \pi/4, 1\right)$ для функции $z(x, y)$, заданной уравнением $zy - arctg(xz) = \pi/4$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку функция $z(x, y)$ задана неявно, то ее частные производные z'_x, z'_y можно найти, используя соотношения (6), где $F(x,y,z) = zy - arctg(xz) - \pi/4$. Тогда

$$F'_x = -\frac{z}{1 + x^2z^2}; \;\; F'_y = z; \;\; F'_z = y - \frac{x}{1 + x^2z^2}$$

В точке $M_0\left(0, \pi/4, 1\right)$ $F'_x(M_0) = -1$, $F'_y(M_0) = 1$, $F'_z(M_0) = \pi/4$. Следовательно, в этой точке $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 4/\pi$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -4/\pi$ и полный дифференциал

$$dz(M_0) = 4/\pi\, dx - 4/\pi\, dy = 4/\pi\,(dx - dy).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в ограниченной области

[6],гл.4; [7],гл.4,§§1,2; [8],т.1,гл.8,§17; [9],гл.8,§4; [10],гп.7,§3; [11],гл.6,§§13,14

Если функция нескольких переменных определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она может принимать наибольшее и наименьшее значения либо внутри области в точках экстремума, либо на границе области.

Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $z(x,y)$ в замкнутой ограниченной области D рекомендуется проводить по следующему плану:

-найти точки внутри области, в которых выполняются необходимые условия экстремума $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$, вычислить значения функции в этих точках;

-найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области (обычно этот этап решения сводится к поиску наибольших и наименьших значений функции одной переменной на отрезках);

-сравнить полученные значения функции, выбрать из них наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР 62. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + y^2 - 6y + 1$ в замкнутой ограниченной области D, заданной неравенствами $y \le 4 - x^2$; $y \ge 0$. .

РЕШЕНИЕ: Исследуемая область D изображена на рис.21.

1. На первом этапе найдем стационарные точки функции z внутри области D и значения функции в этих точках. Для этого частные производные $z'_x = 4x$ и $z'_y = 2y$- 6 приравняем нулю и решим полученную систему уравнении: $\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $x = 0$,$y = 3$. Стационарная точка M_1 (0,3) расположена внутри области и $z(M_1) = -8$.

2. Исследуем функцию на границе области:

а) В точках параболы $y(x) = 4 - x^2$, $(-2 \le x \le 2)$ функция z после подстановки $y = y(x)$ становится функцией одной переменной. Исследуем эту функцию $z = 2x^2 + \left(4 - x^2\right)^2 - 6\left(4 - x^2\right) + 1 = x^4 - 7$ на замкнутом промежутке $-2 \le x \le 2: z'_x = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0;\ x \in (-2;2)$. При этом $y = \left.\left(4 - x^2\right)\right|_{x=0} = 4$. Значит, заданная функция имеет на участке параболы единственную стационарную точку $M_2(0,4)$. Вычислим $z(M_2) = -7$.

б) На отрезке прямой $y = 0$, $(-2 \le x \le 2)$ функция z принимает вид: $z = 2x^2 + 1$. Найдем ее стационарные точки: $z'_x = 4x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x \in (-2,2)$. При этом $y = 0$. Значит, заданная функция имеет на отрезке прямой единственную стационарную точку $M_3(0,0)$. Вычислим $z(M_3) = 1$.

в) Вычислим значения функции z в точках $A(-2,0)$ и $C(2,0): z(A) = 9,\ z(C) = 9$.

3. Сравнивая найденные значения функции $z(x,y)$:

$$z(M_1) = -8;\ z(M_2) = -7;\ z(M_3) = 1;\ z(A) = 9;\ z(C) = 9,$$

делаем вывод, что данная функция достигает в заданной области наименьшего значения в точке M_1, а наибольшего в точках A и C :

$$z(0,3) = -8;\ z(-2,0) = z(2,0) = 9.$$

7. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ *N N* 1-4

В контрольных работах студент должен решить задачи, выбрав их номера из таблицы по двум последним цифрам своего шифра и первой букве фамилии.

Например, студент Захаров, шифр 17-0025, выполняет в контрольной работе *N*1 задачи 5,12,25,35,45; в контрольной *N2* - 55,62,75,85,92; в контрольной *N*3 - 102,115,125,135, 142; в контрольной *N*4 - 152,165,175, 182, 195.

Задачи, помеченные *, решают все студенты, кроме студентов гуманитарных специальностей.

Последняя цифра шифра		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер контр. работы	1	1 41*	2 42*	3 43*	4 44*	5 45*	6 46*	7 47*	8 48*	9 49*	10 50*
	2	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	3	121 131	122 132	123 133	124 134	125 135	126 136	127 137	128 138	129 139	130 140
	4	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Предпоследняя цифра шифра		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номер контрольной работы	**1**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	61 91*	62 92*	63 93*	64 94*	65 95*	66 96*	67 97*	68 98*	69 99*	70 100*
	3	101 141	102 142	103 143	104 144	105 145	106 146	107 147	108 148	109 149	110 150
	4	151 181	152 182	153 183	154 184	155 185	156 186	157 187	158 188	159 189	160 190
Первая буква фамилии		**А,И Т**	**Б,О Ц**	**В,Н Х**	**Г,Ф Я**	**Д,З Л**	**Е,М Р**	**Ж,С Ч**	**К Э**	**П Щ**	**У,Ш Ю**
Номер контрольной работы	**1**	21 31	22 32	23 33	24 34	25 35	26 36	27 37	28 38	29 39	30 40
	2	71 81	72 82	73 83	74 84	75 85	76 86	77 87	78 88	79 89	80 90
	3	111*	112*	113*	114*	115*	116*	117*	118*	119*	120*
	4	171 191*	172 192*	173 193*	174 194*	175 195*	176 196*	177 197*	178 198*	179 199*	180 200*

7.1. Задание на контрольную работу № 1

В задачах 1-5 решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$1.\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x+2y-3z=-2 \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} x+z=-4 \\ -2x-y+z=1 \\ x+2y-3z=4 \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x-3y+2z=-6 \\ x+y-z=5 \end{cases} \qquad 4.\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2y+z=-2 \\ 3x+y+z=5 \end{cases}$$

$$5.\begin{cases} x+z=4 \\ x-2y+2z=3 \\ 3x-y-z=-2 \end{cases}$$

В задачах 6-10 решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

$$6.\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 2x-y+z=2 \\ x+y-z=-2 \end{cases} \qquad 7.\begin{cases} x-y+3z=7 \\ 2x+y-z=1 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

$$8.\begin{cases} 2x-z=1 \\ x+3y=-2 \\ x-2y-3z=0 \end{cases} \qquad 9.\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y+2z=8 \\ 2x-3y-z=-1 \end{cases}$$

$$10.\begin{cases} 2x-3y-z=-1 \\ x+3z=-2 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$

Задачи 11-20 решить средствами векторной алгебры.

11. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$. Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором $\vec{a}$.

12. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если даны координаты точек A, B и C: $A(-1,1,2), B(-1,1,3)$ и $C(-1,3,4)$, и проекцию $\overrightarrow{BA}$ на

$\overrightarrow{BC}$.

13. Найти значения m такие, чтобы векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{c} = 2m\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ были компланарны.

14. Определить, лежат ли точки $A(1,1,2)$, $B(-1,0,3)$, $C(2,1,0)$ и $D(1,2,5)$ в одной плоскости.

15. Найти площадь треугольника ABC, если его вершины имеют координаты: $A(1,2,0), B(3,5,1), C(1,4,-1)$.

16. На неизвестном векторе $\vec{a} = (x, x-2, x-1)$ и векторе $\vec{b} = (1,3,4)$ построен прямоугольник. Найти вектор $\vec{a}$ и площадь данного прямоугольника.

17. Найти высоту параллелепипеда, в основании которого лежит параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Объем параллелепипеда равен 22 $ед^3$.

18. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$ и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 60^o.

19. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(2,1,3)$ и $D(-1,3,2)$.

20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 45^o.

Задачи 21-30 решить методами аналитической геометрии.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-2,3)$ и параллельной плоскости $3z - x - y - 1 = 0$.

22. Найти расстояние от точки $M_0(1,-1,1)$ до плоскости, проходящей через три точки: $A(2,-1,5), B(-4,-1,-1)$ и $C(0,2,6)$.

23. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3,-1,0)$ параллельно прямой AB, если $A(-1,2,-3)$ и $B(0,-1,4)$.

24. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ и плоскости $x - 3y + z - 1 = 0$.

25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,3,-1)$ перпендикулярно плоскости, которой принадлежат точки $A(2,1,-1), B(-1,1,3)$ и $C(0,2,-1)$.

26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-1,3)$, перпендикулярно прямой, содержащей точки $A(1,-4,2)$ и $B(5,1,-3)$.

27. Найти синус угла между прямой AB, где $A(1,0,-1), B(1,2,0)$, и плоскостью $x+y-z+1=0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1,0,1)$ и прямую $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-2}$.

29. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0,-2,-1)$, и параллельной прямой $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3y-2z-1=0 \end{cases}$

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,-1,4)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ x-y-2z+2=0 \end{cases}$

В задачах 31-40 определить вид кривых, найти координаты точек их пересечения, сделать чертеж.

31. $x^2+(y-1)^2=16$; $\quad x^2=y+3$

32. $x^2-y=2$; $\quad (x-1)^2+y=3$

33. $y^2-x^2=9$; $\quad (x-4)^2+y^2=25$.

34. $x^2+4y^2=25$; $\quad (x-3)^2+y^2=4$.

35. $x^2-y^2=9$; $\quad 2y-x=3$.

36. $y^2-x^2=4$; $\quad 2y=4-x^2$

37. $y^2=x-1$; $\quad x+y=3$.

38. $y^2=x+5$; $\quad y^2=2(x+3)$.

39. $(x+1)^2+y^2=8$; $\quad 2y=-(x+1)^2$.

40. $4x^2+25y^2=100$; $\quad x^2+y^2-25=0$.

В задачах 41-50 тело задано системой неравенств. Написать уравнения поверхностей, ограничивающих тело, и определить их вид. Определить, по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются поверхности. Сделать схематический чертеж заданного тела.

41. $\begin{cases} x^2+y^2\le z+4 \\ x^2+y^2\le -z+6 \end{cases}$ 42. $\begin{cases} 4x^2+4y^2+z^2\le 16 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\ge -1 \\ x^2+y^2\le 3 \end{cases}$ 44. $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2\le 4 \\ x^2+y^2-2z^2\ge 1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2+y^2\le 2(z+1) \\ x^2+y^2+z-5\le 0 \end{cases}$ 46. $\begin{cases} x^2+y^2\le -z+4 \\ x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2+y^2\le 16 \\ x^2+y^2-z^2\ge 0 \end{cases}$ 48. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\ge -1 \\ x^2+y^2+z^2\le 9 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2+y^2-(z-2)^2\ge 0 \\ \dfrac{x^2+y^2}{2}\le -z+2 \end{cases}$ 50. $\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{z^2}{9}\le 0 \\ x^2+y^2+\dfrac{z^2}{16}\le 1 \end{cases}$

Задание на контрольную работу № 2.

В задачах 51-60 найти пределы функций, используя эквивалентные бесконечно малые величины и тождественные преобразования.

51. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}\ln(\cos 5x)}{arctg^3\frac{x}{2}}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+4x^6-2x^2}}{x^2\sqrt{9x^2-3}}$

52. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(6\sqrt[3]{x}\right)-1}{\ln(1+\sqrt{9x})\sin(2\sqrt[6]{x})}$ *б*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^3-125}$

53. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+5x^2}-1\right)\sqrt{9x^3}}{arctg\left(\sqrt{x^7}\right)}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-5x+8x^5}{8-4x^5+3x^3}$

54. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(2x+2)(e^{x+1}-1)}{\cos(x+1)-1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$

55. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1+3x^2}\,tg\frac{x}{3}}{\arcsin^3\frac{x}{2}}$ *б*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}\sqrt{x^3+2x-4}}{\sqrt{x^2+25x^4-5}}$

56. $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x\ln 5)}{tg\sqrt{x}\left(1-5^{\sqrt{9x}}\right)}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+5x^2}-\sqrt{x^4-1}\right)$

57. $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\sin(x^2-2x+1)}{arctg^3(x-1)}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+3x-20}{3x^2+8x-16}$

58. $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx^3(1-e^{10x})}{\sqrt{1+x^4}-1}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3+8x+1}-\sqrt{x^3+1}\right)$

59. $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+tg^2x}-1}{\arcsin\sqrt{x^3}\left(1-e^{\sqrt{x}}\right)}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-10}-\sqrt{5x+x^2}\right)$

60. $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(5\sqrt[3]{x}\right)\ln\left(1+\sqrt[6]{64x}\right)}{arctg\sqrt{25x}}$ $\quad$ $б)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^3-8}$

В задачах 61-70 а) найти точки разрыва функций, если они существуют; б) найти односторонние пределы в точках разрыва и установить тип точек разрыва; в) сделать схематический чертеж графика функции в окрестности точек разрыва.

61. $f(x)=3^{\frac{2}{x^2+5x}}$ $\qquad$ 62. $f(x)=\dfrac{|x+4|}{x^2+x-12}$

63. $f(x)=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x+1}}$ $\qquad$ 64. $f(x)=\dfrac{x}{|x|(x+5)}$

65. $f(x)=\dfrac{1}{x}2^{\frac{1}{x-3}}$ $\qquad$ 66. $f(x)=\dfrac{|x-6|}{x^2-4x-12}$

67. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}, x<\dfrac{1}{2}\\ \sin(\pi x), \dfrac{1}{2}\le x<1\\ \ln x, x>1\end{cases}$ $\qquad$ 68. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ tgx, -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ 3^x-1, x>0\end{cases}$

69. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{4}{\pi}x\right), x<\dfrac{\pi}{4}\\ ctgx, \dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ 2x-\pi, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\qquad$ 70. $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le -\pi\\ x+1, -\pi<x\le 0\\ 2^{-x}, x>0\end{cases}$

В задачах 71-80 найти первую производную функции.

71. $y=\ln(x^4+1)-2x^2 arctgx^2+10$

72. $y=\sqrt{x^5}\arcsin\sqrt{x^5}+\sqrt{1-x^5}-25$

73. $y=2^{x+1}arcctg2^x+\ln(4^x+1)+7$

74. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}-\arccos x^2-6$

75. $y=ctg^3 2x-\dfrac{\cos 2x}{\sin^3 2x}-8$

76. $y=3^x\arccos 3^x-\sqrt{1-9^x}+5$

77. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}+tg2x\ln(1+\sin 2x)-2x+3$

78. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x}-9$

79. $y=\sin\sqrt{x}tg\sqrt{x}-\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}+2$

80. $y=2e^x arctg(e^x)-\ln(1+e^{2x})-4$

В задачах 81-85 найти координаты точки пересечения с осью Ox касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке. Сделать чертеж.

81. $y=x^2-4, A(1,-3)$ 82. $y=\sin\dfrac{x}{2}, A\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

83. $y=\sqrt{25-x^2}, A(4,3)$ 84. $y=ctg2x, A\left(\dfrac{\pi}{8},1\right)$

85. $y=e^{-3x}, A(0,1)$.

В задачах 86-90 найти координаты точки пересечения с осью Oy касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке. Сделать чертеж.

86. $y=2-2x^2, A(1,0)$ 87. $y=\sqrt{4-x^2}, A\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

88. $y=tg\frac{x}{2}, A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 89. $y=\cos 2x, A\left(\frac{\pi}{4},0\right)$

90. $y=\ln\left(\frac{x}{3}\right), A(3e,1).$

В задачах 91-100 найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически

91. $\begin{cases} x=\sqrt{1-4^t} \\ y=\arcsin 2^t \end{cases}$ 92. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\sqrt{t}} \\ y=tg\sqrt{t} \end{cases}$

93. $\begin{cases} x=\ln\left(\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}\right) \\ y=\dfrac{2}{\sin t} \end{cases}$ 94. $\begin{cases} x=arcctg\sqrt{t} \\ y=\dfrac{1}{1+t} \end{cases}$

95. $\begin{cases} x=\ln(t^3+3) \\ y=\dfrac{t^3-3}{t^3+3} \end{cases}$ 96. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin t} \\ y=ctg^2 t \end{cases}$

97. $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \\ y=\ln(1-\sqrt{t}) \end{cases}$ 98. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^6} \\ y=\arcsin(t^3) \end{cases}$

99. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=arctg\sqrt{t^2-1} \end{cases}$ 100. $\begin{cases} x=tg(3^t) \\ y=\dfrac{1}{\cos(3^t)} \end{cases}$

Задание на контрольную работу № 3.

В задачах 101-110 найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

101. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$ 102. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$

103. $\lim\limits_{x\to 0} arctgxctgx$ 104. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ 106. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}$

107. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ 108. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$

109. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$ 110. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$

В задачах 111-120 исследовать заданную функцию и начертить ее график.

111. $y=x^2\ln x$ 112. $y=\frac{12x}{9+x^2}$

113. $y=xe^{-x}$ 114. $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$

115. $y=\frac{x^3+2}{x}$ 116. $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$

117. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$ 118. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

119. $y=x^{2/3}(x-5)$ 120. $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$

В задачах 121-130 найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

121. $\int\arcsin 2x dx$ 122. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

123. $\int\frac{x}{e^x}dx$ 124. $\int x2^{-x}dx$

125. $\int arctg\sqrt{x}dx$ 126. $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

127. $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ 128. $\int x\sin x\cos x dx$

129. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$ 130. $\int x\cos 3x dx$

В задачах 131-140 найти неопределенные интегралы.

131. $\int \frac{dx}{7+\sin x+7\cos x}$ 132. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

133. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ 134. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

135. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin 2x+\sin^2 x}$ 136. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}$

137. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$ 138. $\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}dx$

139. $\int tg^4 x dx$ 140. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$

В задачах 141-150 вычислить определенные интегралы:

141. $\int\limits_1^5 \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$ 142. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$

143. $\int\limits_0^1 \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$ 144. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$

145. $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ 146. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

147. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 148. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

149. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ 150. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Задание на контрольную работу № 4.

В задачах 151-156 вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

151. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 152. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 153. $\int\limits_{-5}^0 \frac{xdx}{x+5}$

154. $\int\limits_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+18}$ 155. $\int\limits_{-\infty}^0 xe^{x^2}dx$ 156. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

В задачах 157-160 доказать, используя признак сравнения, сходится или расходится несобственный интеграл.

157. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4+1}dx$ 158. $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

159. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{1+x^2}dx$ 160. $\int\limits_2^4 \frac{2-\cos^2 x}{(x-2)^2}dx$

161. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 8$ и прямой $x + y = 9$. Фигуру изобразить на чертеже.

162. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$. Сделать чертеж.

163. Вычислить площадь части круга, заключенной между прямыми $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и окружностями $r = \cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$. Сделать чертеж.

164. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси 0х. Сделать рисунок.

165. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y = 1 + \cos x$, $y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Сделать рисунок.

166. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $0y$ фигуры, ограниченной линиями $y = \ln 2x$, $x = 0$, $0 \le y \le 2$. Сделать рисунок.

167. Найти длину дуги линии $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

168. Найти длину дуги половины кардиоиды $r = 2(\cos\varphi + 1)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

169. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $0x$ дуги кривой $y = \frac{1}{3}x^3$, $-1 \le x \le 1$. Сделать рисунок.

170. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y = \sqrt{x+1}$ $(-1 \le x \le 2)$ вокруг оси $0x$. Сделать рисунок.

В заданиях 171-175 для функции $u = u(x, y, z)$ найти значение

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в точке A.

171. $u = y^3 e^{z^2 x - 5} + 2y + x\ln y,\quad A(5,2,1)$

172. $u = 4z\cos(xy+1) - \dfrac{y}{x^2} + e,\quad A(-\dfrac{1}{2},2,2)$

173. $u = y\ln\left(x - z^2\right) + \sin(xz) - \pi^2,\quad A(5,1,-2)$

174. $u = (z+x)arctg(zy) + 4xyz^2 - z,\quad A(2,1,1)$

175. $u = x^3 tg(zy) - 5xy^2 + 3zx,\quad A(2,\pi,1)$

В заданиях 176-180 найти значение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ в точке A.

176. $u = z\arcsin\dfrac{x}{y} - z^2 x + 2y,\quad A(1,2,3)$

177. $u = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + ze^{x^2} - 4y^2 z,\quad A(1,1,2)$

178. $u = \dfrac{x+y}{x-y} - \sin(xz) + xz^2,\quad A(1,1,\pi)$

179. $u = \cos(xz) - \sqrt{yx} + \ln z,\quad A(\pi,2,1)$

180. $u = \sqrt{1 - x^2 + y^2} - 3z^2 e^{x^3 - 2} + 8x^2 z,\quad A(1,2,e)$

В заданиях 181-185 найти в точке A полный дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно.

181. $arctg(xy) - 4 = \dfrac{\pi}{4} - 2\sqrt{y},\quad A\left(\dfrac{1}{4},4\right)$

182. $\dfrac{\pi}{2} + xtgy = \sqrt{2}\pi\sin(x-y),\quad A\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$

183. $xe^{4y-1} = 6\sqrt{x}\cdot y + 1,\quad A\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$

184. $\cos\sqrt{y} = e^{2xy} - 1,\quad A\left(0,\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

185. $\sqrt{2}\sin(xy) - 2x\cdot\sin y = 0,\quad A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

В заданиях 186-190 найти в точке A полный дифференциал функции $z(x,y)$, заданной неявно.

186. $3^{yz} = ctgx + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

187. $y^2 \cdot e^{z-x} + z = 7 - 2x, \quad A(1,2,1)$

188. $1 + y\sin(xz) = x + z - \pi, \quad A(1,3,\pi)$

189. $\ln(x + 2z) = yz - 2, \quad A(-3,1,2)$

190. $z^3 + 3xy = 3xz + 4, \quad A(-1,0,1)$

В заданиях 191-200 найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,y)$ в указанной замкнутой области D. Сделать рисунок.

191. $z = x^2 + 3y^2 - 2x + 2, \quad D: \ 0 \le x \le 4 - y^2$

192. $z = x^2 + y^2 - 3x - y, \quad D: \ x \le 2, \ 0 \le y \le 2x$

193. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2, \quad D: \ x \ge 0, \ 0 \le y \le 4 - x$

194. $z = 2x^2 + 3y^2 + 4x, \quad D: \ -4 \le x \le -y^2$

195. $z = x^2 + 2y^2 + 2x - 8, \quad D: \ y^2 - 4 \le x \le 0$

196. $z = 2xy + 4x - 2y - 1, \quad D: \ x \le 2, \ 2 - x \le y \le 2$

197. $z = x^2 + 4y^2 + y, \quad D: \ -1 \le y \le -x^2$

198. $z = 2x^2 + y^2 - 2y, \quad D: \ x^2 - 1 \le y \le 0$

199. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 6y, \quad D: \ x \le 0, \ -2 \le y \le 2 + x$

200. $z = 2x^2 + 3y^2 - 6y, \quad D: \ x^2 - 1 \le y \le 3$