ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

ФИЗИКА

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Институты: все

Укрупнённые группы специальностей и направлений подготовки:

140000 – энергетика, энергетическое машинострение и электротехника
150000 – металлургия, машиностроение и материалообработка
190000 – транспортные средства
200000 – приборостроение и оптотехника
210000 – электронная техника, радиотехника и связь
220000 – автоматика и управление
230000 – информатика и вычислительная техника
240000 – химическая и биотехнологии

Направления подготовки высшего профессионального образования:

261000 – технология художественной обработки металлов
280200 – защита окружающей среды

Санкт-Петербург
Издательство СЗТУ
2009

Утверждено редакционно-издательским советом университета
УДК 53(07)

Физика. Задания на контрольные работы. Методические указания к выполнению контрольных работ. /Сост.: В.П. Дзекановская, Е.А. Лиходаева, И.Г. Орехова, Н.А. Тупицкая, В.Б. Харламова, Ю.В. Чуркин, Д.Г. Летенко, С.В. Субботин. СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009, - 215 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Учебное пособие включает задания на контрольные работы, методические указания к решению задач, правила оформления контрольных работ, основные законы и формулы, примеры решения задач и некоторые справочные материалы.

Рассмотрено на заседании кафедры физики 18.05. 2009 г., протокол № 5, одобрено методической комиссией факультета общепрофессиональной подготовки 19.05.2009 г., протокол № 10.

Рецензенты: В.М. Цаплев, д-р. техн. наук, проф. кафедры физики СЗТУ;
В.М. Грабов, д-р. физ.-мат. наук, проф. кафедры физики РГПУ им. А.И. Герцена

Составители: В.П. Дзекановская, Е.А. Лиходаева, И.Г. Орехова, Н.А. Тупицкая, В.Б. Харламова, Ю.В. Чуркин, Д.Г. Летенко, С.В. Субботин.

Под общей редакцией А.Б. Федорцова, д-ра физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики СЗТУ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено в основном для студентов инженерных специальностей СЗТУ, но может использоваться для обучения студентов в других ВУЗах.

Студентам, обучающимся по технологии с элементами ДОТ, данное пособие будет полезно как существенное дополнение к учебно-методическим комплексам, так как это пособие представляет собой единый сборник контрольных заданий по всему курсу физики с конкретными методическими указаниями, примерами и алгоритмами решения задач по различным разделам курса.

Решение задач является важной составляющей учебного процесса изучения курса физики, наряду с изучением теоретического материала и выполнением лабораторных работ. Целью решения задач является закрепление и углубление знаний основных понятий и законов физики, выработка навыков и умений применять полученные знания на практике. Решение задачи предполагает анализ условия, выбор оптимального метода решения, вычисление искомых величин, оценку и анализ полученного результата.

Контрольные работы являются одним из элементов промежуточного контроля знаний студентов по основным разделам теоретического курса. В процессе изучения дисциплины “Физика” студенты должны выполнить пять контрольных работ (№ 1 $\div$ № 5). Студенты, изучающие дисциплину “Физика твёрдого тела” должны выполнить ещё и контрольную работу № 6.

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради. На обложке указывается фамилия и инициалы студента, специальность, шифр и номер контрольной работы.

Условия задач переписываются полностью, без сокращений. Решения задач должны сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями с обязательным использованием рисунков. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставляются поля и интервалы между задачами (не менее 5 см). В конце каждой контрольной работы необходимо указать, каким учебным пособием пользовался студент (название учебного пособия, автор, год издания).

Решение задач рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Ввести буквенные обозначения всех используемых физических величин.

2. Под рубрикой "Дано" кратко записать условие задачи с переводом значений всех величин в одну систему единиц – СИ.

3. Сделать (если это необходимо) чертеж, поясняющий содержание задачи и ход решения.

4. Сформулировать физические законы, на которых базируется решение задачи, и обосновать возможность их использования.

5. На основе сформулированных законов составить уравнение или систему уравнений, решая которую можно найти искомые величины.

6. Решить уравнение и получить в общем виде расчетную формулу, в левой части которой стоит искомая величина, а в правой – величины, данные в условии задачи.

7. Проверить единицы измерения полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность.

8. Произвести вычисления. Для этого необходимо все значения величин в единицах СИ подставить в расчетную формулу и выполнить вычисления (с точностью не более 2-3 значащих цифр).

9. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной

дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 6340 надо записать $6{,}34 \cdot 10^3$.

Выполненные контрольные работы сдаются на рецензию преподавателю по крайней мере за одну недели до экзамена по физике. После рецензирования вносятся исправления в решение задач в соответствии с замечаниями преподавателя. Исправленные решения помещаются в конце тетради с контрольными работами.

Зачет по каждой контрольной работе принимается преподавателем в процессе собеседования по правильно решенной и прорецензированной контрольной работе.

В каждой контрольной работе следует решить восемь задач. Номера задач определяются по таблицам 1 ... 6 в соответствии с номером своего варианта. Номер варианта соответствует последней цифре шифра студента.

Библиографический список

Основной:

1. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 2003 [и др. г. изд.].
2. Детлаф, А.А. Курс физики: учеб. пособие/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 2003 [и др. г. изд.].
3. Чуркин, Ю.В. Физика твёрдого тела/ Ю.В. Чуркин, С.В. Субботин. – СПб.: Изд.-во СЗТУ, 2008.
4. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями/ Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Высш. шк., 2000 [и др. г. изд.].

Дополнительный:

5. Савельев, И.В. Курс общей физики/ И.В. Савельев. – М.: Наука, 2002 [и др. г. изд.].

6. Цаплев, В.М. Физика ч. 1: учеб.-метод. комплекс/ В.М. Цаплев, И.Г. Орехова, Е.А. Лиходаева. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2007.
7. Цаплев, В.М. Курс физики. Электричество и магнетизм/ В.М. Цаплев, И.Г. Орехова, Е.А. Лиходаева. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006.
8. Цаплев, В.М. Курс физики. Элементы квантовой и атомной физики/ В.М. Цаплев, И.Г. Орехова, Е.А. Лиходаева. – СПб.: 2006.
9. Федорцов, А.Б. Курс физики. Колебания и волны. Волновая оптика/ А.Б. Федорцов, В.М. Цаплев. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006.
10. Епифанов, Г.И. Твердотельная электроника/ Г.И. Епифанов, Ю.А. Момма. – М.: Высш. шк., 1986.

2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1
“ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ”

2.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 1

В контрольную работу № 1 включены задачи на следующие темы: кинематика поступательного и вращательного движения; динамика поступательного движения; работа постоянной и переменной силы, закон сохранения механической энергии; закон сохранения импульса, совместное применение законов сохранения импульса и механической энергии; динамика вращательного движения твёрдого тела; закон сохранения момента импульса, кинетическая энергия вращающегося тела; элементы специальной теории относительности.

Для решения задач по кинематике необходимо знать закон (уравнение) движения точки, усвоить понятия средних и мгновенных скоростей и ускорений, а также выяснить направление этих величин в каждой конкретной задаче.

Приступая к решению задач 101...110, проработайте соответствующий материал по пособию [1], с. 6...14.

Решение задач динамики (задачи 111...120) требует составления уравнения движения материальной точки, выражающего второй закон Ньютона.

При этом рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Вначале необходимо сделать чертёж и показать все силы, действующие на тело.

2. Записать второй закон Ньютона в векторной форме.

3. Если силы действуют не по одной прямой, то выбирают две взаимно перпендикулярные оси X и $У$, лежащие в плоскости действия сил. Спроецировать все векторы, входящие во второй закон Ньютона, и записать этот закон в виде двух скалярных уравнений.

4. В случае прямолинейного движения одну из осей (X) следует направить в направлении движения, а другую ($У$) – перпендикулярно к ней.

5. Если все силы, действующие на тело, лежат вдоль одной прямой, то сразу можно представить второй закон Ньютона в скалярной форме.

Приступая к решению задач 111...120, ознакомьтесь с данной темой по учебному пособию [1], с. 14...19.

Решение задач на законы сохранения (импульса, механической энергии и момента импульса) требует усвоения понятия замкнутой (изолированной) системы тел. Решая конкретную задачу, необходимо выяснить, является ли система тел замкнутой.

Следует помнить, что закон сохранения импульса можно применить и для незамкнутых систем, когда внутренние силы значительно больше внешних.

Составляя уравнения, описывающие законы сохранения, следует рассматривать движение всех тел системы в одной и той же инерциальной системе отсчета.

Решение задач 121...130 требует знания понятий работы постоянной и переменной силы, кинетической и потенциальной энергий, механической энергии системы.

Закон сохранения механической энергии следует применять в тех задачах, когда в замкнутой системе между её телами действуют консервативные силы (например, гравитационные силы, силы упругости). Применение закона сохранения механической энергии, связывающего начальное и конечное состояния системы взаимодействующих тел, существенно упрощает решение задач, так как позволяет не рассматривать конкретный вид действующих между телами сил.

Другой тип задач: в системе действуют неконсервативные силы (например, силы трения). В этом случае изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил.

Для решения задач 121...130 необходимо изучить соответствующий материал по учебному пособию [1], с. 23...29.

Приступая к решению задач 131...150, проработайте соответствующий материал по учебному пособию [1], с. 19...22; 30...34.

Решение задач 151...160 по теме “Динамика вращательного движения” требует знания основного уравнения динамики вращательного движения и физического смысла входящих в него величин – момента силы, момента инерции, момента импульса.

При решении задач 161...170 следует вначале выяснить, равен ли нулю результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, т.е. можно ли применить закон сохранения момента импульса к данной задаче. Затем следует записать этот закон, приравняв суммарный момент импульса системы до и после взаимодействия.

Для решения задач 161...170 необходимо проработать соответствующий материал по учебному пособию [1], с. 34...40.

Задачи 171...180 относятся к теме “Элементы специальной теории относительности”. Для решения этих задач необходимо знать постулаты этой теории, преобразования Лоренца и следствия из них. Решение задач на релятивистскую динамику требует усвоения взаимосвязи массы и энергии, а также энергии и импульса свободной частицы.

Ознакомьтесь с материалом данной темы по учебному пособию [1], с. 67...79.

Табл. 1

Вариант	Номера задач							
0	101	111	121	131	141	151	161	171
1	102	112	122	132	142	152	162	172
2	103	113	123	133	143	153	163	173
3	104	114	124	134	144	154	164	174
4	105	115	125	135	145	155	165	175
5	106	116	126	136	146	156	166	176
6	107	117	127	137	147	157	167	177
7	108	118	128	138	148	158	168	178
8	109	119	129	139	149	159	169	179
9	110	120	130	140	150	160	170	180

2.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

2.2.1. Кинематика поступательного и вращательного движения

1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси X

$$x = f(t),$$

где $f(t)$ – некоторая функция времени.

2. Средняя скорость за промежуток времени Δt

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$; x_1 – положение точки в момент времени t_1; x_2 – положение точки в момент t_2; $\Delta t = t_2 - t_1$.

3. Мгновенная скорость

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

4. Среднее ускорение

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

5. Мгновенное ускорение

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

6. Уравнение движения точки при вращательном движении твёрдого тела

$$\varphi = \varphi(t),$$

где φ – угловое положение точки в момент времени t.

7. Среднее значение угловой скорости

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота твёрдого тела за время Δt.

8. Мгновенное значение угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

9. Угловая скорость при равномерном движении по окружности

$$\omega = 2\pi n,$$

где n – число оборотов в секунду.

10. Среднее значение углового ускорения

$$<\beta> = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$ – изменение угловой скорости за промежуток времени Δt.

11. Мгновенное значение углового ускорения

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}.$$

12. Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими движение точки по окружности

$$v = \omega R,$$

$$a_\tau = \beta R,$$

$$a_n = \omega^2 R,$$

где v – линейная скорость точки (направлена по касательной к окружности), a_τ – тангенциальное ускорение (направлено по касательной), a_n – нормальное ускорение (направлено к центру окружности), R – радиус окружности.

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид $X = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м; $B = 1$ м/с; $C = -0{,}5$ м/с^3.

Найти координату, скорость и ускорение точки в момент времени 2с.

Дано:	Решение:
$X = A + Bt + Ct^3$	Координату точки найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B, C и времени,
$A = 2$ м	$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^3)$ м $= 0$.
$B = 1$ м/с	Так как требуется найти скорость и ускорение в определенный момент времени ($t = 2$ с), то это значит, нужно определить мгновенные величины v_x и a_x.
$C = -0{,}5$ м/с^3	
$t = 2$ с	
x - ? v - ? a - ?	

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 .$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct .$$

Произведя вычисления для момента времени $t = 2$ с, получим:

$$v_x = (1 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2)\ \text{м/с} = -5\ \text{м/с} ,$$

$$a_x = 6\,(-0{,}5) \cdot 2\ \text{м/с}^2 = -6\ \text{м/с}^2 .$$

Задача 2

Диск радиусом 0,1 м, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорение 0,5 рад/с^2. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска через две секунды после начала вращения.

Дано:	Решение:
$R = 0,1$ м $\omega_0 = 0$ $\beta = 0,5$ рад/с^2 $t = 2$с	Тангенциальное и нормальное ускорение точки вращающегося тела выражаются формулами $$a_\tau = \beta R, \qquad (1)$$ $$a_n = \omega^2 R, \qquad (2)$$
a_τ - ? a_n - ? $a = ?$	где ω – угловая скорость тела, β – его угловое ускорение, R – радиус диска.

В условии задано угловое ускорение, которое определяется выражением

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (3)$$

Следовательно, угловая скорость равна

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \qquad (4)$$

причем по условию начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$. Учитывая соотношения (2) и (4), получаем формулу для нормального ускорения

$$a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R.$$

В момент времени $t = 2$ с нормальное ускорение

$$a_n = \beta^2 t^2 R = 0,5^2 \cdot 2^2 \cdot 0,1^2 = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \beta R = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05 \text{ м/с}^2,$$

полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + {}_\tau^2} = \sqrt{10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2} = 1,1 \cdot 10^{-1}} \text{ м/с}^2$$

2.2.2. Динамика. Законы Ньютона

1. Импульс материальной точки массой m, движущейся поступательно со скоростью $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2. Второй закон Ньютона в общем случае

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ – результирующая всех сил, приложенных к материальной точке.

3. Второй закон Ньютона в случае средней силы, действующей за время Δt:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F},$$

4. Если масса постоянна, то второй закон Ньютона может быть записан в виде:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

5. Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x – абсолютная деформация;

б) сила гравитационного взаимодействия

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих материальных точек; r – расстояние между материальными точками;

в) сила трения скольжения

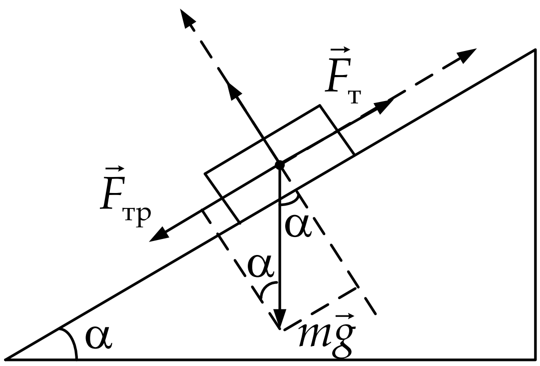
$$F = fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

Примеры решения задач

Задача 1

Автомобиль массой 1 т поднимается по шоссе с уклоном 30° под действием силы 7 кН. Коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью шоссе равен 0,1. Определить ускорение автомобиля.



Дано:

$m = 1$ т $= 10^3$ кг

$F_{\text{Т}}$ = кН $= 7 \cdot 10^3$ Н

$\alpha = 30^{\circ}$

$f = 0{,}1$

$a = ?$

Решение:

На автомобиль действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции шоссе $\vec{N}$, сила тяги $\vec{F}_{\text{Т}}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. По условию задачи вектор $\vec{a}$ направлен вверх по наклонной плоскости.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Т}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Спроецируем обе части этого уравнения на выбранные направления осей X и $У$ (см. рис. 1).

$$ma = -mg\sin\alpha + \vec{F}_{\text{Т}} - F_{\text{тр}}. \qquad (1)$$

$$-mg\cos\alpha + N = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим $N = mg\cos\alpha$.

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\alpha$, запишем уравнение (1) в виде:

$$ma = -mg\sin\alpha + \vec{F}_{\text{Т}} - fmg\cos\alpha,$$

откуда

$$a = \frac{F - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{m}. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) числовые значения, получим:

$$a = \frac{7 \cdot 10^3 - 10^3 \cdot 9{,}81(0{,}52 + 0{,}1 \cdot 0{,}87)}{10^3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2.2.3. Работа постоянной и переменной силы. Закон сохранения механической энергии

1. Работа постоянной силы

$$A = FS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором силы и перемещением.

2. Работа переменной силы

$$A = \int_S F_S dS,$$

где F_S – проекция силы на направление перемещения dS.

3. Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad E_k = \frac{p^2}{2m}.$$

4. Потенциальная энергия:

а) упруго деформированной пружины

$$E_\text{П} = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$E_\text{П} = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними (данные тела считаются материальными точками);

в) тела, находящегося вблизи поверхности Земли (в однородном поле силы тяжести)

$$E_\text{П} = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения тела; h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли).

5. Работа, совершаемая внешними силами, определяется как мера изменения энергии системы

$$A = \Delta E = E_2 - E_1 .$$

6. Закон сохранения механической энергии

$$E = E_k + E_П = \text{const.}$$

Примеры решения задач

Задача 1

К нижнему концу пружины жёсткостью $3 \cdot 10^2$ Н/м присоединена другая пружина жёсткостью $5 \cdot 10^2$ Н/м, к концу которой прикреплена гиря. Пренебрегая массой пружины, определить отношение потенциальных энергий пружин.

Дано:	Решение:
$k_1 = 3 \cdot 10^2$ Н/м	Так как на обе пружины действует одна и та же сила (mg), то силы упругости одинаковы для обеих пружин, т.е.
$k_2 = 5 \cdot 10^2$ Н/м	
$\dfrac{E_{П2}}{E_{П1}} = ?$	$$k_1 x_1 = k_2 x_2 , \quad (1)$$

отсюда

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_1}{k_2} . \quad (2)$$

Известно, что потенциальная энергия пружины имеет вид

$$E_П = \frac{kx^2}{2} .$$

Запишем выражение для потенциальных энергий первой и второй пружин:

$$E_{П1} = \frac{k_1 x_1{}^2}{2} \text{ и } E_{П2} = \frac{k_2 x_2{}^2}{2} .$$

Разделим $E_{П2}$ на $E_{П1}$:

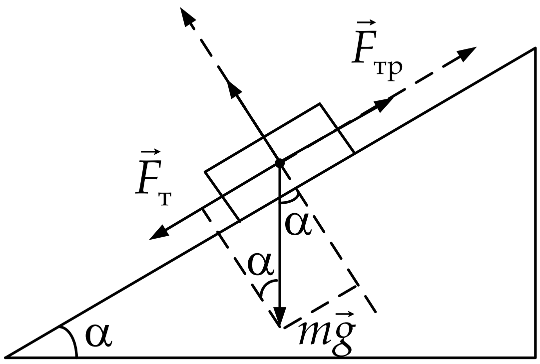
$$\frac{E_{П2}}{E_{П1}} = \frac{k_2 x_2^2}{k_1 x_1^2} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{x_2^2}{x_1^2} . \quad (3)$$

Подставив (2) в выражение (3), получим:

$$\frac{E_{\text{П}2}}{E_{\text{П}1}} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{3}{5} = 0,6\,.$$

Задача 2

Поезд массой 600 т движется под гору с уклоном 0,3° и за 1 минуту развивает скорость 18 км/ч. Коэффициент трения равен 0,01. Определить среднюю мощность локомотива.



Дано:	Решение:
$m = 600$ т $= 6 \cdot 10^5$ кг	Средняя мощность, развиваемая локомотивом
$\alpha = 0{,}3^\circ$	$< N > = F_{\text{т}} < v >, \qquad (1)$
$t = 1$ мин $= 60$ с	где $F_{\text{т}}$ – сила тяги.
$f = 0{,}01$	Среднее значение скорости $< v > = \frac{v_{\max}}{2}$, $v_{\max} = v$,
$v = 18$ км/ч $= 5$ м/с	
$<N> = ?$	ускорение поезда $a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v}{t}$.

Запишем уравнение II закона Ньютона в проекции на направление движения:

$$ma = F_{\text{т}} + mg \sin\alpha - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

где
$$F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

Тогда из уравнения (2) с учётом (3) запишем выражение для силы тяги локомотива:

$$F_{\text{т}} = m\frac{v}{t} + fmg\cos\alpha - mg\sin\alpha, \tag{4}$$

средняя мощность, развиваемая локомотивом, $<N>$ вычисляется по формуле

$$< N > = \frac{mv}{2}\left(\frac{v}{t} + fg\cos\alpha - g\sin\alpha\right).$$

Произведя вычисления, получим:

$$\langle N\rangle = \frac{6\cdot10^5\cdot5}{2}\left(\frac{5}{2} + 10^{-2}\cdot9{,}81\cdot1 - 9{,}81\cdot0{,}52\cdot10^{-2}\right) \approx 195\,\text{кВт}.$$

Задача 3

Молот массой 5 кг, двигаясь со скоростью 4 м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием равна 95 кг. Считая удар неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Определить коэффициент полезного действия (КПД) удара.

Дано:	Решение:
$m_1 = 5$ кг $m_2 = 95$ кг $v_1 = 4$ м/с $v_2 = 0$ ——— $E_{\text{деф}} = ?$	Систему, состоящую из молота, изделия и наковальни, считаем замкнутой во время удара, когда силы ударного взаимодействия значительно превышают равнодействующую сил тяжести и силы реакции опоры. К такой системе можно применить закон сохранения импульса.

Во время удара изменяется только кинетическая энергия тел, поэтому энергия $E_{\text{деф}}$, затраченная на деформацию, равна разности значений механической энергии системы до и после удара

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}, \tag{1}$$

где u – общая скорость всех тел, входящих в систему, после неупругого удара. Эту скорость найдем на основе закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u\,, \qquad (2)$$

откуда

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\,. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (1) значение u из выражения (3), определим $E_{деф}$:

$$E_{деф} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (4)$$

Полезной считается энергия, затраченная на деформацию. Поэтому КПД равен

$$\eta = \frac{E_{деф}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = \frac{\frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (5)$$

Подставив числовые значения заданных величин в формулу (5), получим:

$$\eta = \frac{95}{95 + 5} = 0{,}95\,.$$

Из выражения (5) видно, что КПД удара тем больше, чем больше масса наковальни по сравнению с массой молота.

2.2.4. Закон сохранения импульса. Совместное применение законов сохранения импульса и механической энергии

1. Закон сохранения импульса

$$\vec{p}_с = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \mathrm{const}\,,$$

то есть суммарный импульс замкнутой системы тел $\vec{p}_c$ сохраняется постоянным.

2. Закон сохранения импульса для системы из двух тел

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2\,,$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости тел в короткий момент до взаимодействия; $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости тех же тел после взаимодействия.

3. Применение законов сохранения энергии и импульса к прямому центральному удару шаров:

а) неупругий удар

- закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

- скорость шаров после неупругого удара

$$u = \frac{m_1 v_1 \pm m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

знак “минус” соответствует движению шаров навстречу;

б) упругий удар

скорости упругих шаров после удара

$$u_1 = \frac{\pm 2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 \pm (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2},$$

где v_1 и v_2 – скорости шаров до удара, u_1 и u_2 – после удара.

Примеры решения задач

Задача 1

Человек массой 60 кг стоит на тележке массой 30 кг. Определить скорость тележки, если человек будет двигаться по ней с относительной скоростью 3 м/с. Трением между тележкой и дорогой пренебречь.

Дано:	Решение:
$m_1 = 60$ кг	Систему человек – тележка можно считать замкнутой, так как сила тяжести уравновешивается силой нормальной реакции тележки.
$m_2 = 30$ кг	
$v = 3$ м/с	
$u = ?$	До взаимодействия суммарный импульс человек – тележка был равен нулю.

При движении человека его скорость относительно Земли будет равна $(v - u)$, а импульс человека $m_1(v - u)$. Тележка получит импульс $-m_2u$.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось X в системе отсчета относительно Земли

$$m_1(v - u) - m_2u = 0.$$

Отсюда
$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Проведём вычисление u:

$$u = \frac{60 \cdot 3}{90} = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 2

Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, попадает в мешок с песком массой 4 кг, висящий на длинной нерастяжимой нити и застревает в нем. Найти высоту, на которую поднимется мешок после попадания в него пули.

Дано:
$m_1 = 10$ г $= 10^{-2}$ кг;
$v_1 = 400$ м/с;
$m_2 = 4$ кг;
$v_2 = 0$
$h = ?$

Решение:

Решение задачи основано на использовании двух законов: закона сохранения энергии и закона сохранения импульса.

После попадания пули мешок с песком движется вместе с застрявшей в нем пулей со скоростью u.

На основе закона сохранения энергии запишем:

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh. \qquad (1)$$

Для определения скорости совместного движения мешка и пули используем закон сохранения импульса. Запишем его в проекции на ось X:

$$m_1v_1 + 0 = (m_1 + m_2)u, \qquad (2)$$

откуда

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в формулу (1) и тогда высота h равна

$$h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g}. \tag{4}$$

Выполним вычисления по формуле (4)

$$h = \left(\frac{10^{-1}}{4{,}01}\right)^2 \cdot \frac{16 \cdot 10^4}{2 \cdot 9{,}81} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5{,}1 \text{ см}.$$

2.2.5. Динамика вращательного движения твёрдого тела

1. Основной закон (основное уравнение) динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

где $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно оси вращения; $\vec{L}$ – момент импульса (момент количества движения) твёрдого тела относительно оси вращения

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega},$$

где J – момент инерции твёрдого тела относительно той же оси вращения.

2. Основной закон динамики вращательного движения при J = const

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta},$$

где $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ – угловое ускорение тела.

3. Основной закон динамики вращательного движения для среднего значения момента силы

$$\vec{M} = J\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – изменение угловой скорости за промежуток времени Δt.

4. Момент силы относительно оси вращения:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl,$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы F); α – угол между направлением действия силы и радиус-вектором $\vec{r}$, проведённым от оси вращения к точке приложения силы.

5. Момент инерции материальной точки относительно заданной оси:

$$J = mr^2,$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние её до оси вращения.

6. Моменты инерции некоторых тел массой m относительно оси, проходящей через центр симметрии:

а) стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню

$$J = \frac{1}{12}ml^2;$$

б) обруча (тонкостенного цилиндра) радиуса R относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча (совпадающей с осью цилиндра)

$$J = \frac{1}{2} = mR^2;$$

в) диска радиуса R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска

$$J = \frac{1}{2}mR^2;$$

г) шара радиуса R относительно оси, проходящей через центр шара

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Примеры решения задач

Задача 1

К ободу однородного сплошного диска радиусом 0,5 м приложена постоянная касательная сила 100 Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $2\ \text{Н}\cdot\text{м}$. Определить массу диска, если известно, что его угловое ускорение постоянно и равно 16 рад/с^2.

Дано:	Решение:
$R = 0{,}5$ м $F = 100$ Н $M_{тр} = 2$ Н $\cdot$ м $\beta = 16$ рад/с^2	Для решения задачи используем основное уравнение динамики вращательного движения $$M = J \cdot \beta, \quad (1)$$ где М – результирующий момент внешних сил
$m = ?$	$$M = FR - M_{тр}, \quad (2)$$

где FR – вращающий момент; $M_{тр}$ – момент сил трения; β – угловое ускорение;

$$J = \frac{mR^2}{2} \quad (3)$$

момент инерции диска.

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1) и получим:

$$FR - M_{тр} = \frac{mR^2}{2} \cdot \beta, \quad (4)$$

откуда

$$m = \frac{2\left(FR - M_{тр}\right)}{\beta R^2}. \quad (5)$$

Проведём вычисления в формуле (5), подставив туда числовые значения. Получим:

$$m = \frac{2\left(10^2 \cdot 0{,}5 - 2\right)}{16 \cdot 0{,}25} = 24 \text{ кг.}$$

2.2.6. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела

1. Закон сохранения момента импульса в случае замкнутой системы ($\vec{M} = 0$ – момент внешних сил равен нулю)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \vec{\omega}_i = \text{const},$$

где L_i – момент импульса тела с номером i, входящим в состав системы.

2. В случае системы из двух тел закон сохранения момента импульса запишется в виде

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1^1\omega_1^1 + J_2^1\omega_2^1,$$

где J_1, J_2; ω_1 и ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1^1, J_2^1; ω_1^1 и ω_2^1 – те же величины после взаимодействия.

3. Работа постоянного момента силы, действующего на вращающееся тело,

$$A = M\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

4. Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела,

$$N = M \cdot \omega.$$

5. Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

6. Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{c}}^2}{2} + \frac{J_{\text{c}}\omega^2}{2},$$

где $\frac{mv_{\text{c}}^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения тела; v_c – скорость центра инерции тела; $\frac{J_{\text{c}}\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

7. Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение его кинетической энергии связаны соотношением

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Частота вращения маховика, момент инерции которого равен $120\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за π секунд. Считая трение в подшипниках постоянным, определить момент сил трения.

Дано:	Решение:
$n_1 = 240$ об/мин = 4 об/с $J = 120\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$ $t = \pi$ с $M = ?$	Изменение кинетической энергии маховика равно работе сил трения: $\Delta E_{\text{к}} = A$, т.е. $0 - \dfrac{J\omega_1^2}{2} = M \cdot \varphi, \qquad (1)$

где φ – угол поворота за промежуток времени t.

Из формулы (1) момент сил трения

$$M = \frac{J\omega_1^2}{2\varphi}. \qquad (2)$$

Для равнозамедленного движения маховика угол поворота φ:

$$\varphi = \omega_1 t - \frac{\beta t^2}{2}, \qquad (3)$$

где β – угловое ускорение.

По условию задачи тело останавливается через промежуток времени t, т.е.

$$\omega_1 - \beta t = 0,$$

откуда

$$\beta = \frac{\omega_1}{t}, \qquad (4)$$

где $\omega_1 = 2\pi n_1$.

Подставим выражение (4) в формулу (3), получим:

$$\varphi = \omega_1 t - \frac{\omega_1 t}{2} = \frac{\omega_1 t}{2}. \qquad (5)$$

После подстановки выражения для φ и ω_1 в формулу (2) момент сил трения M имеем

$$M = \frac{J\omega_1^2}{2\varphi} = \frac{J \cdot 4\pi^2 n_1^2 \cdot 2}{2 \cdot 2\pi n_1} = \frac{2\pi n_1 J}{t}, \text{ т.е.}$$

$$M_1 = \frac{2\pi n_1 J}{t}. \qquad (6)$$

Проведём вычисления в формуле (6)

$$M = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^2}{\pi} = 16 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 2

Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определите, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдёт ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы.

Дано:	Решение:
$m_1 = \frac{m}{3}$ $r_1 = \frac{R}{2}$	В системе человек–платформа сумма моментов сил тяжести и реакции опоры равна нулю. Тогда для решения задачи можно применить закон сохранения момента импульса:
$\frac{\omega_2}{\omega_1}$ – ?	$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (1)$$ отсюда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2}, \qquad (2)$$

где

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}R^2 = \frac{5}{6}mR^2, \tag{3}$$

$$J_2 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mR^2. \tag{4}$$

J_1 – момент инерции системы человек–платформа в начальном состоянии,
J_2 – в конечном состоянии.

Подставим выражения (3) и (4) в формулу (2) и получим:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5mR^2 \cdot 12}{6 \cdot 7mR^2} = \frac{10}{7} = 1{,}43.$$

2.2.7. Элементы специальной теории относительности

1. Длина тела l и длительность события Δt в различных системах отсчета

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2};$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где l – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело движется; l_0 – длина тела в системе отсчета, относительно которой тело покоится; $\beta = v/c$ – скорость тела, выраженная в долях скорости света в вакууме (c); Δt – длительность события, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело движется; Δt_0 – длительность события, измеренная по часам, движущимся вместе с телом.

2. Релятивистский импульс частицы

$$p = mv = m_0 c\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

3. Полная энергия частицы

$$E = mc^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $E = m_0 c^2$ – энергия покоя частицы; m_0 – масса покоя частицы; E – полная энергия частицы; $E = E_0 + E_К$; $E_К$ – кинетическая энергия свободной частицы.

4. Кинетическая энергия свободной частицы

$$E_К = E - E_0 = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

5. Связь между энергией и импульсом свободной частицы

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2,$$

или

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_К\left(E_К + 2E_0\right)}.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость составила 90 % скорости света.

Дано:

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

$q_p = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$v = 0{,}9$ с

$U = ?$

Решение:

Пройдя ускоряющую разность потенциалов *u*, протон приобретает кинетическую энергию

$$E_К = eU. \qquad (1)$$

Так как скорость частицы велика ($v = 0{,}9$ с), то кинетическую энергию частицы можно определить по релятивистской формуле

$$E_К = m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (2)$$

Приравняв правые части выражений (1) и (2), получим:

$$U = \frac{m_p c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right). \qquad (3)$$

Проведём вычисления, подставляя в формулу (3) числовые значения

$$U = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-0{,}81}}-1\right] = 1{,}22\cdot 10^{9} = 1{,}22 \text{ ГВ}.$$

2.3. Задание на контрольную работу № 1

101. Материальная точка движется под действием силы согласно уравнению $X = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3. Определить, в какой момент времени сила равна нулю.

102. Движение материальной точки задано уравнением $X = At + Bt^2$, где $A = 4$м/с; $B = -0{,}05$ м/с^2. Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент.

103. Прямолинейное движение материальной точки описывается уравнением $X = At + Bt^3$, где $A = 2{,}0$ м/с; $B = 0{,}04$ м/с^3. Определить величину средней скорости и среднего ускорения за первые 4 с движения.

104. Зависимость скорости тела от времени при прямолинейном движении дана уравнением $v = 0{,}3t^2$. Найти величину ускорения тела в момент времени 2 с и путь, пройденный телом за интервал времени от 0 до 2 с.

105. Прямолинейное движение двух материальных точек описывается уравнениями $X_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $X_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = 20$ м; $B_1 = -2$ м/с; $C_1 = 4$м/с^2; $A_2 = 2$ м; $B_2 = 2$ м/с; $C_2 = 0{,}5$ м/с^2. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Чему равны скорости и ускорения в этот момент времени?

106. Точка движется по окружности согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ рад; $B = 3$ рад/с; $C = 1$ рад/с^3. Определить угол поворота, угловую скорость и угловое ускорение точки в момент времени 1 с.

107. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с^2. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение точек на ободе колеса стало равным 0,136 м/с^2. Найти радиус колеса.

108. Колесо автомобиля вращается равнозамедленно. За 2 минуты оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин$^{-1}$. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

109. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.

110. По дуге окружности радиусом 10 м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равно 4,9 м/с^2, вектор полного ускорения составляет в этот момент угол 60° с вектором нормального ускорения. Определить мгновенную скорость и тангенциальное ускорение точки в этот момент.

111. Автомобиль массой 1,5 т мчится по шоссе со скоростью 150 км/ч. Если отпустить педаль газа, то в течение 5 секунд его скорость снизится до 120 км/ч. Чему равна средняя сила сопротивления? Какую часть она составляет от веса автомобиля?

112. К нити подвешена гиря. Если поднимать эту гирю с ускорением 2 м/с^2, то натяжение нити будет вдвое меньше того натяжения, при котором нить разрывается. С каким ускорением надо поднимать эту гирю, чтобы нить не разорвалась?

113. Тело массой 0,5 кг движется прямолинейно согласно уравнению $X = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 5$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3. Найти величину силы, действующей на тело в конце первой секунды движения.

114. Масса автомобиля 2 т. Во время движения на автомобиль действует сила трения, равная 0,1 его веса. Определить силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если он движется в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

115. Решить предыдущую задачу при условии, что автомобиль движется под гору с тем же ускорением.

116. Масса поезда равна 3000 т. Коэффициент трения равен 0,02. Какова должна быть сила тяги локомотива, чтобы поезд набрал скорость 60 км/ч через 2 минуты после начала движения?

117. Два груза массами 0,5 кг и 0,7 кг связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К первому грузу массой 0,5 кг приложена горизонтально направленная сила в 6 Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.

118. Вагон массой 11 т движется со скоростью 18 км/ч. Какова должна быть сила торможения, чтобы остановить вагон на расстоянии 250 м?

119. К нити подвешен груз массой 0,5 кг. Определить силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением 2 м/с^2.

120. Тело массой 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $S = A\sin\omega t$, где $A = 5\cdot 10^{-2}$ м, $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу, действующую на тело через 1/6 секунды после начала движения.

121. Какую работу совершает двигатель автомобиля массой 1,3 т, трогаясь с места, на первых 75 м пути, если это расстояние автомобиль проходит за 10 с? Коэффициент трения шин о дорогу равен 0,05.

122. Автомобиль массой 2 т движется в гору, уклон которой составляет 2 м на каждые 100 м. Определить: 1) работу, совершенную двигателем автомобиля на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолён за 5 минут.

123. На горизонтальном участке пути длиной 3 км скорость автомобиля увеличилась от 36 км/ч до 72 км/ч. Масса автомобиля 3 т, коэффициент трения 0,01. Чему равна работа, совершаемая двигателем автомобиля?

124. В пружинном ружье пружина сжата на 10 см. При взводе её сжали до 20 см. С какой скоростью вылетит из ружья стрела массой 30 г, если жесткость пружины 144 Н/м?

125. Две пружины жесткостью $3 \cdot 10^2$ Н/м и $5 \cdot 10^2$ Н/м соединены последовательно. Определить работу по растяжению обеих пружин, если вторая пружина растянута на 3 см.

126. Пружина жесткостью 10^4 Н/м сжата силой $2 \cdot 10^2$ Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину ещё на 1 см.

127. Две пружины жесткостью 0,5 кН/м и 1 кН/м скреплены последовательно. Определить потенциальную энергию данной системы при действии внешней силы 10 Н.

128. Определить работу, которую совершат силы гравитационного поля Земли, если тело массой 1 кг упадет на поверхность Земли с высоты, равной радиусу Земли.

129. Найти значение второй космической скорости для Луны, то есть скорости, которую нужно сообщить телу, чтобы удалить его с поверхности Луны за пределы гравитационного поля Луны (масса Луны $7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны $1.74 \cdot 10^6$ м).

130. Какова будет скорость ракеты на высоте, равной радиусу Земли, если ракета запущена с Земли с начальной скоростью 10 км/с? Сопротивление воздуха не учитывать.

131. Какую скорость приобретает ракета массой 0,6 кг, если продукты горения массой $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг вылетают из ее сопла со скоростью 800 м/с?

132. Мальчик стоит на абсолютно гладком льду и бросает мяч массой 0,5кг. С какой скоростью после броска начнет скользить мальчик, если горизонтальная составляющая скорости мяча равна 5 м/с, а масса мальчика 20 кг?

133. Вагон массой 3 т, движущийся по горизонтальному пути со скоростью 1,5 м/с, автоматически на ходу сцепляется с неподвижным вагоном массой 2 т. С какой скоростью движутся вагоны после сцепки?

134. Человек и тележка движутся навстречу друг другу. Масса тележки 32 кг, масса человека 64 кг. Скорость тележки 1,8 км/ч, скорость человека

5,4 км/ч. Человек прыгает на тележку. С какой скоростью и в каком направлении будет двигаться тележка с человеком?

135. Снаряд массой 20 кг, летящий горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в платформу с песком массой 10 т, движущуюся со скоростью 36 км/ч навстречу снаряду, и застревает в песке. Определить скорость, которую получит платформа.

136. С тележки, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью 3 м/с, в сторону, противоположную ее движению, прыгает человек, после чего скорость тележки изменилась и стала равной 4 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки 210 кг, масса человека 70 кг.

137. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка длиной 3 м, если масса человека 60 кг, масса лодки 120 кг? Сопротивление воды не учитывать.

138. При горизонтальном полете со скоростью 300 м/с снаряд массой 9 кг разорвался на две части. Большая часть массой 7 кг получила скорость 450 м/с в направлении полёта снаряда. Определить величину и направление скорости меньшей части снаряда.

139. С судна массой 750 т произведён выстрел из пушки в сторону, противоположную его движению, под углом 60^{o} к горизонту. На сколько изменилась скорость судна, если снаряд массой 30 кг вылетел со скоростью 1 км/с относительно судна?

140. Ракета, масса которой вместе с зарядом равна 250 г, взлетает вертикально вверх и достигает высоты 150 м. Определить скорость истечения газов из ракеты, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно. Масса заряда равна 50 г.

141. Теннисный мяч, летящий со скоростью 10 м/с, отброшен ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью 8 м/с. При этом его кинетическая энергия изменилась на 5 Дж. Найти изменение импульса мяча.

142. Движущийся шар массой 5 кг ударяется о неподвижный шар массой 0,5 кг. Кинетическая энергия обоих шаров непосредственно после удара равна 6 Дж. Определить кинетическую энергию первого шара до удара. Удар считать центральным, неупругим.

143. В деревянный шар массой 5 кг, подвешенный на нити, попадает горизонтально летящая пуля массой 5 г и застревает в нём. Найти скорость пули, если шар с застрявшей в нем пулей поднялся на высоту 10 см.

144. Два шара массами 2 кг и 3 кг, движущиеся по одной прямой навстречу друг другу со скоростями 8 м/с и 4 м/с, соответственно, неупруго сталкиваются и движутся после удара совместно. Определить работу деформации шаров после удара.

145. Шар массой 1,8 кг упруго сталкивается с покоящимся шаром большей массы. В результате прямого центрального упругого удара шар потерял 36 % своей кинетической энергии. Определить массу покоящегося шара.

146. Молотком, масса которого 1 кг, забивают в стену гвоздь массой 75 г. Определить КПД удара.

147. По небольшому куску металла, лежащему на наковальне, масса которой 300 кг, ударяет молот массой 8 кг. Определить КПД удара, считая удар неупругим. Полезной энергией считать энергию, затраченную на деформацию металла.

148. Из орудия массой 5 т вылетает снаряд массой 100 кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $7{,}5 \cdot 10^6$ Дж. Какую кинетическую энергию получает орудие вследствие отдачи?

149. Движущееся тело ударяется о неподвижное тело. Удар считать упругим и центральным. Чему должно равняться отношение масс тел, чтобы при ударе скорость первого тела уменьшилась в 1,5 раза?

150. Тело массой 990 г лежит на горизонтальной поверхности. В него попадает пуля массой 10 г и застревает в нем. Скорость пули направлена горизонтально и равна 700 м/с. Какой путь пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между телом и поверхностью равен 0,05?

151. Два различных груза подвешены на невесомой нити, перекинутой через блок радиусом 0,4 м, момент инерции которого равен $0{,}2\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$. Блок вращается с постоянным угловым ускорением 2,5 рад/с^2, причем момент сил трения равен 4 Н·м. Найти разность натяжений нити с обеих сторон блока.

152. Стержень массой 6 кг и длиной 40 см вращается вокруг оси, проходящей через его середину, перпендикулярно длине стержня. Угол поворота стержня изменяется во времени по закону $\varphi = 6 + 4t - t^2 + 3t^3$. Определить вращающий момент, действующий на стержень через 2 с после начала вращения.

153. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении уменьшило за 1 минуту частоту вращения от 300 до 180 об/мин. Момент инерции колеса равен $2\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$. Найти: 1) угловое ускорение колеса; 2) тормозящий момент; 3) работу сил торможения; 4) число оборотов, сделанных колесом за эту минуту.

154. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую угловую скорость 63 рад/с и предоставили их самим себе. Под действием сил трения один маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки 360 оборотов. У какого маховика тормозящий момент больше и во сколько раз?

155. На барабан диаметром 0,8 м намотан трос с закрепленным на конце грузом массой 3 кг. Вращаясь равноускоренно под действием силы натяжения троса, барабан за 4 секунды приобрел угловую скорость 16 рад/с. Определить момент инерции барабана.

156. К ободу диска радиусом 0,2 м приложена постоянная касательная сила 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения, равный $0{,}5\ \text{Н}\cdot\text{м}$. Найти массу диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением 100 рад/с^2.

157. Маховик в виде диска радиусом 40 см и массой 20 кг вращается с частотой 60 об/с. Определить угловое ускорение и частоту вращения маховика через 3,14 секунды после того, как к ободу маховика с силой 1 кН была прижата тормозная колодка, коэффициент трения которой о диск равен 0,4.

158. Шар массой 10 кг и радиусом 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Угол поворота изменяется во времени по закону $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5$ рад; $B = 4$ рад/с^2 ; $C = -1$ рад/с^3. Определить величину момента сил, приложенных к шару в момент времени 2 с.

159. Однородный диск массой 5 кг и радиусом 0,2 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени задана уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

160. Маховик массой 10 кг и радиусом 0,2 м соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без скольжения, постоянно и равно 14,7 Н. Какое число оборотов в секунду будет делать маховик через 10 секунд после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

161. Стержень длиной 1,2 м и массой 1 кг закреплен на вертикальной оси, проходящей через его центр перпендикулярно длине стрежня. В конец стержня попадает пуля массой 8 г, летящая горизонтально со скоростью 100 м/с, и застревает в стержне. С какой угловой скоростью начнет вращаться стержень?

162. На скамье Жуковского стоит человек и держит в вытянутых руках гантели массой 6 кг каждая. Длина руки человека 60 см. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 4 рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если он опустит руки с гантелями вниз вдоль оси вращения? Суммарный момент инерции человека и скамьи 5 $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Гантели считать материальными точками.

163. На краю горизонтальной платформы стоит человек массой 80 кг. Платформа представляет собой круглый однородный диск массой 160 кг, вращающийся вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, с частотой 6 об/мин. Сколько оборотов в минуту будет делать платформа, если человек перейдет от края платформы к её центру? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

164. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 4 рад/с. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи 5 $кг \cdot м^2$. Длина стержня 1,8 м, его масса 6 кг. Считать, что центр тяжести стержня с человеком находится на оси вращения скамьи.

165. Цилиндрический вал вращается вокруг оси, проходящей через центры оснований, с частотой 6 об/с. Диаметр вала 0,6 м, масса 200 кг. Определить, какое количество теплоты выделилось при трении, если из-за этого частота вращения уменьшилась в 2 раза.

166. К ободу диска массой 5 кг приложена постоянная касательная сила 2Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через 5 секунд после начала действия силы?

167. Маховик вращается по закону, который задан уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где φ – угол поворота, A = 2 рад, B = 32 рад/с, а C = – 4 рад/с^2. Найти среднюю мощность, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки. Момент инерции маховика 100 $кг \cdot м^2$.

168. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав 80 оборотов, остановился. Определить момент сил торможения.

169. С наклонной плоскости скатывается без скольжения диск. Высота наклонной плоскости 5 м. Найти скорость центра тяжести диска у основания наклонной плоскости, если его начальная скорость равна нулю.

170. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу 2 кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью 5 м/с. Во сколько раз кинетическая энергия обруча больше, чем у сплошного цилиндра?

171. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью v = 0,6c (c – скорость света в вакууме). Во сколько раз замедляется течение времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

172. При какой относительной скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25 %?

173. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости 0,995c (c – скорость света в вакууме) пролетают до распада путь в 6 км. Определить: 1) собственную длину пути, пройденную ими до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона.

174. Синхрофазотрон дает пучок протонов, кинетическая энергия которых равна 10^4 МэВ. Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

175. Найти скорость релятивистской частицы, если ее полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

176. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в 4 раза?

177. Протон влетает со скоростью v = 0,9c (c – скорость света в вакууме) в тормозящее электрическое поле Какую разность потенциалов он сможет преодолеть?

178. На сколько процентов изменится продольный размер протона после прохождения им ускоряющей разности потенциалов 1 МВ?

179. Частица движется со скоростью v = 0,5c (где c – скорость света в вакууме). Какую долю полной энергии составляет кинетическая энергия частицы?

180. Импульс релятивистской частицы равен m_0c (m_0 – масса покоя частицы, c – скорость света в вакууме). Под действием внешних сил импульс частицы увеличился в 2 раза. Во сколько раз при этом увеличилась кинетическая энергия частицы?

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2
“МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ”

3.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 2

В контрольную работу № 2 включены задачи на темы: уравнение состояния идеального газа; основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов, внутренняя энергия идеального газа; элементы классической статистики; первое начало термодинамики, теплоёмкость идеальных газов; циклы, КПД цикла, цикл Карно; энтропия термодинамических систем.

При решении задач необходимо выполнить общие методические рекомендации.

Задачи 201...220 относятся к теме “Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа”. Решение этих задач требует усвоения основных понятий: моль, молярная масса, параметры состояния (p, V, T), уравнение состояния. Следует выяснить, какой именно процесс рассматривается в конкретной задаче.

Для решения этих задач необходимо проработать материал по учебному пособию [1], с. 81...87.

Задачи 221...230 относятся к теме “Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов. Внутренняя энергия идеального газа”. Здесь необходимо усвоить понятие числа степеней свободы молекул газа, понимать, какое число степеней свободы описывает движение молекул одноатомного, двухатомного и многоатомных газов, усвоить смысл основного уравнения молекулярно-кинетической теории.

Предварительно проработайте этот материал по учебному пособию [1], с. 100...101.

Задачи 231...240 на тему “Элементы классической статистики” посвящены расчёту средней квадратичной, средней и наиболее вероятной скоростей, длины свободного пробега молекул. Для решения этих задач проработайте данную тему по учебному пособию [1], с. 87...93.

Задачи 241...260 относятся к теме “Первое начало термодинамики. Теплоёмкость идеальных газов”. В задачах 241...250 рассматривается применение первого начала термодинамики к изопроцессам и адиабатному процессу. Задачи 251...260 посвящены вычислению теплоёмкости идеального газа при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V.

Приступая к решению задач ознакомьтесь с данной темой по учебному пособию [1], с. 101...103; 105...109.

Задачи 261...270 посвящены изучению циклических процессов, вычислению работы цикла, КПД цикла, работы расширения и сжатия газа, определению КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно.

Перед решением задач проработайте эту тему по учебному пособию [1], с. 110-111; 115...118.

Вычислению изменения энтропии в различных процессах посвящено решение задач 271...280. Проработайте теоретический материал по теме “Энтропия” по учебному пособию [1], с. 111...114.

Перед выполнением контрольной работы полезно, ознакомиться с основными законами и формулами, а также справочными материалами, приведёнными в приложениях. После этого надо разобрать примеры решения типовых задач из данной методической разработки и уже затем приступать к решению контрольной работы.

Табл. 2

Вариант	Номера задач							
0	201	211	221	231	241	251	261	271
1	202	212	222	232	242	252	262	272
2	203	213	223	233	243	253	263	273
3	204	214	224	234	244	254	264	274
4	205	215	225	235	245	255	265	275
5	206	216	226	236	246	256	266	276
6	207	217	227	237	247	257	267	277
7	208	218	228	238	248	258	268	278
8	209	219	229	239	249	259	269	279
9	210	220	230	240	250	260	270	280

3.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

3.2.1. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

1. Уравнение Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где p – давление газа; V – его объем; T – термодинамическая температура; m – масса газа; μ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; R = 8,31 Дж/(моль К); m/μ – количество вещества.

2. Количество вещества (в моль)

$$\nu = \frac{N}{N_A} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{m}{\mu},$$

где N – число молекул в данной массе газа; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро (число молекул в одном моле).

3. Объединённый газовый закон

$$\frac{pV}{T} = \mathrm{const}.$$

В случае двух состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где p_1, V_1, T_1 – параметры, определяющие начальное состояние; p_2, V_2, T_2 – параметры, определяющие конечное состояние.

4. Уравнение состояния изотермического процесса

$$pV = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad T = \mathrm{const}$$

5. Уравнение состояния изобарного процесса (p = const)

$$\frac{V}{T} = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

6. Уравнение состояния изохорного процесса (V = const)

$$\frac{p}{T} = \text{const},$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

7. Плотность вещества

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

8. Закон Дальтона. Давление p смеси различных газов равно сумме парциальных давлений газов, составляющих смесь:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n,$$

Примеры решения задач

Задача 1

Определить молярную массу смеси газов, состоящую из 25 г кислорода и 75 г азота.

Дано:
$m_1 = 25$ г $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг
$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m_2 = 75$ г $= 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг
$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\mu_{см}$ - ?

Решение:

Молярная масса смеси

$$\mu_{см} = \frac{m_{см}}{\nu_{см}}, \tag{1}$$

где масса смеси газов

$$m_{см} = m_1 + m_2, \tag{2}$$

где $\nu_{см}$ – количество вещества смеси газов

$$\nu_{см} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим формулу для вычисления молярной массы смеси:

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}. \tag{4}$$

Проведём вычисления $\mu_{см}$, подставив числовые значения в формулу (4)

$$\mu_{см} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} + 7{,}5 \cdot 10^{-2}}{\dfrac{2{,}5 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{7{,}5 \cdot 10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 28{,}9 \cdot 10^{-2} \ \frac{кг}{моль}.$$

Задача 2

Азот массой 7 г находится под давлением 0,1 МПа и температуре 290 К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем 10 л. Определить: 1) объем газа до расширения; 2) температуру газа после расширения; плотность газа до и после расширения.

Дано:

$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

m = 7 г = $7 \cdot 10^{-3}$ кг

p = 0,1 МПа = 10^5 Па

T_1 = 290 К

V_2 = 10 л = 10^{-2} м^3

R = 8,31 Дж/(К $\cdot$ моль)

1) V_1 - ?

2) T_2 - ?

3) ρ_1 - ?

4) ρ_2 - ?

Решение:

Для решения задачи воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева. Запишем его для начального и конечного состояния газа:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \tag{1}$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \tag{2}$$

Из уравнения (1) можно определить

$$V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p}, \tag{3}$$

из уравнения (2)

$$V_2 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_2}{p}. \tag{4}$$

Из уравнения состояния изобарного процесса: $T_2 = \dfrac{V_2 \cdot T_1}{V_1}$.

Плотность газа до расширения

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}, \tag{5}$$

а после расширения

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}. \qquad (6)$$

Проведём вычисления требуемых величин по формулам (3), (4), (5) и (6), подставив в них числовые значения исходных данных, получим:

$$V_1 = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 290}{10^5} = 6{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

$$T_2 = \frac{10^{-2} \cdot 290}{6{,}02 \cdot 10^{-3}} = 481\,\text{К}.$$

$$\rho_1 = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{-3}} = 1{,}16 \text{ кг/м}^3.$$

$$\rho_1 = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}7 \text{ кг/м}^3.$$

3.2.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов. Внутренняя энергия идеального газа

1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{2}{3} n < \varepsilon_n > = \frac{2}{3} n \frac{m < v^2 >}{2},$$

где n – концентрация молекул газа; $<\varepsilon_n>$ – средняя энергия поступательного движения одной молекулы; m – масса молекулы; $<v^2>$ – среднее значение квадрата скорости.

2. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы

$$< \varepsilon_1 > = \frac{1}{2} kT.$$

3. Средняя кинетическая энергия молекулы

$$< \varepsilon > = \frac{i}{2} kT,$$

где $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; i – число степеней свободы молекулы.

Для одноатомного газа $i = 3$; для двухатомного газа $i = 5$; для трёх и более атомных газов $i = 6$.

4. Внутренняя энергия произвольной массы идеального газа:

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT .$$

5. Зависимость давления газа от концентрации молекул и абсолютной температуры

$$p = nkT .$$

Примеры решения задач

Задача 1

Давление в сосуде с водородом равно 0,266 МПа. При этом средняя квадратичная скорость молекул равна 1400 м/с. Определить число молекул водорода в 1 см^3.

Дано:

$V = 1$ см^3 = 10^{-6} м^3

$p = 0{,}266$ МПа $= 0{,}266 \cdot 10^6$ Па

$< v^2 > = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с

$\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$N = ?$

Решение:

Зависимость давления от концентрации n и абсолютной температуры T имеет вид

$$p = nkT = \frac{N}{V}kT , \qquad (1)$$

отсюда число молекул N в данном объеме

$$N = \frac{pV}{kT} . \qquad (2)$$

Неизвестную температуру T определим, используя выражение для средней кинетической энергии поступательного движения молекулы

$$< \varepsilon_n > = \frac{3}{2}kT . \qquad (3)$$

Приравняем $< \varepsilon_n >$ выражению для кинетической энергии молекулы

$$\frac{3}{2}kT = \frac{m_{\text{М}} < v >^2}{2} = \frac{\mu}{N_{\text{А}}} \cdot \frac{< v >^2}{2} , \qquad (4)$$

где масса молекулы водорода $m_{\text{М}} = \frac{\mu}{N_{\text{А}}}$.

Из формулы (4) выразим T:

$$T = \frac{\mu < v >^2 N_{\text{А}}}{2k} = \frac{\mu < v >^2}{3R}, \qquad (5)$$

Подставив выражение (5) в формулу (2) и учитывая, что $\frac{R}{k} = N_A$, получим:

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{pV \cdot 3R}{k\mu < v >^2} = \frac{3pV \cdot N_{\text{А}}}{\mu < v >^2}.$$

Проведем вычисления:

$$N = \frac{3 \cdot 0{,}266 \cdot 10^6 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^6} = 1{,}22 \cdot 10^{20} \text{ молекул.}$$

Задача 2

Кислород массой 1 кг находится при температуре 320 К. Определить 1) внутреннюю энергию газа; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считать идеальным.

Дано:	Решение:
m = 1 кг T = 320 К $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Выражение для внутренней энергии идеального газа имеет вид
1) U = ? 2) $<E_{\text{вр}}>$ = ?	$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT, \qquad (1)$$

Кислород – двухатомный газ, для него полное число степеней свободы его молекул i = 5, из них 3 степени свободы приходятся на поступательное, а две – на вращательное движение

$$< E_{\text{вр}} > = 2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT, \qquad (2)$$

в данной массе газа содержится N молекул, где

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_{\text{А}} . \qquad (3)$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех N молекул

$$< E_{\text{вр}} >= kT \cdot \frac{m}{\mu} \cdot N_{\text{А}} = \frac{m}{\mu} RT . \qquad (4)$$

Проведем вычисления внутренней энергии по формуле (1), подставив в неё исходные данные:

$$U = \frac{1}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{2} = 2{,}08 \cdot 10^{5} \text{ Дж} = 208 \text{ кДж}.$$

Проведем вычисление $<E_{\text{вр}}>$ по формуле (4):

$$< E_{\text{вр}} >= \frac{1}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{2} = 0{,}831 \cdot 10^{5} \text{ Дж} = 83{,}1 \text{ кДж}.$$

3.2.3. Элементы классической статистики

1. Скорости молекул:

- средняя квадратичная

$$< v_{кв} >= \sqrt{\frac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} ,$$

- средняя

$$< v >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} ,$$

- наиболее вероятная

$$< v_B >= \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} ,$$

где m_1 – масса молекулы, равная

$$m_1 = \frac{\mu}{N_{\text{А}}} .$$

2. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы.

3. Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$< z > = \sqrt{2}\pi d^2 n < v >,$$

где $< v >$ – средняя скорость молекул.

4. Барометрическая формула, выражающая зависимость давления идеального газа от высоты h над поверхностью Земли,

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

где p – давление газа на высоте h, p_0 – давление газа на высоте $h = 0$, T – абсолютная температура воздуха на высоте $h = 0$.

Примеры решения задач

Задача 1

При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считать постоянной.

Дано:

$T = 300$ К

$<l> = 0{,}1$ мкм $= 10^{-7}$ м

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$p_1 = 0{,}1 p$

$<z_1>$?

Решение:

Число столкновений молекул за 1 с можно определить по формуле

$$z = \frac{< v >}{< l >}, \tag{1}$$

где $< v >$ – средняя скорость молекул

$$< v > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \tag{2}$$

$<l>$ – средняя длина свободного пробега.

Так как $< l >= \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, а давление $p = nkT$, то длина свободного пробега молекул пропорциональна давлению.

Тогда $\dfrac{< z_1 >}{< z >} = \dfrac{p_1}{p}$, т.е.

$$< z_1 >=< z > \cdot \frac{p_1}{p}. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) выражение для $<z>$, получим:

$$< z_1 >= \frac{< v >}{< l >} \cdot \frac{p_1}{p} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_1}{< l > p}. \qquad (4)$$

Проведем вычисления, подставив в формулу (4) числовые значения

$$< z_1 >= \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{0{,}1}{10^{-7}} = 4{,}45 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 2

На сколько отличается атмосферное давление на вершине горы высотой 830 м от давления у подножия горы, если у подножия оно равно 100 кПа, а температура воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

Дано:

h = 830 м

p_0 = 100 кПа = 10^5 Па

T = 290 К

ΔP - ?

Решение:

Зависимость давления газа от высоты выражается барометрической формулой

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \qquad (1)$$

где p – атмосферное давление на вершине горы; p_0 – давление у ее подножия; h – высота горы; T – термодинамическая температура.

Находим искомое изменение давления

$$\Delta p = p - p_0 = p_0 \left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \right).$$

Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Тейлора и ограничимся первыми членами разложения, так как показатель экспоненты $\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) < 1$.

Получим:

$$\Delta p \approx p_0 \frac{\mu g h}{RT}.$$

Произведем расчет, используя табличные данные:

$$\Delta p = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 830}{8{,}31 \cdot 290} \approx 10^4 \text{ Па}.$$

3.2.4. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость идеального газа

1. Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное системе; ΔU – изменение внутренней энергии системы; A – работа.

2. Молярная теплоемкость газа при постоянном объёме

$$C_{V\mu} = \frac{i}{2} R.$$

3. Молярная теплоёмкость газа при постоянном давлении

$$C_{P\mu} = \frac{i+2}{2} R,$$

где i – число степеней свободы молекулы газа.

4. Связь между удельной (c) и молярной C_μ теплоемкостями

$$C_\mu = c\mu.$$

5. Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{\mu} C_{V\mu} T.$$

6. Работа расширения газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

7. Работа расширения газа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T\,.$$

8. Работа расширения в адиабатном процессе

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_{V\mu}\Delta T \qquad \text{или} \qquad A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\cdot\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

9. Уравнение состояния адиабатного процесса (уравнение Пуассона).

$$PV^{\gamma} = \mathrm{const}\,.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Кислород массой 2 кг занимает объем 1 м^3 и находится под давлением 0,2 МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и теплоту, переданную газу. Построить график процесса.

Дано:

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 2$ кг

$V_1 = 1$ м^3

$P_1 = 0{,}2$ МПа $= 2\cdot 10^5$ Па

1) $P = \mathrm{const}$, $V_2 = 3$ м^3

2) $V_2 = \mathrm{const}$, $P_3 = 0{,}5$ МПа $= 5\cdot 10^5$ Па

ΔU - ? A - ? Q - ?

Решение:

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} m\Delta T, \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); $\Delta T = T_3 - T_1$ – разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Начальную и конечную температуру газа найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$pV = \left(\frac{m}{\mu}\right)RT,$$

откуда

$$T = \frac{pV\mu}{mR}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m}{\mu} \cdot R\Delta T.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю

$$A_2 = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом,

$$A = A_1 + A_2 = A_1.$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q_1, переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A

$$Q = \Delta U + A.$$

Произведем вычисления, учитывая, что для кислорода $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} K = 385 \text{ K};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} K = 1155 \text{ K};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} K = 2887 \text{ K};$$

$$A_1 = \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0{,}4 \text{ МДж};$$

$$A = A_1 = 0{,}4 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{8{,}31 \cdot 2(2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 3{,}24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}24 \text{ МДж};$$

$$Q = (3{,}24 + 0{,}4) \text{ МДж} = 3{,}64 \text{ МДж}.$$

График процесса приведен на рис 1.

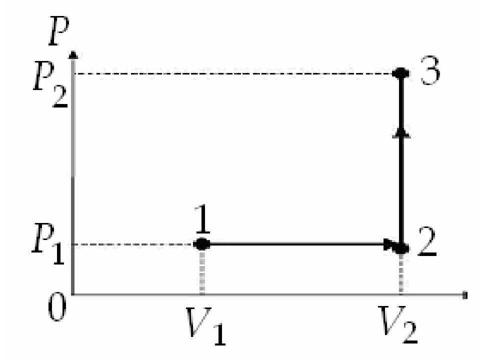


Рис.1

Задача 2

Чему равны удельные теплоемкости c_V и c_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна 1,43 кг/м^3?

Дано:	Решение:
$\rho = 1{,}43$ кг/м^3 $i = 5$ $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па $T = 273$ К	Удельные теплоемкости равны $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_P = \frac{(i+2)}{2}\frac{R}{\mu}$. Из уравнения Клапейрона-Менделеева находим $\mu = \frac{mRT}{pV} = \rho\frac{RT}{p}$,
c_p - ? c_V - ?	

так как плотность газа $\rho = m / V$.

Подставляя молярную массу в формулы для теплоемкости, имеем

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{p}{\rho T} \quad \text{и} \quad c_P = \frac{(i+2)}{2}\frac{p}{\rho T}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что для двухатомного газа число степеней свободы $i = 5$. Так как при нормальных условиях давление $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па и $T = 273$ K, находим

$$c_V = \frac{5}{2}\frac{1{,}01 \cdot 10^5}{1{,}43 \cdot 273} = 650 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}, \; c_P = \frac{(5+2)}{2}\frac{1{,}01 \cdot 10^5}{1{,}43 \cdot 273} = 905 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}.$$

3.2.5. Круговые процессы. КПД цикла. Цикл Карно

1. Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где A – работа, совершенная в цикле, $A = Q_1 - Q_2$; Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от теплоотдатчика; Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом теплоприемнику.

2. КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура теплоотдачика; T_2 – температура теплоприемника.

3. Так как $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$, то $\dfrac{Q_1}{T_1} = \dfrac{Q_2}{T_2}$, то есть приведенная теплота $\left(\dfrac{Q}{T}\right)$ для любых изотермических переходов между двумя адиабатами есть величина постоянная.

Примеры решения задач

Задача 1

Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от теплоотдатчика количество теплоты 5,5 кДж и совершил за цикл работу 1,1 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур теплоотдатчика и теплоприёмника.

Дано:

Q_1 = 5,5 кДж = $5{,}5 \cdot 10^3$ Дж

A = 1,1 кДж = $1{,}1 \cdot 10^3$ Дж

$\eta = ?$;

$\dfrac{T_1}{T_2} = ?$

Решение:

Зная общее определение КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

вычислим КПД цикла

$$\eta = \frac{1{,}1}{5{,}5} = 0{,}2.$$

КПД цикла Карно

$$\eta_К = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

так как газ совершает цикл Карно, то

$$\eta = \eta_К = 0{,}2\,;\ 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}2, \text{ тогда } \frac{T_1}{T_2} = 1{,}25,$$

то есть температура теплоотдатчика в 1,25 раз выше температуры теплоприёмника.

3.2.6. Энтропия

1. Изменение энтропии системы при переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad \Delta S_{12} = \sum_i \Delta S_i\,,$$

где ΔS_i – изменение энтропии в промежуточных процессах.

Примеры решения задач

Задача 1

Найти изменение энтропии при превращении 10 г льда при –20 ^{o}C в пар при 100 ^{o}C.

Дано:	Решение:
m = 10 г = 10^{-2} кг t_1 = –20 ^{o}C t_3 = 100 ^{o}C	Изменение энтропии определяется формулой $$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$
ΔS - ?	где S_1 и S_2 – значения энтропии в первом и во втором состоянии, соответственно.

В данном случае общее изменение энтропии ΔS складывается из изменений ее в отдельных процессах:

а) Нагревание массы m льда от температуры T_1 до температуры T_2, при этом

$$dQ = mc_1\, dT,$$

где c_1 – удельная теплоемкость льда.

Тогда изменение энтропии в этом процессе

$$\Delta S_1 = mc_1 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right),$$

здесь T_2 = 273 К – температура таяния льда.

в) Плавление массы m льда при температуре T_2

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2},$$

где λ – удельная теплота плавления.

с) Нагревание массы m воды от T_2 до T_3. Аналогично пункту а) получаем

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right),$$

где c_2 – удельная теплоемкость воды.

d) Испарение массы m воды при температуре T_3

$$\Delta S_4 = \int \frac{dQ}{T_3} = \frac{rm}{T_3},$$

где r – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left[c_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + \frac{r}{T_3}\right].$$

Произведем вычисления, используя табличные данные

$c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/кг$\cdot$K, T_1 = 253 К, T_2 = 273 К, T_3 = 373 К, $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж / кг, $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$К), $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж /кг и получим ΔS = 88 Дж /К.

3.3. Задание на контрольную работу №2

201. Какова плотность воздуха в цилиндре дизельного двигателя в конце такта сжатия, если температура 677 ^oC, а давление 5,05 МПа? Молярную массу воздуха считать равной $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

202. Определить концентрацию молекул кислорода, находящегося в сосуде объемом 2 л. Количество вещества равно 0,2 моль.

203. На сколько изменится давление воздуха в шине автомобиля при повышении температуры до 30 ^oC, если при температуре 10 ^oC давление равно допустимому значению 238 кПа?

204. Сосуд объемом 10 л содержит гелий под давлением 1 МПа и при температуре 300 К.После того, как из баллона выпущено 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до 290 К.Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.

205. В сосуде ёмкостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества; 2) массу азота; 3) концентрацию его молекул в сосуде.

206. В дизеле в начале такта сжатия температура воздуха 40 ^oC, а давление 78,4 кПа. Во время сжатия объем уменьшается в 15 раз, а давление возрастает до 3,5 Мпа. Определить температуру воздуха в конце такта сжатия.

207. Автомобильная шина накачана воздухом до давления 0,3 МПа при температуре 7 ^oC. Какое количество воздуха необходимо выпустить из камеры, чтобы давление не изменилось при повышении температуры до 37 ^oC? Объем камеры 50 л.

208. Альпинист при каждом вдохе поглощает 5 г воздуха, находящегося при нормальных условиях. Найти объем воздуха, который должен вдыхать за то же время альпинист в горах, где давление равно 79,8 кПа, а температура – 13 ^oC.

209. Какое число баллонов водорода емкостью 50 л при температуре 27 ^oC и давлении 4 МПа потребуется для заполнения аэростата объемом 10^3 $м^3$, если при температуре 7 ^oC давление в нём должно быть 100 кПа?

210. Кислород массой 10 г находится под давлением 0,3 МПа при температуре 10 °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем 10 л. Определить: 1) объём газа до расширения; 2) температуру газа после расширения; 3) плотность газа до расширения; 4) плотность газа после расширения.

211. Баллон, содержащий 1 кг азота, при испытании взорвался при температуре 350 °С. Какое количество водорода можно хранить в этом баллоне при 20 °С, имея пятикратный запас прочности?

212. Два сосуда, содержащие одинаковые массы одного газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление 5 кПа, во втором 8 кПа. Какое давление установится после открытия крана, если температура останется неизменной?

213. Баллон ёмкостью 0,3 л содержит смесь водорода и гелия при температуре 300 К и давлении 0,82 МПа. Масса смеси $2{,}4\cdot 10^{-2}$ кг. Определить массы водорода и гелия.

214. Определить плотность смеси, состоящей из 4 г гелия и 28 г азота при температуре 27 °С и давлении 1 МПа.

215. До какого давления накачан футбольный мяч ёмкостью 3 л, если при этом сделано 40 качаний поршневого насоса. За каждое качание насос захватывает из атмосферы 150 см^3 воздуха. Мяч вначале был пустой. Атмосферное давление 0,1 МПа.

216. Определить молярную массу газа, свойства которого соответствуют свойствам смеси 160 г кислорода и 120 г азота.

217. В сосуде объемом 20 л при температуре 27 °С находится смесь кислорода массой 6 г и углекислого газа массой 66 г. Определить давление смеси.

218. Определить плотность смеси 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре 7 °С и давлении 100 кПа.

219. Какой объем занимает смесь азота массой 1 кг и гелия массой 1 кг при нормальных условиях?

220. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением 1 МПа. Считая, что масса кислорода составляет 20 % от массы смеси, определить парциальные давления отдельных газов.

221. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением 0,2 Па. Концентрация молекул газа равна 10^{13} см$^{-3}$.

222. Сколько молекул кислорода содержится в сосуде объемом 10 см^3, если при тепловом хаотическом движении со средней квадратичной скоростью 400 м/с они производят на стенке сосуда давление 1 кПа?

223. Газ занимает объем 1 л под давлением 2 кПа. Определить кинетическую энергию поступательного движения всех молекул, находящихся в данном объеме.

224. 1 кг двухатомного газа находится под давлением 80 кПа и имеет плотность 4 кг/м^3. Найти энергию теплового движения молекул газа в этих условиях.

225. Определить энергию теплового движения молекул аммиака NH_3, находящихся в баллоне объёмом $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м^3 при давлении 2,57 кПа. Какую часть от этой энергии составляет средняя энергия вращательного движения молекул? Молекулы считать жесткими.

226. Определить среднюю энергию вращательного движения одной молекулы двухатомного газа, если суммарная кинетическая энергия молекул одного киломоля этого газа равна 3,01 МДж.

227. Баллон с водородом двигался со скоростью 50 м/с и внезапно остановился. На сколько градусов нагреется при этом газ?

228. Определить внутреннюю энергию 1 кг воздуха в шине автомобиля при допустимом давлении $5{,}5 \cdot 10^5$ Па и плотности воздуха в шине 4 кг/м^3. Воздух считать двухатомным газом.

229. Средняя энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объёмом $2 \cdot 10^{-2}$ м^3 равна $5{,}0 \cdot 10^3$ Дж, а средняя квадратичная скорость его молекул $2{,}0 \cdot 10^3$ м/с. Определить: 1) количество молекул в балло-

не; 2) давление, под которым находится азот.

230. Какое число молекул двухатомного газа занимает объем 10 см^3 при давлении 5,32 кПа и температуре 27 $^{\circ}$С? Какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?

231. Определить давление в камере сгорания дизельного двигателя объёмом 0,08 л в конце сжатия, если средняя квадратичная скорость молекул воздуха в это время 1 км/с, а масса воздуха в камере сгорания 1,2 г.

232. Определить среднюю скорость молекул газа, если известно, что их средняя квадратичная скорость равна 1 км/с.

233. Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м^3.

234. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 500 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа?

235. Определить среднюю длину свободного пробега молекул водорода при температуре 27 $^{\circ}$С и давлении $3 \cdot 10^{-8}$ Па (эффективный диаметр молекулы водорода принять равным $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м).

236. Баллон емкостью 10 л содержит азот массой 1 г. Определить среднюю длину свободного пробега молекул (эффективный диаметр молекулы азота принять равным $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ м).

237. Определить среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося при температуре 0 $^{\circ}$С, если среднее число столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно $3{,}7 \cdot 10^{9}$.

238. На сколько изменится атмосферное давление при подъеме на высоту 100 м над уровнем моря, если давление на уровне моря равно 100 кПа. Считать, что температура равна 290 К и не изменяется с высотой.

239. Найти время свободного пробега молекул водорода при давлении 0,1 Па и температуре 100 К (эффективный диаметр молекулы водорода принять равным $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м).

240. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха не изменяется с высотой и равна 10 ^{o}C.

241. При адиабатическом расширении азот массой 10 г совершает работу, равную 321 Дж. На сколько уменьшилась внутренняя энергия и понизилась температура азота, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме 742 Дж/$(\text{кг} \cdot \text{K})$.

242. В закрытом сосуде объемом 2 л находится азот, плотность которого 1,4 кг/м^3. Какое количество теплоты надо сообщить азоту, чтобы нагреть его на 100 К? На сколько увеличится внутренняя энергия азота?

243. Азот массой 1 кг занимает при температуре 300 К объем 0,5 м^3. В результате адиабатического сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определить: 1) конечный объем газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа.

244. Во сколько раз увеличится объем 0,4 моля водорода при изотермическом расширении, если при этом газ получил количество теплоты 800 Дж? Температура водорода 27 ^{o}C. Чему равна работа расширения?

245. Водород массой 6,5 г, находящийся при температуре 27 ^{o}C, расширяется вдвое при постоянном давлении за счет притока извне тепла. Найти работу расширения газа, изменение внутренней энергии газа и количество теплоты, сообщенное газу.

246. Определить количество тепла, выделяющегося при изотермическом сжатии 7 г азота от нормального давления 0,1 МПа до 0,5 МПа. Температура азота 25 ^{o}C.

247. Определить работу изотермического расширения при сгорании одного моля смеси в цилиндре двигателя автомашины. Степень сжатия 6,5; температура сгорания смеси 2000 К. Смесь считать идеальным газом.

248. Кислород массой 10 г находится под давлением 0,3 МПа при температуре 10 ^{o}C. После нагревания при постоянном давлении объем газа равен 10 л. Найти количество теплоты, полученное газом, изменение его внутренней

энергии и работу, совершенную газом.

249. Закрытый баллон емкостью 10 л, содержащий кислород при давлении 2 МПа и температуре 7 ^oC, нагревается до температуры 27 ^oC. Какое количество теплоты передано газу? На сколько увеличилась внутренняя энергия газа?

250. Воздух адиабатно сжимается от давления 0,1 МПа до 3,5 МПа. Начальная температура воздуха 40 ^oC. Найти температуру в конце такта сжатия.

251. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме неона и водорода, принимая эти газы за идеальные. Молярная масса неона $20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

252. Определить удельную теплоёмкость некоторого одноатомного газа при постоянном объёме, если плотность этого газа при нормальных условиях 0,795 кг/м^3.

253. Трехатомный газ под давлением 240 кПа и при температуре 20 ^oC занимает объем 10 л. Определить теплоемкость этого газа при постоянном давлении.

254. При температуре 207 ^oC масса 2,5 кг некоторого газа занимает объем 0,3 м^3. Определить давление газа, если удельная теплоемкость при постоянном давлении равна 519 Дж/(кг $\cdot$ K) и $\gamma = C_p/C_V = 1{,}67$.

255. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей $\gamma = C_p/C_V = 1{,}33$.

256. Известны удельные теплоемкости газа: c_V = 649 Дж/(кг $\cdot$ K) и c_p = 912 Дж/(кг $\cdot$ K). Найти молярную массу газа и число степеней свободы его молекул.

257. Молярная масса газа равна $4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Отношение теплоемкостей $C_p/C_V = 1{,}67$. Вычислить удельные теплоемкости газа.

258. Определить удельные теплоёмкости для смеси газов, содержащих гелий массой 1 г и водород массой 4 г.

259. Некоторый газ находится при температуре 350 ^oK в баллоне емкостью 100 л под давлением 200 кПа. Теплоемкость этого газа при постоянном

объеме 140 Дж/К. Определить отношение теплоемкостей C_p/C_V.

260. Вычислить теплоемкость (при постоянном объеме) газа, заключенного в сосуд емкостью 20 л при нормальных условиях. Газ одноатомный.

261. В топке паровой турбины расходуется 0,35 кг дизельного топлива на 1 $кВт \cdot ч$ энергии. Температура поступающего в турбину пара 250 ^oC, температура теплоприемника 30 ^oC. Вычислить КПД турбины. Найти КПД идеальной тепловой машины, работающей при тех же температурных условиях. Удельная теплота сгорания топлива 42 Мдж/кг.

262. В ходе цикла Карно рабочее вещество получает от теплоотдатчика количество теплоты 300 кДж. Температуры теплоотдатчика и теплоприемника равны соответственно 480 К и 280 К. Определить термический КПД цикла и работу, совершаемую рабочим веществом за цикл.

263. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно, термический КПД которого 40 %. Температура теплоприемника 0 ^oC. Найти температуру теплоотдатчика и работу изотермического сжатия, если работа изотермического расширения 8 Дж.

264. Идеальной тепловой машиной за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, за цикл совершается работа 300 Дж. Определить термический КПД машины и температуру теплоотдатчика, если температура теплоприемника 280 К.

265. У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура теплоотдатчика в 1,6 раза больше температуры теплоприемника. За цикл машина совершает работу 12 кДж. Найти термический КПД цикла и работу изотермического сжатия рабочего вещества за цикл.

266. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты, полученного от теплоотдатчика, отдаёт теплоприёмнику. Количество теплоты, полученное от теплоотдатчика, равно 5 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) работу цикла.

267. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,4. Определить работу изотермического сжатия, если работа изотерми-

ческого расширения составляет 400 Дж.

268. Температура теплоотдатчика идеальной тепловой машины 480 К, а ее КПД составляет 40 %. Чему равна температура теплоприемника? Какую долю количества теплоты, полученного от теплоотдатчика, газ отдает теплоприемнику?

269. Идеальная тепловая машина за цикл совершает работу 4 кДж, отдавая при этом теплоприёмнику 6,4 кДж теплоты. Определить КПД цикла, а также температуру теплоотдатчика, если температура теплоприемника 280 К.

270. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от теплоотдатчика количество теплоты 5,5 кДж и совершил работу 1,1 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур теплоотдатчика и теплоприёмника.

271. Воду массой 1 г нагрели от температуры 10 ^{o}C до температуры 100 ^{o}C, при которой она вся превратилась в пар. Найти приращение энтропии системы.

272. Кусок льда массой 200 г, взятый при температуре -10 ^{o}C, был нагрет до 0 ^{o}C и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры 10 ^{o}C. Определить изменение энтропии в ходе указанных процессов.

273. Кислород массой 10 г нагревается от температуры 50 ^{o}C до температуры 150 ^{o}C. Найти приращение энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

274. Во сколько раз при изотермическом процессе надо увеличить объем газа, чтобы его энтропия увеличилась на 23 Дж/К? Количество газа равно 4 моль.

275. В результате изохорического нагревания воздуха массой 1 г давление газа увеличилось в 2 раза. Определить изменение энтропии газа.

276. Смешано 5 кг воды при температуре 280 К и 8 кг воды при температуре 350 К. Найти: 1) температуру смеси; 2) изменение энтропии, происходящее при смешивании.

277. Объем кислорода массой 2 кг увеличился в 5 раз один раз в изотермическом процессе, другой раз – в адиабатическом процессе. Найти изменение энтропии в каждом из указанных процессов.

278. Идеальный газ количеством 1 моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем изохорно охладили так, что его давление уменьшилось в 2 раза. Определить приращение энтропии в ходе данных процессов.

279. Какова ёмкость системы охлаждения двигателя автомобиля, если при повышении температуры воды от 27 ^{o}C до 97 ^{o}C её энтропия увеличивается на 8,3 кДж/К.

280. При изотермическом процессе объем некоторого идеального газа увеличился в 2 раза, а энтропия возросла на 4,6 Дж/К. Какое количество газа участвовало в указанном процессе?

4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 “ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”

4.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 3

В контрольную работу № 3 включены задачи по темам: электростатика, постоянный электрический ток, магнитостатика, электромагнитная индукция.

Перед выполнением контрольной работы необходимо проработать материал соответствующих разделов рекомендованной литературы, внимательно ознакомиться с основными законами и формулами, а также справочными материалами, приведенными в приложениях данной учебно-методической разработки. После этого надо разобрать примеры решения типовых задач из данной учебно-методической разработки и решить ряд задач из задачников по физике [4].

Задачи 301 … 330 относятся к теме “Электростатика”. Для решения этих задач необходимо изучить тему “Электростатика” по учебному пособию [1], с. 148…180.

Тема “Электростатика” представлена задачами по расчету простейших электрических полей с помощью принципа суперпозиции, на определение напряженности и разности потенциалов, электроемкости и энергии поля конденсаторов и задачами, в которых рассматривается движение заряженных частиц в электрическом поле.

Если электростатическое поле создано несколькими зарядами, то для нахождения напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ результирующего поля используют принцип суперпозиции. Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей $\vec{E}_i$, созданным каждым зарядом в отдельности. При решении задачи делают чертёж и для данной точки поля указывают направление векторов $\vec{E}_i$, векторы складывают по правилу сложения векторов. При расчёте напряженности знак заряда не учитывают.

Потенциал результирующего поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей φ_i, созданных отдельными зарядами. Потенциал – скалярная величина, поэтому при расчёте потенциала знак заряда учитывается.

Если заряженное тело не является точечным зарядом, сферой, бесконечно длинным цилиндром, бесконечной плоскостью, то тело разбивается на бесконечно малые элементы (в случае нити или стержня элемент *dr*), которые можно считать точечными зарядами и по формуле для точечного заряда найти $d\vec{E}$ и $d\varphi$. Напряженность и потенциал находят интегрированием (интегрирование проводится по всей длине нити)

$$\vec{E} = \int_{(l)} d\vec{E} \text{ и } \varphi = \int_{(l)} d\varphi .$$

Силы взаимодействия точечных зарядов можно найти либо по закону Кулона и затем сложить силы по правилу сложения векторов, либо, используя соотношение $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Один из зарядов q_0 можно рассматривать как заряд, находящийся в электрическом поле, созданном другими зарядами.

Если в условии задачи не указывается среда, в которой находятся заряды, то подразумевается вакуум $(\varepsilon = 1)$ или воздух, диэлектрическая проницаемость которого близка к единице.

Для расчётов электрических полей при наличии диэлектрика вводят вспомогательный вектор – вектор электрической индукции (электрического смещения), который определяется по формуле $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, где $\vec{P}$ – поляризованность (вектор поляризации). Для однородных изотропных диэлектриков $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$. В этом случае, если диэлектрики заполняют всё пространство или объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями (сюда относятся диэлектрики в плоских, цилиндрических и сферических конденсаторах), вектор $\vec{D}$ во всех точках поля как внутри, так и вне диэлектрика останется без изменения. Вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля внутри диэлектрика уменьшится в ε раз.

Задачи 331 … 340 относятся к теме “Постоянный электрический ток”. Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебникам [1], с. 180…194. Следует учитывать, что на участке цепи, не содержащей ЭДС, напряжение U и разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ совпадают. Если в цепи имеется батарея из n одинаковых источников тока, то в законе Ома для замкнутой цепи надо использовать ЭДС батареи и внутреннее сопротивление батареи.

В задачах на определение работы и мощности тока следует иметь в виду, что полезная мощность выделяется во внешней цепи (на сопротивлении нагрузки), а полная мощность во всей цепи (на сопротивлении нагрузки и внутреннем сопротивлении источника); закон Джоуля-Ленца в форме $Q = I^2Rt$ справедлив только для постоянного тока

Задачи 341 … 370 относятся к теме “Магнитостатика”. Для решения этих задач необходимо ознакомиться с конкретными физическими понятиями, законами и формулами данной темы по учебному пособию [1], с. 204…212, 217…223, 212…216.

По теме “Магнитостатика” в контрольную работу включены задачи по расчету магнитной индукции и напряженности простейших магнитных полей с помощью принципа суперпозиции, задачи по расчету индукции магнитного поля с применением закона Био-Савара-Лапласа, задачи, в которых рассматривается действие магнитного поля на движущиеся заряды и токи (определение силы Ампера, силы Лоренца, вращающего момента, вычисление работы сил поля при перемещении проводника и контура с током).

Магнитное поле, созданное несколькими проводниками с током, рассчитывается с помощью принципа суперпозиции полей. Для решения задачи необходимо сделать чертёж, изобразить силовые линии магнитного поля для каждого проводника так, чтобы они проходили через точку, в которой надо определить индукцию. Векторы $\vec{B}_i$ направлены по касательным к силовым линиям. Затем необходимо сложить векторы $\vec{B}_i$ по правилу сложения векторов.

Задачи 371 … 380 относятся к теме “Электромагнитная индукция”. Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебному пособию [1], с. 223…235.

В явлении электромагнитной индукции магнитный поток и потокосцепление через контур могут изменяться при движении контура в неоднородном магнитном поле, при вращении контура, при изменении площади контура, а также при изменении во времени магнитного поля.

Если в задаче требуется найти разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле, то надо иметь в виду, что искомая разность потенциалов численно равна ЭДС, индуцируемой в проводнике.

Табл. 3

Вариант	Номера задач							
0	301	311	321	331	341	351	361	371
1	302	312	322	332	342	352	362	372
2	303	313	323	333	343	353	363	373
3	304	314	324	334	344	354	364	374
4	305	315	325	335	345	355	365	375
5	306	316	326	336	346	356	366	376
6	307	317	327	337	347	357	367	377
7	308	318	328	338	348	358	368	378
8	309	319	329	339	349	359	369	379
9	310	320	330	340	350	360	370	380

4.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

4.2.1.Электростатика

1. Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где F – модуль силы взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2; r – расстояние между зарядами; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

2. Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad \varphi = \frac{W}{q},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точечный положительный (пробный) заряд q, помещенный в данную точку поля; W – потенциальная энергия этого заряда.

3. Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой зарядов (принцип суперпозиции электрических полей),

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i; \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

где $\vec{E}_i, \varphi_i$ – напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого i-м зарядом.

4. Напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

5. Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда (заряд единицы площади).

6. Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью или бесконечно длинным цилиндром (вне цилиндра),

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|\tau|}{\varepsilon r},$$

где τ – линейная плотность заряда, r – расстояние от нити или от оси цилиндра до точки, в которой вычисляется напряженность. Внутри цилиндра $E = 0$.

7. Напряженность и потенциал поля, создаваемого металлической заряженной сферой радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы $(r<R)$

$$E = 0; \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R};$$

б) вне сферы $(r \geq R)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon r^2}; \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r},$$

где q – заряд сферы.

8. Связь потенциала с напряженностью в случае однородного поля

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d,$$

где d – расстояние между точками с потенциалами φ_1 и φ_2.

9. Работа сил поля по перемещению точечного заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку поля с потенциалом φ_2

$$A = q\,(\varphi_1 - \varphi_2).$$

10. Поток напряженности $\vec{E}$ и электрического смещения (индукции) $\vec{D}$:

а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$N_E = \int\limits_{(S)} E_n dS; \quad N_D = \int\limits_{(S)} D_n dS,$$

$E_n = E\cos\alpha$ и $D_n = D\cos\alpha$ – проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на направление нормали $\vec{n}$; α – угол между векторами $\vec{E}$ или $\vec{D}$ и нормалью $\vec{n}$.

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное поле,

$$N_E = ES\cos\alpha, \qquad N_D = DS\cos\alpha.$$

Поток векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность (теорема Гаусса):

$$\int\limits_{(S)} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m} q_i; \quad \int\limits_{(S)} D_n dS = \sum_{i=1}^{m} q_i,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{m} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; m – число зарядов.

Электрическое поле рассматривается в вакууме.

11. Связь электрического смещения (индукции) $\vec{D}$ с напряженностью $\vec{E}$ в случае изотропных диэлектриков

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

12. Электроемкость

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad C = \frac{q}{U},$$

где φ – потенциал уединённого проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю); $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

13. Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь одной пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами.

15. Электроемкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)},$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух концентрических сфер; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между сферами.

16. Электроемкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2 / R_1)},$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух коаксиальных цилиндров; l - высота цилиндров; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между цилиндрами.

17. Электроемкость параллельно и последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i; \qquad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

где n – число конденсаторов в батарее.

18. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2}, \qquad W = \frac{CU^2}{2}, \qquad W = \frac{q^2}{2C}.$$

19. Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad w = \frac{ED}{2}.$$

Для однородного электрического поля $w = W/V$, где V – объем.

Примеры решения задач

Задача 1

Два точечных заряда 2 нКл и –1 нКл находятся в воздухе на расстоянии 5 см друг от друга. Определить напряженность и потенциал электростатического поля в точке, удаленной от первого заряда на расстояние 6 см и от второго заряда на 4 см.

Дано:

q_1 = 2 нКл = $2 \cdot 10^{-9}$ Кл

q_2 = –1 нКл = -10^{-9} Кл

$\varepsilon = 1$; $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф

d = 5 см = $5 \cdot 10^{-2}$ м

r_1 = 6 см = $6 \cdot 10^{-2}$ м

r_2 = 4 см = $4 \cdot 10^{-2}$ м

E - ? φ - ?

Решение:

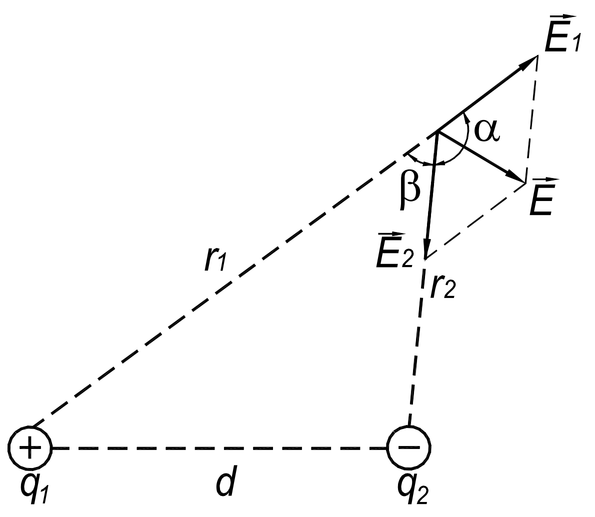


Рис. 1

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Напряженность результирующего поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Напряженности полей, создаваемых в воздухе ($\varepsilon = 1$) зарядами q_1 и q_2:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1^2}, \qquad (1)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{\varepsilon r_2^2}. \qquad (2)$$

Направления векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ указаны на рис.1. Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов:

$$E = (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha)^{1/2},$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Из рис. 1 видно, что $\beta = \pi - \alpha$. Тогда $\cos\beta = -\cos\alpha$.

Следовательно,

$$E = (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta)^{1/2}. \qquad (3)$$

Из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d по теореме косинусов находим

$$\cos\beta = (r_1^2 + r_2^2 - d^2)/(2r_1r_2). \qquad (4)$$

Произведя вычисления по формулам (1), (2), (4), получим:

$$E_1 = 9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-9}}{\left(6\cdot10^{-2}\right)^2} = 5\cdot10^3 \text{ В/м},$$

$$E_2 = 9\cdot10^9\frac{10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2} = 5{,}62\cdot10^3 \text{ В/м}, \qquad \cos\beta = \frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4} = 0{,}565.$$

При вычислении E_2 знак заряда q_2 опущен, так как знак минус определяет направление вектора $\vec{E}_2$, а направление $\vec{E}_2$ было учтено при его графическом изображении (см. рис.1).

Напряженность результирующего поля будет равна

$$E = \sqrt{(5\cdot10^3)^2 + (5{,}62\cdot10^3)^2 - 2\cdot5\cdot10^3\cdot5{,}62\cdot10^3\cdot0{,}565} = 4{,}97\cdot10^3 \text{ В/м}.$$

По принципу суперпозиции потенциал результирующего поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2, равен алгебраической сумме потенциалов φ_1 и φ_2, т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\varepsilon r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right). \qquad (5)$$

Произведя вычисления, получим:

$$\varphi = 9\cdot 10^{9}\left(\frac{2\cdot 10^{-9}}{6\cdot 10^{-2}} + \frac{-10^{-9}}{4\cdot 10^{-2}}\right) = 75 \text{ В}.$$

Задача 2

Тонкий прямой стержень длиной 10 см равномерно заряжен с линейной плотностью заряда 1 нКл/см. На продолжении оси стержня, на расстоянии 20 см от ближайшего конца, находится точечный заряд 20 нКл. Определить силу взаимодействия стержня и точечного заряда.

Дано:

q_1 = 20 нКл = $2\cdot 10^{-8}$ Кл

τ = 1нКл/см = 10^{-7} Кл/м

l = 10 см = 0,1м

a = 20 см = 0,2 м

$\varepsilon = 1$

F = ?

Решение:

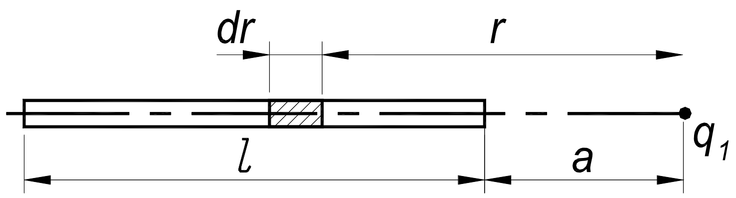


Рис. 2

Так как заряженный стержень не является точечным зарядом, то закон Кулона непосредственно применить нельзя. Разобьём стержень на малые элементы и выделим на стержне (рис. 2) элемент dr с зарядом $dq = \tau dr$. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 dq}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \tau dr}{\varepsilon r^2},$$

Так как силы $d\vec{F}$ взаимодействия заряда q_1 и зарядов dq на разных элементах стержня направлены в одну сторону, то геометрическую сумму сил можно заменить алгебраической. Силу взаимодействия точечного заряда и стержня найдём интегрированием выражения (1):

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\tau}{\varepsilon}\int\limits_a^{a+l}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{q_1\tau l}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(a+l)a}.$$

Проверим, даёт ли расчётная формула единицу силы. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений

$$\frac{[q_1][\tau][l]}{[\varepsilon_0][a+l][a]}=\frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл/м}\cdot 1\text{м}}{1\Phi/\text{м}\cdot 1\text{м}\cdot 1\text{м}}=\frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл}}{1\Phi\cdot 1\text{м}}=$$

$$=\frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл}}{1\text{Кл/В}\cdot 1\text{м}}=1\text{Кл}\cdot 1\text{В/м}=1\text{Н}.$$

Произведем вычисления с учётом того, что $1/4\pi\varepsilon_0=9\cdot 10^9$ м/Ф:

$$F=9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}1}{1\cdot(0{,}2+0{,}1)\cdot 0{,}2}=3\cdot 10^{-5}\,\text{Н}.$$

Задача 3

Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда 20 нКл/м. Определить работу сил поля по перемещению точечного заряда 25 нКл из точки, находящейся на расстоянии 1 см, в точку, находящуюся на расстоянии 3 см от поверхности цилиндра в средней его части.

Дано:

R = 1 см = $1\cdot 10^{-2}$ м

τ = 20 нКл/м = $2\cdot 10^{-8}$ Кл/м

q = 25 нКл = $2{,}5\cdot 10^{-8}$ Кл

a_1 = 1 см = $1\cdot 10^{-2}$ м

a_2 = 3 см = $3\cdot 10^{-2}$ м

$\varepsilon = 1$

A - ?

Решение:

Работа сил поля по перемещению заряда равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, можно записать:

$$E=-\frac{d\varphi}{dr}\qquad\text{или}\qquad d\varphi=-Edr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов между двумя точками, отстоящими на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr, \qquad (1)$$

где $r_1 = a_1 + R$, $r_2 = a_2 + R$.

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (3)$$

Таким образом,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R+a_2}{R+a_1}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу работы. Для этого в правую часть вместо символов величин подставим их единицы

$$\frac{[q][\tau]}{[\varepsilon_0]} = \frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл}/\text{м}}{1\text{Ф}/\text{м}} = \frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл}}{1\text{Ф}} = \frac{1\text{Кл}\cdot 1\text{Кл}}{1\text{Кл}/\text{В}} = 1\text{Кл}\cdot 1\text{В} = 1\ \text{Дж}$$

Произведем вычисления с учетом того, что $1/2\pi\varepsilon_0 = 2\cdot 9\cdot 10^9\,\text{м}/\text{Ф}$. Так как величины r_2 и r_1 входят в формулу (3) в виде отношения, их можно выразить в сантиметрах.

Таким образом,

$$A = 2{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-8}\ln\frac{1+3}{1+1} = 6{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Задача 4

Электрическое поле создано тонкой бесконечно длинной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда 20 нКл/м. На расстоянии 40 см от нити находится плоская круглая площадка радиусом 1 см. Определить поток вектора напряженности через площадку, если её плоскость составляет угол 30° с линией напряженности, проходящей через середину площадки.

Дано:	Решение:
τ = 20 нКл/м = $2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м	
a = 40 см = 0,4 м	
R = 1 см = 10^{-2} м	
$\beta = 30^o$	
N_E - ?	

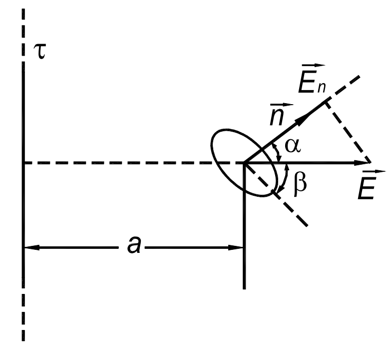


Рис. 3

Поле, создаваемое нитью (очень тонким цилиндром), является неоднородным, так как модуль напряженности изменяется от точки к точке:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r}. \qquad (1)$$

Поэтому поток вектора $\vec{E}$ равен

$$N_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos\alpha dS,$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$ (рис. 3). Так как линейные размеры площадки малы по сравнению с расстоянием до нити (a>>R), то E в пределах площадки меняется незначительно. Тогда

$$N_E = E\cos\alpha\int_S dS = ES\cos\alpha,$$

где $S = \pi R^2$.

$$N_E = E\,S\cos\alpha = E\pi R^2\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из рис. 3 следует, что $\cos\alpha = \cos(\pi/2 - \beta) = \sin\beta$.С учетом этого формула (2) примет вид

$$N_E = E\pi R^2 \sin\beta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon a}\pi R^2 \sin\beta.$$

Произведя вычисления с учетом того, что $1/2\pi\varepsilon_0 = 2\cdot 9\cdot 10^9$ м/Ф, получим:

$$N_E = 2\cdot 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-8}}{1\cdot 0{,}4}\,0{,}5\cdot 3{,}14\cdot(10^{=2})^2 = 0{,}14\ \text{В}\cdot\text{м}$$

Задача 5

Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 600 В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной 5 мм и эбонита толщиной 3 мм. Площадь каждой пластины 200 см^2. Определить: а) напряженность поля, индукцию и падение потенциала в каждом слое; б) электроемкость конденсатора.

Дано:

$U = 600$ В

$\varepsilon_1 = 7$ *(стекло)*

$d_1 = 5$ мм $= 5\cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon_2 = 3$ *(эбонит)*

$d_2 = 3$ мм $= 3\cdot 10^{-3}$ м

$S = 200$ см$^2 = 2\cdot 10^{-2}$ м^2

E - ? D - ?

U_1 - ? U_2 - ?

C - ?

Решение:

При переходе через границу раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ в обоих слоях диэлектриков имеет одинаковые значения $D_{1n} = D_{2n}$.

В конденсаторе силовые линии вектора $\vec{D}$ перпендикулярны к границе раздела диэлектриков, следовательно, $D_{1n} = D_1$ и $D_{2n} = D_2$. Поэтому

$$D_1 = D_2 = D. \qquad (1)$$

Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, и сокращая на ε_0, из равенства (1) получим:

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \qquad (2)$$

где E_1 и E_2 – напряженности поля в первом и во втором слоях диэлектриков; ε_1 и ε_2 – диэлектрические проницаемости слоев.

Разность потенциалов между пластинами конденсатора, очевидно, равна сумме напряжений на слоях диэлектриков:

$$U = U_1 + U_2. \tag{3}$$

В пределах каждого слоя поле однородное, поэтому $U_1 = E_1 d_1$ и $U_2 = E_2 d_2$. С учетом этого равенство (3) примет вид

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2. \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (2) и (4), получим:

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}, \qquad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$E_1 = \frac{3 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$
$$E_2 = \frac{7 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 11{,}7 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$U_1 = E_1 d_1 = 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 250 \text{ В}; \qquad U_2 = E_2 d_2 = 11{,}7 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 350 \text{ В};$$

$$D = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10^4 = 3{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Определим электроемкость конденсатора

$$C = q / U, \tag{5}$$

где $q = \sigma S$ – заряд каждой пластины конденсатора. Учитывая, что поверхностная плотность зарядов σ на пластинах конденсатора численно равна модулю электрического смещения, т. е. $\sigma = D$, получим:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{DS}{U}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу электроемкости. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений

$$\frac{[D][S]}{[U]} = \frac{\text{Кл/м}^2 \cdot 1\text{м}^2}{1\text{В}} = 1 \text{ Ф}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$C = \frac{3{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{600} = 103 \cdot 10^{-12}\,\Phi = 103 \text{ пФ}.$$

4.2.2. Постоянный электрический ток

1. Сила и плотность постоянного тока

$$I = q/t, \quad j = I/S,$$

где q – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t; S – площадь поперечного сечения.

2. Закон Ома

а) $I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \dfrac{U}{R}$ (для участка цепи, не содержащего ЭДС),

где I – сила постоянного тока; $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов на концах участка цепи; R – сопротивление участка цепи;

б) $I = \dfrac{\varepsilon}{R + R_0}$ (для замкнутой цепи),

где ε – ЭДС источника тока; R – сопротивление внешней цепи; R_0 – внутреннее сопротивление источника тока.

3. Сопротивление R и проводимость G однородного цилиндрического проводника постоянного диаметра

$$R = \rho\frac{l}{S}, \quad G = \gamma\frac{S}{l},$$

где ρ – удельное сопротивление проводника; $\gamma = 1/\rho$ – удельная электропроводность; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

4. Работа и мощность тока

$$A = IUt, \quad P = IU.$$

5. Закон Джоуля-Ленца

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt,$$

для постоянного тока

$$Q = I^2 R t,$$

где Q – количество теплоты, выделяющейся на участке цепи сопротивлением R за время t, когда по проводнику течет ток силой I.

7. Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \gamma\vec{E},$$

где $j = I/S$ – плотность тока в проводнике; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля в проводнике.

8. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2,$$

где $w = \dfrac{Q}{Vt}$ – удельная тепловая мощность тока (количество теплоты, выделяющейся в единице объема проводника за единицу времени).

Примеры решения задач

Задача 1

ЭДС батареи аккумуляторов 12 В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, 5 А. Определить максимальную мощность, которая может выделиться во внешней цепи.

Дано:	Решение:
$\mathcal{E} = 12$ В	По закону Ома для полной цепи
$I_{max} = 5$ А	$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R}, \quad (1)$$
$P_{max} = ?$	

где R_0 – внутреннее сопротивление аккумулятора; R – сопротивление внешней цепи (сопротивление нагрузки).

Максимальная сила тока будет при коротком замыкании ($R = 0$)

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R_0}. \quad (2)$$

Из формулы (2) находим внутреннее сопротивление:

$$R_0 = \frac{\mathcal{E}}{I_{\max}}. \tag{3}$$

Мощность, которая выделяется во внешней цепи (полезная мощность),

$$P = I^2 R. \tag{4}$$

С учетом закона Ома (1) получим:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_0)^2}. \tag{5}$$

Исследуя функцию (5) на максимум, найдем сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (R - R_0)}{(R + R_0)^3} = 0. \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что

$$R = R_0. \tag{7}$$

Подставив (7) в формулу (5), найдем выражение для максимальной мощности:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_0}. \tag{8}$$

С учетом формулы (3) получим:

$$P_{\max} = \frac{I_{\max}}{4}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$P_{\max} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15 \text{ Вт}.$$

Задача 2

Сила тока в проводнике сопротивлением 20 Ом равномерно нарастает от 0 до 4 А в течение 2 с. Определить количество теплоты, выделившейся в проводнике за первые полторы секунды.

Дано:	Решение:
R = 20 Ом I_1 = 0 А, I_2 = 4 А $t_1 = 0$, t_2 = 2 с, t_3 = 1,5 с	Согласно закону Джоуля-Ленца, тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении R, равна $$P = I^2 R \,.$$
Q - ?	Количество тепла dQ, выделяющегося за время dt на сопротивлении R, равно

$$dQ = Pdt = I^2 R dt \,. \qquad (1)$$

По условию задачи сила тока равномерно нарастает, т. е. является линейной функцией времени

$$I = at + b \,. \qquad (2)$$

В начальный момент $t_1 = 0$ ток I_1 равен нулю, поэтому в уравнении (2) имеем $b = 0$. Таким образом,

$$I = at \,. \qquad (3)$$

Коэффициент "a" найдем из условия, что $I_2 = 4$ A при $t_2 = 2$ с:

$$I_2 = at_2 \,.$$

Откуда получаем

$$a = \frac{I_2}{t_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ А/с}.$$

Подставляя в формулу (1) выражение (3) и интегрируя по времени от 0 до t_3, найдем количество выделившегося тепла:

$$Q = \int_{t_1}^{t_3} I^2 R dt = a^2 R \int_{t_1}^{t_3} t^2 dt = \frac{a^2 R}{3}\left(t_3^{\,3} - t_1^{\,3}\right). \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) значения входящих в нее параметров, получим:

$$Q = \frac{2^2 \cdot 20}{3}\left(1{,}5^3 - 0\right) = 90 \text{ Дж}.$$

4.2.3. Магнитостатика

1. Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

где μ – относительная магнитная проницаемость изотропной среды (в вакууме $\mu = 1$); μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

2. Магнитная индукция в центре кругового витка с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где R – радиус кругового витка; I – сила тока.

3. Магнитная индукция поля длинного прямого проводника с током

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

где r_0 – расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током, (рис. 4)

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

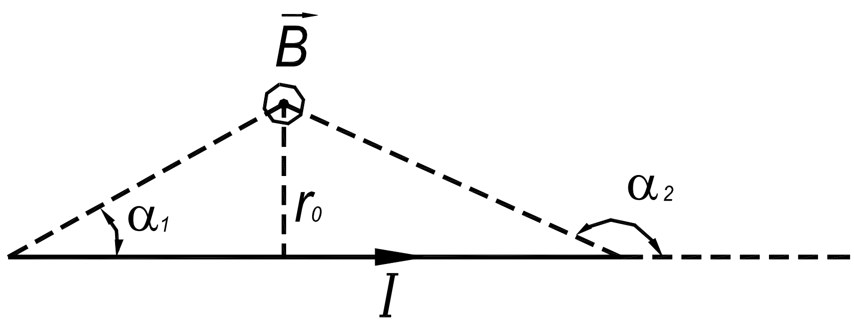


Рис. 4

Обозначения ясны из рисунка. Направление вектора $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка "к нам".

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется индукция: $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \cos\alpha$. Тогда

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha.$$

4. Магнитная индукция поля внутри длинного соленоида с током:

а) в центре соленоида $B = \mu\mu_0 In$,

б) на краю соленоида $B = \mu\mu_0 In/2$,

где $n = N/l$ – число витков, приходящееся на единицу длины (N – число витков соленоида, l – длина соленоида).

5. Закон Ампера

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right] \quad \text{или} \quad dF = IdlB\sin\alpha,$$

где α – угол между направлением тока в элементе проводника и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В случае однородного магнитного поля и прямого отрезка проводника длиной l модуль силы Ампера

$$F = IBl\sin\alpha.$$

6. Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из двух длинных прямолинейных параллельных проводов с токами I_1 и I_2,

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

где d – расстояние между проводами.

7. Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура.

8. Вращающий момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m\vec{B}\right] \text{ или } M = p_m B\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

9. Сила (сила Лоренца), действующая на движущийся заряд в магнитном поле,

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right] \text{ или } F = |q| vB \sin\alpha,$$

где $\vec{v}$ – скорость заряженной частицы; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

10. Магнитный поток:

а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = \int_{(S)} B_n dS,$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу поверхности dS; $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали $\vec{n}$; α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное магнитное поле,

$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha.$$

11. Потокосцепление катушки индуктивности (полный магнитный поток)

$$\Psi = N\Phi,$$

где N – число витков катушки; Φ – магнитный поток через один виток.

Формула верна для соленоида и тороида, когда N витков плотно прилегают друг к другу.

12. Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях.

Примеры решения задач

Задача 1

По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи силой 15 и 10 А. Расстояние между проводами 10 см.

Определить магнитную индукцию в точке A (рис.5), удаленной от первого провода на расстояние r_1 = 10 см и от второго провода на расстояние r_2 = 15 см.

Дано:	Решение:
I_1 = 15 А	
I_2 = 10 А	
μ =1	
d = 10 см	
r_1 = 10 см = 0,1 м	
r_2 = 15 см = 0,1 м	
B - ?	

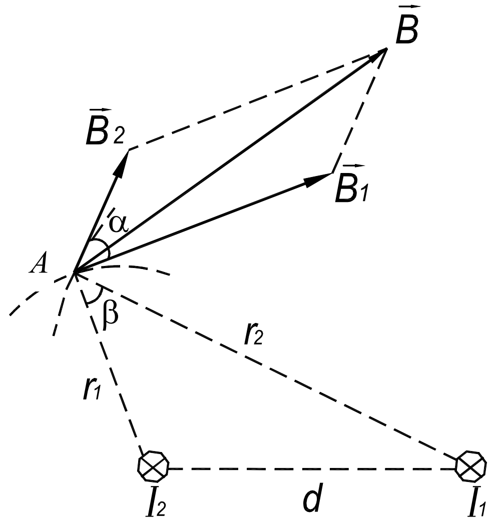


Рис. 5

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей магнитная индукция $\vec{B}$ в точке A равна сумме векторов магнитных индукций полей $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$, созданных каждым током в отдельности

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \tag{1}$$

где $B_1 = \mu\mu_0 I_1/(2\pi r_1)$ и $B_2 = \mu\mu_0 I_2/(2\pi r_2)$. На рис. 5 проводники с токами I_1 и I_2 перпендикулярны плоскости чертежа (токи направлены от наблюдателя). Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ изображены на рисунке так, что их направление связано с направлением соответствующих токов правилом правого винта. Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в точке A направлены по касательной к силовым линиям.

Модуль вектора $\vec{B}$ на основании теоремы косинусов равен

$$B = (B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha)^{1/2}, \tag{2}$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Из рис. 5 видно, что углы α и β равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d по теореме косинусов находим $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Вычислим отдельно

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{10^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 15} \approx 0{,}75$$

Подставляя выражения для B_1 и B_2 в формулу (2) и вынося $\mu\mu_0/(2\pi)$ за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{2I_1I_2}{r_1r_2}\cos\alpha}\ .$$

Произведем вычисления

$$B = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{15^2}{(10^{-1})^2} + \frac{10^2}{(1{,}5 \cdot 10^{-1})^2} + \frac{2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 0{,}75}{10^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-1}}} = 4{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Задача 2

По проводнику, согнутому в виде прямоугольника со сторонами 8 см и 12 см, течет ток силой 5 А. Определить магнитную индукцию в точке пересечения диагоналей прямоугольника.

Дано:

a = 8 см = $8 \cdot 10^{-2}$ м

b = 12 см = $1{,}2 \cdot 10^{-1}$ м

I = 5 А;

$\mu = 1$

B = ?

Решение:

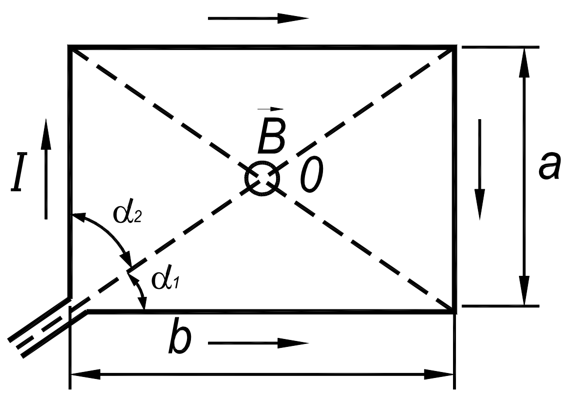


Рис. 6

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4, \tag{1}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 – магнитные индукции полей, создаваемых токами, протекающими по каждой стороне прямоугольника (рис. 6).

В точке 0 пересечения диагоналей все векторы индукции $\vec{B}_i$ направлены перпендикулярно плоскости прямоугольника. Кроме того, из соображений симметрии следует, что $B_1 = B_3$ и $B_2 = B_4$. Поэтому векторное равенство (1) заменим скалярным

$$B = 2B_1 + 2B_2, \qquad (2)$$

где B_1 и B_2 – индукции магнитных полей, создаваемых соответственно токами, текущими по проводникам со сторонами длиной b и a.

Используя формулу для магнитной индукции поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током,

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_0}\cos\alpha,$$

получим:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a/2}\cos\alpha_1, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{b/2}\cos\alpha_2. \qquad (3)$$

Из рис. 6 следует, что

$$\cos\alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

Подставив формулы (3) и (4) в равенство (2), после алгебраических преобразований получим:

$$B = \frac{2\mu\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) = \frac{2\mu\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу магнитной индукции. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений:

$$\frac{\mu_0[\sqrt{a^2}][I]}{[a][b]} = \frac{1\text{Гн/м}\cdot 1\text{м}\cdot 1\text{А}}{1\text{м}\cdot 1\text{м}} = \frac{1\text{Гн}\cdot 1\text{А}}{1\text{м}^2} = \frac{1\text{Вб}}{1\text{м}^2} = \frac{1\text{Тл}\cdot 1\text{м}^2}{1\text{м}^2} = 1\text{Тл};$$

$$B=\frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 5\sqrt{\left(8\cdot 10^{-2}\right)^2+\left(1{,}2\cdot 10^{-1}\right)^2}}{3{,}14\cdot 8\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-1}}=6\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}=60\ \text{мкТл}.$$

Задача 3

Виток радиусом 3 см, по которому течёт ток силой 5 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 20 мТл. Определить работу, совершаемую внешними силами при повороте витка на угол 90^o вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Считать, что при повороте витка сила тока в нем поддерживается постоянной.

Дано:	Решение:
R = 3 см = $3\cdot 10^{-2}$м	На виток с током, помещённый в магнитное поле, действует вращающий момент
I = 5 А = const	$M=p_m B\sin\alpha$,
B = 20 мТл = $2\cdot 10^{-2}$Тл	где $p_m=IS=I\pi R^2$ – магнитный момент витка;
$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$	α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.
A = ?	

В начальном положении согласно условию задачи виток свободно установился в магнитном поле, следовательно, $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ совпадают по направлению, т. е. $\alpha=0$ и $M=0$. Чтобы повернуть виток на некоторый угол α, внешние силы должны совершить работу против момента сил Ампера, так как он стремится возвратить виток в исходное положение. Так как момент сил переменный и зависит от угла поворота α, то

$$dA=Md\alpha \text{ или } dA=p_m B\sin\alpha\, d\alpha=I\pi R^2 B\sin\alpha\, d\alpha.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдём работу, совершаемую при повороте витка на конечный угол:

$$A=I\pi R^2 B\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha=I\pi\cdot R^2 B\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right). \qquad (1)$$

Так как $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\pi/2$, то

$$A=I\pi R^2 B. \qquad (2)$$

Проверим, даёт ли расчётная формула единицу работы. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений

$$[I][R^2][B] = 1\text{А} \cdot 1\text{м}^2 \cdot 1\text{Тл} = 1\text{А} \cdot 1\text{м}^2 \frac{1\text{Н}}{1\text{м/с} \cdot 1\text{Кл}} =$$

$$= 1\text{Н} \cdot 1\text{м} \frac{1\text{А} \cdot 1\text{с}}{1\text{Кл}} = 1\text{Н} \cdot 1\text{м} = 1\text{Дж}.$$

Произведём вычисления

$$A = 5 \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2{,}83 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Задачу можно решить и другим способом. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна

$$A = I(\varPhi_1 - \varPhi_2),$$

где $\varPhi_1$ – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения, $\varPhi_2$ – то же после перемещения.

С учётом того, что в однородном магнитном поле $\varPhi = BS\cos\alpha$, получим $\varPhi_1 = BS\cos 0 = BS$ и $\varPhi_2 = BS\cos 90^0 = 0$. Следовательно, $A = IBS = IB\pi R^2$, что совпадает с (2).

Задача 4

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 200 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией 5 мТл. Вектор скорости направлен под углом 60° к линиям индукции (рис.7). Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

Дано:	Решение:
$U = 200$ В	
$B = 5$мТл $= 5 \cdot 10^{-3}$ Тл	
$\alpha = 60^{\circ}$	
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	
$q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$R = ?\ h = ?$	

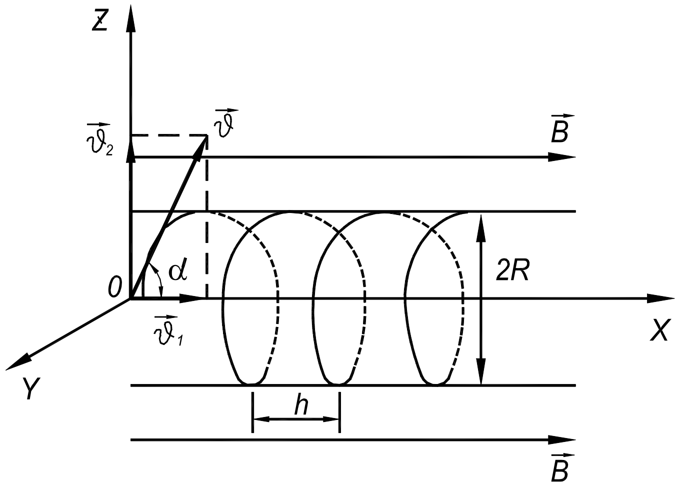


Рис. 7

На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F} = -e\left[\vec{v}\vec{B}\right] \text{ или } F = evB\sin\alpha. \quad (1)$$

Кинетическую энергию $W = mv^2/2$ электрон приобретает за счет работы A сил электрического поля $(A = eU)$, поэтому имеем $mv^2/2 = eU$. Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (2)$$

Разложим вектор скорости $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Вектор $\vec{v}_1$ направлен по линиям индукции; $\vec{v}_2$ – перпендикулярно им. Тогда

$$\vec{F} = -e\left[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\vec{B}\right] = -e\left[\vec{v}_2\vec{B}\right] \quad \text{или} \quad F = e\vec{v}_2 B, \quad (3)$$

так как $\left[\vec{v}_1\vec{B}\right] = 0$.

Составляющая скорости $\vec{v}_1$ не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Составляющая скорости $\vec{v}_2$ изменяется по направлению, так как сила $\vec{F}$, расположенная в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \vec{v}_2^{\,2}/R$. Следовательно, электрон участвует в двух движениях: равномерном вдоль оси OX со скоростью $v_1 = v\cos\alpha$ и равномерном по окружности в плоскости ZOY со скоростью $v_2 = v\sin\alpha$, то есть будет двигаться по винтовой линии.

Так как сила Лоренца $\vec{F}$ сообщает электрону нормальное ускорение a_n, то по второму закону Ньютона имеем

$$F = ma_n \text{ или } ev_2 B = \frac{mv_2^2}{R}.$$

Отсюда радиус винтовой линии

$$R = \frac{mv_2}{eB} = \frac{mv\sin\alpha}{eB}. \qquad (4)$$

Учитывая формулу (2), получаем

$$R = \frac{m\sin\alpha}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{\sin\alpha}{m}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Шаг винтовой линии (смещение вдоль оси OX за время T одного оборота)

$$h = v_1 T = v\cos\alpha T,$$

где $T = 2\pi R/v_2$ – период вращения электрона.

Учитывая формулу (4), получаем

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Следовательно, шаг винтовой линии равен

$$h = \frac{v\cos\alpha 2\pi m}{eB}. \qquad (5)$$

Подставив в выражение (5) формулу для скорости (2), получим:

$$h = \frac{2\pi\cos\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Произведем вычисления:

$$R = \frac{0{,}5}{5\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 200}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 4{,}77\cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$h = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}865}{5\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 200}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 5{,}2\cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

4.2.4. Электромагнитная индукция

1. Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):
мгновенное значение ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt};$$

среднее значение ЭДС индукции

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

2. Разность потенциалов на концах прямого проводника, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Blv\sin\alpha,$$

где l – длина проводника; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

3. Индуктивность контура

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Мгновенное значение ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt};$$

среднее значение ЭДС самоиндукции

$$\langle \mathcal{E}_s \rangle = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где $n = N/l$ – число витков N, приходящееся на единицу длины l соленоида; V – объем соленоида.

6. Энергия магнитного поля контура с током

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

7. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Для однородного поля

$$w = \frac{W}{V}.$$

Примеры решения задач

Задача 1

В центре плоской круговой рамки, состоящей из 50 витков радиусом 20 см, находится маленькая рамка, состоящая из 100 витков площадью 1 см^2. Маленькая рамка вращается вокруг одного из диаметров большой рамки с постоянной угловой скоростью 300 рад/с. Найти максимальное значение ЭДС индукции, если в обмотке рамки течет ток силой 10 А.

Дано:

$N_1 = 50$

$N_2 = 100$

R = 20 см = 0,2 м

S = 1 см^2 = 10^{-4} м^2

ω = 300 рад/с

I = 10 А

$\varepsilon_{imax} = ?$

Решение:

При вращении маленькой рамки непрерывно изменяется угол α между вектором $\vec{B}$ и нормалью к плоскости рамки и, следовательно, изменяется магнитный поток Φ, пронизывающий маленькую рамку. В рамке возникает ЭДС индукции, мгновенное значение которой по закону Фарадея равно

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где $\Psi = N_2\Phi$ – потокосцепление.

Так как размеры маленькой рамки малы по сравнению с размерами большой рамки, то поле в пределах маленькой рамки можно считать однородным. Магнитную индукцию B этого поля можно выразить через индукцию поля в центре рамки

$$B = N_1 \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \qquad (2)$$

Для однородного поля магнитный поток, пронизывающий маленькую рамку, равен $\Phi = BS\cos\alpha$. С учетом того, что при вращении рамки с постоянной угловой скоростью мгновенное значение угла $\alpha = \omega t$, получим:

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t.$$

Подставив в формулу (1) выражение для Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = N_2 BS\omega\sin\omega t.$$

Максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\varepsilon_{i\max} = N_2 BS\omega.$$

Учитывая формулу (2), получим:

$$\varepsilon_{i\max} = N_1 N_2 \mu\mu_0 \frac{I}{2R} S\omega.$$

Произведя вычисления, получим:

$$\varepsilon_{i\max} = 50 \cdot 100 \cdot 1.4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \frac{10}{2 \cdot 0{,}2} 10^{-4} \cdot 300 = 4{,}7 \cdot 10^{-3}\, B.$$

Задача 2

Контур в виде квадрата со стороной 10 см находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 мТл, причем его плоскость составляет угол 60° с силовыми линиями поля. Какой заряд протечет по контуру при выключении магнитного поля? Сопротивление контура 1 мОм.

Дано:

$a = 10$ см $= 10^{-1}$ м

$B = 0{,}5$ мТл $= 5 \cdot 10^{-4}$ Тл

$\beta = 60^{\circ}$

$R = 1$ мОм $= 1 \cdot 10^{-3}$ Ом.

$q = ?$

Решение:

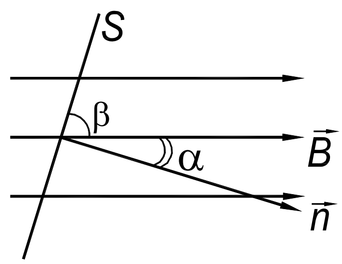


Рис. 8

При выключении магнитного поля магнитный поток Φ, пронизывающий контур, меняется. В контуре возникает ЭДС индукции, мгновенное значение которой по закону Фарадея равно

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Мгновенное значение силы индукционного тока определяется по закону Ома

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

За время dt по контуру протечет заряд

$$dq = Idt = -\frac{1}{R}d\Phi.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд:

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Для однородного магнитного поля начальный магнитный поток равен

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к плоскости контура (рис. 8); $S = a^2$ – площадь контура.

Из рис. 8 видно, что $\alpha = 90^\circ - \beta$. Следовательно, $\cos\alpha = \sin\beta$. Конечный магнитный поток $\Phi_2 = 0$.

Таким образом,

$$q = \frac{BS\sin\beta}{R} = \frac{Ba^2\sin\beta}{R}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$q = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}1^2\sqrt{3}}{2\cdot 1\cdot 10^{-3}} = 4{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{Кл}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений:

$[q] = \dfrac{[B][a]^2}{[R]} = \dfrac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}}$. Но из закона Ампера $\text{Тл} = \dfrac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$, а из закона Ома $[R] = \dfrac{B}{A}$. Таким образом, $\dfrac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}} = \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \dfrac{\text{В}}{\text{А}}} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{В}}$.

Из определения потенциала $\dfrac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл}$.

Задача 3

Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит 1200 витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока 4 А магнитный поток равен 4 мкВб. Определить индуктивность соленоида и энергию его магнитного поля.

Дано:	Решение:
$N = 1200$	Индуктивность L связана с потокосцеплением Ψ и силой тока I соотношением
$I = 4$ А	
$\Phi = 4$ мкВб $= 4 \cdot 10^{-6}$ Вб	$$\Psi = LI. \quad (1)$$
L - ? W - ?	

В свою очередь, потокосцепление можно найти через поток Φ и число витков N (когда витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим индуктивность соленоида

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Выразив L согласно (3), получим:

$$W = \frac{1}{2} N\Phi I.$$

Подставим в формулы значения физических величин и произведем вычисления

$$L = \frac{1{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{Гн} = 1{,}8\ \text{мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 1{,}44 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж} = 14{,}4\ \text{мДж}.$$

Проверим размерность для энергии магнитного поля

$$[W] = [\Phi] \cdot [I] = \text{Вб} \cdot \text{А} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}.$$

Из выражения для силы Ампера $F = IBl\sin\alpha$ получим:

$$[B] = \frac{[F]}{[\mathrm{I}] \cdot [l]}, \qquad \text{т. е.} \qquad \text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Таким образом, $\text{Тл} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А} = \dfrac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$

4.3. Задание на контрольную работу № 3

301. Три одинаковых точечных заряда 50 нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной 6 см. Найти силу, действующую на один из зарядов со стороны двух остальных.

302. На продолжении оси тонкого прямого стержня, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда 400 нКл/см, на расстоянии 30 см от конца стержня, находится точечный заряд 20 мкКл. Второй конец стержня уходит в бесконечность. Определить силу взаимодействия стержня и точечного заряда.

303. Четыре одинаковых точечных заряда 20 нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной 10 см. Найти силу, действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.

304. На продолжении оси тонкого прямого равномерно заряженного стержня длиной 20 см на расстоянии 10 см от его ближайшего конца находится

точечный заряд 10 нКл. Определить линейную плотность заряда на стержне, если сила взаимодействия стержня и точечного заряда 6 мкН.

305. Поверхностная плотность заряда бесконечно протяженной вертикальной плоскости 200 мкКл/м^2. К плоскости на нити подвешен заряженный шарик массой 15 г. Определить заряд шарика, если нить образует с плоскостью угол 30^o.

306. Две длинные прямые параллельные нити находятся на расстоянии 10 см друг от друга. На нитях равномерно распределены заряды с линейными плотностями 0,4 и –0,3 нКл/см. Определить напряженность электрического поля в точке, удаленной от первой нити на расстояние 6 см и от второй – на расстояние 8 см.

307. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 10 см находятся одинаковые точечные заряды величиной 5 нКл. Найти напряженность и потенциал электростатического поля в центре шестиугольника.

308. Определить напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого зарядом – 3 нКл, равномерно распределенным по тонкому прямому стержню длиной 10 см, в точке, лежащей на продолжении оси стержня на расстоянии 10 см от его конца.

309. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами 5 и 10 см несут соответственно заряды 3 и –1нКл. Найти напряженность и потенциал электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях 3, 6 и 12 см. Построить график зависимости напряженности и потенциала от расстояния.

310. Два точечных заряда величиной 1 и –1 нКл находятся на расстоянии 2 см друг от друга. Определить напряженность и потенциал электростатического поля в точке, удаленной от первого и второго заряда на расстояние 3 см.

311. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, равномерно заряженными с поверхностными плотностями заряда 0,3 и 0,7 мкКл/м^2. Определить напряженность поля между пластинами и вне пластин. Найти разность потенциалов между пластинами, если рас-

стояние между ними 4 см. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

312. Решить предыдущую задачу при условии, что заряд второй пластины отрицательный.

313. На расстоянии 2 см от бесконечно длинной равномерно заряженной нити находится точечный заряд 0,4 нКл. Под действием сил поля заряд переместился до расстояния 4 см; при этом совершается работа 0,5 мкДж. Найти линейную плотность заряда нити.

314. Определить работу сил электростатического поля при перемещении точечного заряда –20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 4 см от поверхности сферы радиусом 1 см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда 3 нКл/см^2.

315. Под действием сил электростатического поля точечный заряд переместился из точки, находящейся на расстоянии 8 см от бесконечно длинной равномерно заряженной нити в точку, находящуюся на расстоянии 2 см; при этом совершается работа 52 мкДж. Найти величину заряда, если линейная плотность заряда нити 50 нКл/см.

316. Протон влетел в однородное электрическое поле с напряженностью 300 В/см в направлении силовых линий со скоростью 100 км/с. Какой путь должен пройти протон, чтобы его скорость удвоилась?

317. В центре сферы радиусом 30 см находится точечный заряд 10 нКл. Определить поток напряженности через часть сферической поверхности площадью 20 см^2.

318. Прямоугольная плоская площадка со сторонами 3 и 2 см находится на расстоянии 1 м от точечного заряда 2 мкКл. Площадка ориентирована так, что линии напряженности составляют угол 30° с ее поверхностью. Найти поток напряженности через эту площадку.

319. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 0,5 нКл /см^2 расположена круглая пластинка так, что её плоскость составляет угол 30° с силовыми линиями

электрического поля. Определить поток напряженности и электрического смещения (индукции) через пластинку, если её радиус 10 см.

320. Бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда 5 нКл/см^2, пересекает сферу по диаметру. Найти поток электрического смещения через сферическую поверхность, если диаметр сферы 4 см.

321. Конденсатор электроёмкостью 0,5 мкФ был заряжен до напряжения 350 В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до напряжения 500 В, напряжение на нем изменилось до 400 В. Вычислить электроемкость второго конденсатора.

322. Коаксиальный электрический кабель состоит из центральной жилы радиусом 1 см и цилиндрической оболочки радиусом 1,5 см, между которыми находится изоляция. Вывести формулу для емкости такого кабеля и вычислить электроемкость кабеля длиной 10 м, если изоляционным материалом служит резина.

323. Сферический конденсатор состоит из двух тонких концентрических сферических оболочек радиусом 1,5 и 3 см. В пространстве между оболочками находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью 3,2. Вывести формулу для электроёмкости такого конденсатора и вычислить его электроемкость.

324. Определить поверхностную плотность зарядов на пластинах плоского слюдяного конденсатора, заряженного до разности потенциалов 100 В, если расстояние между его пластинами 0,3 мм.

325. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин 100 см^2 заряжен до разности потенциалов 300 В. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах, электроёмкость и энергию поля конденсатора, если напряженность поля в зазоре между пластинами 60 кВ/м.

326. Плоский слюдяной конденсатор, заряженный до разности потенциалов 600 В, обладает энергией 40 мкДж. Площадь пластин составляет 100 см^2. Определить расстояние между пластинами, напряженность и объёмную плотность энергии электрического поля конденсатора.

327. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 В. Расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик – стекло. Определить напряженность поля в стекле, поверхностную плотность заряда на пластинах и поверхностную плотность связанных поляризационных зарядов на стекле.

328. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено трансформаторным маслом. Расстояние между пластинами 3 мм. Какое напряжение надо подать на пластины этого конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных поляризационных зарядов на масле была 0,62 нКл/см^2?

329. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: слоем слюды толщиной 0,2 мм и слоем парафинированной бумаги толщиной 0,1 мм. Определить напряженность поля и падение потенциала в каждом из слоев, если разность потенциалов между обкладками конденсатора 220 В.

330. Плоский конденсатор, площадь каждой пластины которого 400 см^2, заполнен двумя слоями диэлектрика: слоем парафинированной бумаги толщиной 0,2 см и слоем стекла толщиной 0,3 см. Определить разность потенциалов для каждого слоя и электроёмкость конденсатора, если разность потенциалов между его обкладками 600 В.

331. При каком внешнем сопротивлении потребляемая мощность будет максимальна, если два одинаковых источника с ЭДС 6 В и внутренним сопротивлением 1 Ом каждый соединены последовательно? Чему равна эта мощность?

332. Решить предыдущую задачу для случая, когда источники тока соединены параллельно.

333. ЭДС аккумулятора автомобиля 12 В. При силе тока 3 А его КПД 0,8. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора.

334. Два одинаковых источника тока соединены в одном случае последовательно, в другом – параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление 1 Ом. При каком внутреннем сопротивлении источника тока сила тока во внешней цепи будет в обоих случаях одинакова?

335. В проводнике за время 10 с при равномерном возрастании силы тока от 0 до 2 А выделилось количество теплоты 6 кДж. Найти сопротивление проводника.

336. При замыкании аккумуляторной батареи на резистор сопротивлением 9 Ом в цепи идет ток силой 1 А. Сила тока короткого замыкания равна 10 А. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

337. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от нуля до некоторого максимального значения за 20 с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты 4 кДж. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если его сопротивление 6 Ом.

338. По алюминиевому проводу сечением 0,2 мм^2 течет ток силой 0,3 А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля.

339. В медном проводнике площадью поперечного сечения 4 мм^2 и длиной 6 м ежеминутно выделяется количество теплоты 18 Дж. Вычислить напряженность электрического поля, плотность и силу электрического тока в проводнике.

340. Сила тока в проводнике сопротивлением 8 Ом за время 10 секунд равномерно возрастает от нуля до 12 А. Определить количество теплоты, выделившейся за это время в проводнике.

341. Бесконечно длинный провод образует круговой виток, касательный к проводу, по проводу идет ток силой 3 А. Найти радиус витка, если напряженность магнитного поля в центре витка 20 А/м.

342. По двум одинаковым круговым виткам радиусом 6 см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи силой 3 А. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в центре витков.

343. По двум бесконечно длинным параллельным проводам, находящимся на расстоянии 10 см друг от друга в воздухе, текут в одном направлении токи силой 20 и 30 А. Определить индукцию магнитного поля в точке, лежащей

на прямой, соединяющей оба провода, и находящейся на расстоянии 2 см от первого провода.

344. Решить предыдущую задачу при условии, что токи в проводниках текут в противоположных направлениях.

345. По двум длинным параллельным проводам, находящимся на расстоянии 4 см в воздухе, текут в одном направлении одинаковые токи силой 5 А. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в точке, удаленной от каждого провода на расстояние 4 см.

346. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в центре проволочной квадратной рамки со стороной 8 см, если по рамке проходит ток силой 3 А.

347. По двум тонким длинным параллельным проводам, расстояние между которыми 10 см, текут в одном направлении токи силой 3 и 2 А. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в точке, удаленной на расстояние 6 см от первого провода и на расстояние 8 см от второго провода, если провода находятся в воздухе.

348. Бесконечно длинный прямой проводник согнут под прямым углом. По проводнику течет ток силой 2 А. Найти напряженность и магнитную индукцию в точке, расположенной на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от сторон проводника.

349. По проводу, согнутому в виде правильного шестиугольника с длиной стороны 10 см, течет ток силой 5 А. Найти напряженность и магнитную индукцию в центре шестиугольника.

350. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом. Расстояние между проводами равно 10 см. По проводам текут одинаковые токи силой 10 А. Найти индукцию и напряженность магнитного поля в точке, находящейся на середине расстояния между проводами.

351. Прямой провод согнут в виде квадрата со стороной 8 см. Какой силы ток надо пропустить по проводнику, чтобы напряженность магнитного поля в точке пересечения диагоналей была 20 А/м?

352. Сила взаимодействия двух параллельных проводов, по которым текут одинаковые токи, равна 1 мН. Найти силу тока в проводах, если расстояние между ними 1 см, а длина каждого провода 1 м.

353. В однородном магнитном поле с индукцией 20 мТл находится прямоугольная рамка длиной 6 см и шириной 2 см, содержащая 100 витков проволоки. Сила тока в рамке 1 А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определить магнитный момент рамки и механический вращающий момент, действующий на рамку.

354. Каким образом надо расположить прямой алюминиевый проводник в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией 50 мТл и какой силы ток надо пропустить по нему, чтобы он находился в равновесии? Плотность алюминия $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, а радиус проводника 1 мм.

355. Контур из провода, изогнутый в виде квадрата со стороной 5 см, расположен в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с силой тока 4 А так, что его две стороны параллельны проводу. Сила тока в контуре 0,2 А. Определить силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура находится на расстоянии 5 см.

356. Незакрепленный прямой проводник массой 1 г и длиной 8 см, по которому течет ток, находится в равновесии в горизонтальном однородном магнитном поле с напряженностью 100 кА/м. Определить силу тока в проводнике, если он перпендикулярен линиям индукции поля.

357. Проволочный виток радиусом 10 см, по которому течет ток силой 2 А, величина которого поддерживается неизменной, свободно установился в однородном магнитном поле. При повороте витка относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол 60^0 была совершена работа 20 мкДж. Найти напряженность магнитного поля.

358. Проводник, согнутый в виде квадрата со стороной 8 см, лежит на столе. Квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянули в линию. Определить совершенную при этом работу. Сила тока 0,5 А в проводнике поддер-

живается неизменной. Вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли 40 А/м.

359. Проволочное кольцо радиусом 10 см, по которому течет ток силой 1 А, свободно установилось в однородном магнитном поле с индукцией 0,04 Тл. При повороте контура относительно оси, лежащей в плоскости кольца, на некоторый угол была совершена работа 0,157 мДж. Найти угол поворота контура. Считать, что сила тока в контуре поддерживается неизменной.

360. Проволочное кольцо радиусом 5 см лежит на столе. По кольцу течет ток силой 0,2 А. Поддерживая силу тока неизменной, кольцо перевернули с одной стороны на другую. Какая работа была совершена при этом? Вертикальную составляющую напряженности магнитного поля Земли принять равной 40 А/м.

361. В однородном магнитном поле с индукцией 20 мТл равномерно движется прямой проводник длиной 25 см, по которому течет ток силой 0,3 А. Скорость проводника 15 см/с и направлена перпендикулярно силовым линиям поля. Найти работу перемещения проводника за 5 с и мощность, затраченную на перемещение.

362. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?

363. Протон и электрон, двигаясь с одинаковыми скоростями, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?

364. Электрон, ускоренный электрическим полем с разностью потенциалов 300 В, влетает перпендикулярно силовым линиям в однородное магнитное поле и движется по окружности радиусом 10 см. Определить индукцию магнитного поля и период обращения электрона по окружности.

365. Электрон, двигаясь со скоростью 4 Мм/с, влетает под углом 60^{o} к силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией 1 мТл. Определить

радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

366. В однородное магнитное поле с индукцией 0,1Тл влетает перпендикулярно силовым линиям α - частица с кинетической энергией 400 эВ. Найти силу, действующую на α - частицу, радиус окружности, по которой движется α - частица, и период обращения α - частицы.

367. Протон влетает в однородное магнитное поле под углом 60^o к силовым линиям и движется по винтовой линии, радиус которой 1,5 см, индукция магнитного поля 10 мТл. Найти кинетическую энергию протона.

368. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией 0,02 Тл возбуждено электрическое поле с напряженностью 20 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям прямолинейно движется заряженная частица. Определить скорость частицы.

369. В однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл движется протон. Траектория его движения представляет винтовую линию с радиусом 10 см и шагом 60 см. Определить скорость протона.

370. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямой проводник длиной 60 см. Определить силу Лоренца, действующую на свободный электрон в проводнике, если на его концах возникает разность потенциалов 20 мкВ.

371. Индукция магнитного поля между полюсами двухполюсного генератора 0,8 Тл. Ротор имеет 100 витков площадью 400 $см^2$. Определить частоту вращения ротора, если максимальное значение ЭДС индукции 200 В .

372. В однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл равномерно с частотой 5 оборотов в секунду вращается стержень длиной 40 см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям индукции магнитного поля, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов.

373. Какой силы ток течет через гальванометр, присоединенный к железнодорожным рельсам, расстояние между которыми 152 см, когда к нему со скоростью 72 км/ч приближается поезд? Вертикальную составляющую индук-

ции магнитного поля Земли принять равной 50 мкТл; сопротивление гальванометра 50 Ом.

374. Катушка из 100 витков площадью 15 $см^2$ вращается в однородном магнитном поле с частотой 5 оборотов в секунду. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и силовым линиям поля. Определить индукцию магнитного поля, если максимальное значение ЭДС индукции, возникающей в катушке, равно 0,25 В.

375. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. При этом по цепи прошел заряд 50 мкКл. Определить изменение магнитного потока через кольцо, если сопротивление цепи гальванометра 10 Ом.

376. Тонкий провод сопротивлением 0,2 Ом согнут в виде квадрата со стороной 10 см и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле с индукцией 4 мТл так, что его плоскость перпендикулярна силовым линиям поля. Определить заряд, который протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

377. Рамка из провода сопротивлением 0,06 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 4 мТл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки 100 $см^2$. Определить заряд, который потечет по рамке при изменении угла между нормалью к рамке и линиями индукции: 1) от 0 до 45^o; 2) от 45^o до 90^o.

378. Сила тока в соленоиде равномерно возрастает от 0 до 5 А за 10 с, при этом в соленоиде возникает магнитное поле с энергией 100 мДж. Определить среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую в соленоиде.

379. Соленоид длиной 30 см и площадью поперечного сечения 10 $см^2$ с сердечником из немагнитного материала ($\mu = 1$) содержит 600 витков. Определить индуктивность соленоида и среднее значение ЭДС самоиндукции, возникающей при выключении тока в соленоиде, если сила тока уменьшается от 0,8 А до 0 за время 150 мкс.

380. Соленоид сечением 20 см^2 и длиной 40 см с сердечником из немагнитного материала ($\mu = 1$) содержит 800 витков. Найти индуктивность соленоида, полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом, и энергию магнитного поля, если по виткам течет ток силой 2 А.

5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 “КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ”

5.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 4

В контрольную работу 4 включены задачи по темам: механические колебания, электромагнитные колебания, упругие и электромагнитные волны, интерференция, дифракция, поляризация света.

При решении задач следует выполнить общие методические рекомендации.

Задачи 401…410 относятся к теме "Механические гармонические колебания". Для решения этих задач необходимо изучить тему "Механические колебания" по учебному пособию [1], с. 255…261.

Рекомендуется учитывать, что колебания различной физической природы описываются математически одинаково. Различные характеристики колебаний можно получить из уравнений колебаний, применяя дифференцирование или интегрирование. Обращать внимание на фазовые сдвиги между различными характеристиками, например, между смещением и скоростью, ускорением; или между током и напряжением.

Задачи 411…420 относятся к теме “Затухающие механические колебания”. Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебному пособию [1], с. 267…276.

Следует обращать внимание на физический смысл коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания, на связь между частотой затухающих колебаний и собственной частотой.

Задачи 421…430 относятся к теме "Электромагнитные колебания". Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебному пособию [1], с. 261…263, 267…283. Решение этих задач предполагает, что закономерности механических и электрических колебаний математически выражаются одинаково.

Задачи 431…440 относятся к теме “Сложение колебаний”.

Для решения этих задач необходимо ознакомиться с конкретными физическими понятиями, законами или формулами данной темы по учебному пособию [1], с. 261…263, 267…283.

При решении задач на сложение колебаний обращать внимание на разность фаз складываемых колебаний.

Задачи 441…450 относятся к теме “Упругие и электромагнитные волны”. Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебному пособию [1], с. 284…289, 297…305.

Иметь в виду, что уравнения упругих и электромагнитных волн математически одинаковы, их можно использовать так же, как уравнения колебаний.

Задачи 451…460 относятся к теме "Интерференция света”. Теоретический материал по этой теме изложен в [1], с. 316…331.

Задачи 461…470 относятся к теме “Дифракция света”. Для решения этих задач следует ознакомиться с конкретными физическими понятиями, законами или формулами данной темы по учебному пособию [1], с. 332…347.

Задачи 471…480 относятся к теме “Поляризация света”. Приступая к решению этих задач, необходимо ознакомиться с данной темой по учебному пособию [1], с. 355…366 и 351…353.

При решении задач на волновые свойства света (интерференция, дифракция, поляризация, поглощение) помнить, что за световой вектор принимается вектор напряжённости электрического поля; все энергетические характеристики света аналогичны таковым для электромагнитных волн.

Табл. 4

Вариант	Номера задач							
0	401	411	421	431	441	451	461	471
1	402	412	422	432	442	452	462	472
2	403	413	423	433	443	453	463	473
3	404	414	424	434	444	454	464	474
4	405	415	425	435	445	455	465	475
5	406	416	426	436	446	456	466	476
6	407	417	427	437	447	457	467	477
7	408	418	428	438	448	458	468	478
8	409	419	429	439	449	459	469	479
9	410	420	430	440	450	460	470	480

5.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

5.2.1. Гармонические механические колебания

1) Кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где x – смещение от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $(\omega t + \varphi)$ – фаза; φ – начальная фаза; ω – круговая частота.

2) Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$v = - A\,\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

$$a = - A\,\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

3) Период колебаний

a) тела, подвешенного на пружине,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{к}},$$

где m – масса тела; $к$ – жесткость пружины;

b) математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения;

с) физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}},$$

где J – момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний; a – расстояние от центра тяжести маятника до оси колебаний; $L = J/ma$ – приведенная длина физического маятника.

Примеры решения задач

Задача 1

К невесомой пружине, коэффициент упругости которой 200 Н/м, прикреплен груз массой 1 кг. Груз смещен на 10 см от положения равновесия, после чего предоставлен себе. Определить наибольшее и наименьшее ускорения груза. Трением пренебречь.

Дано:	Решение:
$k = 200$ Н/м	Под действием силы упругости груз совершает свободные гармонические колебания, уравнение которых запишем в виде
$m = 1$ кг	
$A_0 = 10$ см $= 0{,}1$ м	
$a_{max} = ?$ $a_{min} = ?$	$x = A_0 \cos\omega t,$ (1)

где A_0 – амплитуда колебания; ω – циклическая частота.

Продифференцировав выражение (1) по времени, определим скорость груза:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0\omega\sin\omega t, \tag{2}$$

а после дифференцирования скорости по времени – ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = -A_0\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x. \tag{3}$$

Так как $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, то ускорение a можно записать в виде

$$a = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x. \qquad (4)$$

Ускорение имеет максимальное значение при $x = A_0$, то есть при наибольшем отклонении от положения равновесия

$$|a_{\max}| = \frac{k}{m}A_0. \qquad (5)$$

В положении равновесия, при x = 0, ускорение a = 0. Подставляя числовые значения в выражение (5), получим:

$$a_{\max} = (200/1)\cdot 0{,}1 = 20 \text{ м/с}^2.$$

5.2.2. Затухающие колебания

1) Уравнение затухающих колебаний

$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha)$,

где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; A_0 – начальная амплитуда (при t = 0); $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – круговая частота.

2) Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{1}{N_e},$$

где T – период колебаний; N_e – количество колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

3) Добротность колебательной системы при $\delta^2 << \omega^2$:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{W}{\Delta W(T)} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

где W – полная энергия системы; $\Delta W(T)$ – потери энергии за период.

Примеры решения задач

Задача 1

Прибор для измерения плотности жидкостей – ареометр массой 0,8 кг с цилиндрической трубкой диаметром 0,3 см опущен в жидкость плотностью $1{,}2\cdot10^3$ кг/м^3. Ареометр получил небольшой импульс в вертикальном направлении и опустился на глубину $x_0 = 3$ см. Коэффициент сопротивления $r = 0{,}01$ кг/с. Определить: циклическую частоту колебаний; количество колебаний, через которое амплитуда уменьшится в 3 раза.

Дано:

$m = 0{,}08$ кг

$d = 0{,}3$ см $= 3\cdot10^{-3}$ м

$\rho = 1{,}2\cdot10^3$ кг$/$м$^{-3}$

$x_0 = 3\cdot10^{-2}$ м

$r = 0{,}01$ кг/с

$\omega = ?\;\; N = ?$

Решение:

При опускании ареометра в жидкость появляется квазиупругая выталкивающая сила

$$F_e = -\frac{\pi d^2}{4}\rho g x$$

и сила сопротивления

$$F_c = -rv = -r\dot{x}.$$

Уравнение движения ареометра

$$m\ddot{x} = -\frac{\pi d^2}{4}\rho g x - r\dot{x}$$

преобразуется в уравнение колебаний

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \dfrac{\pi d^2\rho g}{4m}$ – собственная частота колебаний.

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{\pi d^2\rho g}{4m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Подставляя числовые значения, получим: $\omega \approx 1\,c^{-1}$

Амплитуда затухающих колебаний

$$A(t) = x_0 e^{-\delta t}.$$

При уменьшении амплитуды в 3 раза

$$\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \frac{x_0 e^{-\delta t_1}}{x_0 e^{-\delta t_2}} = e^{-\delta(t_2 - t_1)} = 3.$$

Отсюда $$\delta(t_2 - t_1) = \delta\Delta t = \ln 3.$$

Учитывая, что $\Delta t = NT$, а $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, получим:

$$N = \frac{\ln 3}{\delta T} = \frac{\omega \ln 3}{2\pi\delta} = \frac{2m\omega \ln 3}{2\pi r}.$$

Подставляя числовые значения, получим: $N = 3$.

5.2.3. Электромагнтные колебания

1) Эффективные (действующие) значения напряжения и силы переменного тока

$$U_{\text{Д}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{Д}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

где U_m и I_m – амплитудные значения напряжения и силы тока.

2) Закон Ома для цепи переменного тока, содержащей последовательно соединенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор электроемкостью C

$$I_m = \frac{U_m}{Z} \quad \text{или} \quad I_{\text{Д}} = \frac{U_{\text{Д}}}{Z},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – полное сопротивление цепи; $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление; ω – круговая частота переменного тока.

При этом сдвиг фаз между напряжением и силой тока определяется из условия

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}.$$

3) Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$P = I_Д U_Д \cos\varphi,$$

где φ – сдвиг фаз между напряжением и силой тока.

4) Период собственных электромагнитных колебаний в контуре без активного сопротивления (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L – индуктивность контура; C – электроемкость.

Примеры решения задач

Задача 1.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора электроемкостью 0,5 мкФ в колебательном контуре изменяется со временем по закону U = 100sin1000πt В. Определить период собственных колебаний, индуктивность, полную энергию контура и максимальную силу тока, текущего по катушке индуктивности. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Дано:	Решение:
$C = 0{,}5\,\text{мкФ} = 5\cdot10^{-7}$ Ф $U_m = 100$ В $\omega = 10^3\pi$ с$^{-1}$ $T = ?\ \omega = ?\ I_m = ?\ L = ?$	Напряжение на конденсаторе изменяется по гармоническому закону $U = U_m\sin\omega t,$ где U_m – амплитудное (максимальное) значение

напряжения на обкладках конденсатора; ω – собственная круговая частота колебаний, которая связана с периодом соотношением $T=2\pi/\omega$. Отсюда находим

$$T = 2\pi/1000\pi = 2\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Период собственных колебаний в контуре определяется по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}; \qquad L = \frac{(2\cdot10^{-3})^2}{4(3{,}14)^2\,0{,}5\cdot10^{-6}} = 0{,}2\ \text{Гн}.$$

Полная энергия контура складывается из энергии электрического поля W_C конденсатора и энергии магнитного поля W_L катушки:

$$W = W_C + W_L = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Полная энергия электрического контура равна максимальной энергии поля конденсатора $W_{Cmax} = CU_m^2/2$ или максимальной энергии поля катушки $W_{Lmax} = LI_m^2/2$.

Таким образом,

$$W = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Зная полную энергию, можно определить максимальную силу тока, протекающего по катушке индуктивности:

$$I_m = \sqrt{\frac{2W}{L}}; \qquad I_m = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}2} = 0{,}16\ \text{А}.$$

5.2.4. Сложение гармонических колебаний

1) Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

- амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

- начальная фаза результирующего колебания

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

2) Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях ($x_1 = A_1 \cos\omega t$, $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$):

а) $y = (A_2 / A_1)x$ (если разность фаз $\varphi = 0$);

б) $y = -(A_2 / A_1)x$ (если разность фаз $\varphi = \pm\pi$);

в) $x^2 / A_1^2 + y^2 / A_2^2 = 1$ (если разность фаз $\varphi = \pm\pi/2$).

Примеры решения задач

Задача 1

Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых:

$$x = A_1 \cos\omega_1 t\,, \qquad (1)$$

$$y = A_2 \cos\omega_2 t\,, \qquad (2)$$

где $A_1 = 1$ см; $\omega_1 = \pi$ с$^{-1}$; $A_2 = 2$ см; $\omega_1 = \pi / 2$ с$^{-1}$.

Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Дано:

$x = A_1 \cos\omega_1 t$

$y = A_2 \cos\omega_2 t$

$A_1 = 1$ см $= 0{,}01$м

$A_2 = 2$ см $= 0{,}02$м

$y = f(x) = ?$

Решение:

Чтобы определить траекторию точки, исключим время из уравнений (1) и (2). Заметив, что $y = A_2\cos(\omega_1/2)t$, применим формулу косинуса половинного угла:

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}\,.$$

Используя это соотношение и отбросив размерности x и y, можно написать:

$$y = 2\cos\frac{\omega_1 t}{2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\omega_1 t}{2}}\,; \quad x = \cos\omega_1 t\,,$$

откуда

$$y = \pm 2\sqrt{(1+x)/2} \quad \text{или} \quad y = \pm\sqrt{2x+2}\,. \qquad (3)$$

Выражение (3) есть уравнение параболы, ось которой совпадает с осью OX. Как показывают уравнения (1) и (2), амплитуда колебаний точки по оси OX равна 1, а по оси $OУ$ –2. Следовательно, абсциссы всех точек траектории заключены в пределах от –1 до +1, а ординаты – от –2 до +2.

Для построения траектории найдем из уравнения (3) значения y, соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$:

x	$y = \sqrt{2x+2}$	x	$y = \sqrt{2x+2}$
- 1	0	0	± 1,41
- 0,75	± 0,71	0,5	± 1,73
- 0,5	± 1	1	± 2

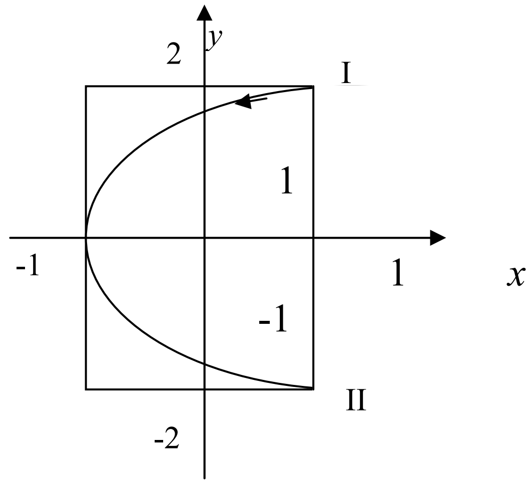


Рис. 1

Начертив координатные оси и выбрав единицу длины (сантиметр), построим точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию результирующего колебания точки, которая представляет собой часть параболы, заключенной внутри прямоугольника амплитуд.

Далее определим направление движения точки. Из уравнений (1) и (2) находим, что период колебаний точки по горизонтальной оси T_x = 2 с, а по вертикальной оси T_y = 4 с.

Следовательно, когда точка совершает одно полное колебание по оси *OX*, она совершает только половину полного колебания по оси *OУ*. В начальный момент (t = 0) имеем: x = 1, у = 2 (точка находится в положении 1) при t = 1 с получим: x = –1 и у = 0 (точка находится в вершине параболы); При t = 2 с получим: x = 1 и у = –2 (точка находится в положении 2). После этого она будет двигаться в обратном направлении.

5.2.5. Упругие и электромагнитные волны

1) Уравнение плоской бегущей волны

$$y = A \cos \omega (t - x/v),$$

где y – смещение любой из точек среды с координатой x в момент t; v – скорость распространения колебаний в среде.

2) Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с расстоянием между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний,

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x,$$

где λ – длина волны.

3) Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

4) Связь длины электромагнитной волны с периодом T и частотой ν колебаний

$$\lambda = vT \quad \text{или} \quad \lambda = v/\nu.$$

5) В плоской электромагнитной волне

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}.$$

6) Вектор Пойнтинга

$$\Pi = [\vec{E}\vec{H}].$$

Модуль вектора Пойнтинга равен плотности потока энергии электромагнитной волны.

Примеры решения задач

Задача 1

Плоская волна распространяется в упругой среде со скоростью 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1м. Определить период колебаний и частоту.

Дано:	Решение:
$\Delta x = 1$м $\upsilon = 100$м/с	Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны, колеблются с разностью фаз, равной 2π. Точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии, колеблются с разностью фаз, равной
$T = ?$ $\nu = ?$	

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \qquad (1)$$

Решая это равенство относительно λ, получаем

$$\lambda = 2\pi\Delta x \,/\, \Delta\varphi. \qquad (2)$$

По условию задачи $\Delta\varphi = \pi$. Подставляя значения величин, входящих в выражение (2), получим:

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 1}{\pi} = 2 \text{ м.}$$

Скорость υ распространения волны связана с λ и T отношением

$$\lambda = \upsilon \cdot T = \upsilon / \nu, \qquad (3)$$

где ν – частота колебаний.

Из выражения (3) получаем $\nu = \upsilon/\lambda$.

Произведем вычисления:

$$\nu = (100 / 2) = 50 \text{ Гц}, \quad T = 1/50 \text{ с} = 0{,}02 \text{ с}.$$

5.2.6. Интерференция света

1) Скорость света в среде

$$\upsilon = c / n,$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды.

2) Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

3) Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2 .$$

4) Связь разности фаз колебаний $\Delta\varphi$ с оптической разностью хода

$$\Delta\varphi = 2\pi(\Delta / \lambda) ,$$

где λ – длина световой волны в вакууме.

5) Условие максимального усиления света при интерференции

$$\Delta = \pm\, 2\kappa\,\frac{\lambda}{2} = \pm\kappa\lambda\,, \qquad \kappa = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Условие максимального ослабления света при интерференции

$$\Delta = \pm(2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2} .$$

6) Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от тонкой пленки:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = 2dn\cos i_2 - \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; i_1 – угол падения; i_2 – угол преломления света в пленке.

Разность хода – $\lambda/2$ возникает при отражении света от оптически более плотной среды.

7) Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_\kappa = \sqrt{\frac{(2\kappa - 1)R\lambda}{2n}}\,, \qquad \kappa = 1,\ 2,\ 3\ldots,$$

где κ – номер кольца; R – радиус кривизны; n – показатель преломления среды, находящейся между линзой и стеклянной пластинкой.

Радиус темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_\kappa = \sqrt{\frac{\kappa R\lambda}{n}}\,, \qquad \kappa = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Примеры решения задач

Задача 1

Расстояние между двумя когерентными источниками равно 0,9 мм. Источники, испускающие монохроматический свет с длиной волны 640 нм, расположены на расстоянии 3,5 м от экрана. Определить число светлых полос, которые наблюдаются на 1 см длины экрана.

Дано:	Решение:
$\lambda = 640$ нм $= 64 \cdot 10^{-8}$ м $d = 0{,}9$ мм $= 9 \cdot 10^{-4}$ м $L = 3{,}5$ м	В точке О на экране (рис. 2) будет максимальная освещенность: точка О равноудалена от обоих источников S^{I} и S^{II}, поэтому разность хода волн $S^{I}O$ и $S^{II}O$ равна нулю. В произвольной точке экрана $O_к$ максимум освещенности будет наблюдаться, если оптическая разность хода когерентных волн равна целому числу длин волн:
$\dfrac{\kappa}{x} = ?$	

$$\Delta = S_2 - S_1 = \kappa\lambda, \qquad (1)$$

где S_2, S_1 – оптические пути интерферирующих волн; λ – длина волны падающего света; κ – номер светлой полосы (центральная светлая полоса принята за нулевую). Оптическая разность хода волн $\Delta = xd/L$, где x – расстояние от центральной светлой полосы до κ-й светлой полосы.

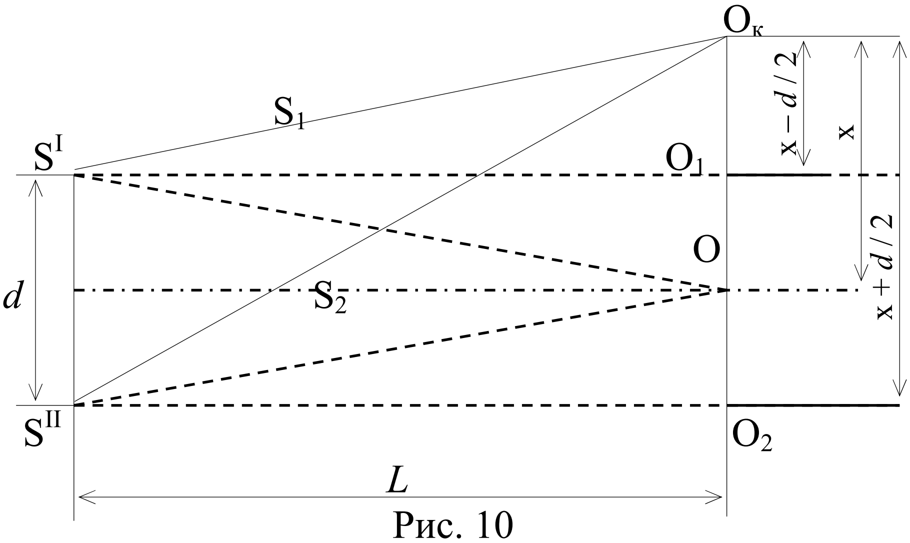


Рис. 10

Учитывая выражение (1), получим:

$$\Delta = \frac{xd}{L} = \kappa\lambda . \tag{2}$$

Из выражения (2) определяем искомую величину $\frac{\kappa}{x}$ – число светлых интерференционных полос на 1 см длины:

$$\frac{\kappa}{x} = \frac{d}{L\lambda} .$$

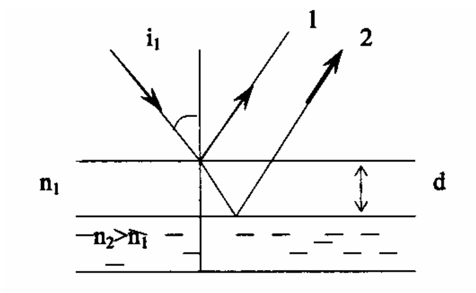
Подставим в это выражение числовые значения и получим:

$$\frac{\kappa}{x} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{3{,}5 \cdot 64 \cdot 10^{-8}} = 400 \text{ м}^{-1} ,$$

откуда $\frac{\kappa}{x}$ на 1 см равно 4.

Задача 2

Для устранения отражения света от поверхности линзы на нее наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления (n = 1,26), меньшим, чем у стекла (просветление оптики). При какой наименьшей толщине пленки отражение света с длиной волны 0,55 мкм не будет наблюдаться, если угол падения лучей 30°?

Дано:	Решение:
n = 1,26 λ = 0,55 мкм $=5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м i_1 = 30°	
$\frac{\kappa}{x} = ?$	Рис. 3

Оптическая разность хода лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей пленки (рис. 3), равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} , \tag{1}$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; i_1 – угол падения лучей.

В выражении (1) учтено, что отражение лучей на верхней и нижней поверхностях пленки происходит от оптически более плотной среды и поэтому потери полуволны в обоих случаях компенсируют друг друга.

Условие интерференционного минимума

$$\Delta = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим

$$d_k = \frac{(2k+1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}. \tag{3}$$

Полагая κ = 0, 1, 2, 3...., получим ряд возможных значений толщины пленки. Минимальная толщина пленки будет при $\kappa = 0$.

Подставим в расчетную формулу (3) числовые значения входящих величин: $n = 1{,}26$; $\lambda = 0{,}55$ мкм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $i_1 = 30^{\circ}$; $\kappa = 0$.

Произведем вычисления:

$$d = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{(1{,}26)^2 - \sin^2 30^{\circ}}} = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{м} = 0{,}12\ \text{мкм}.$$

5.2.7. Дифракция света

1) Радиус κ-й зоны Френеля:

- для сферической волны

$$r_{\kappa} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\kappa\lambda},$$

где a – расстояние между диафрагмой с круглым отверстием и точечным источником света; b – расстояние между диафрагмой и экраном, на котором ведется наблюдение дифракционной картины; κ – номер зоны Френеля; λ – длина волны.

- для плоской волны

$$r_{\kappa} = \sqrt{b\kappa\lambda}.$$

2) Дифракция света на одной щели при нормальном падении света (дифракция Фраунгофера).

Угол φ отклонения лучей, соответствующих минимуму интенсивности света, определяется из условия

$$a\sin\varphi = \pm 2\kappa\frac{\lambda}{2} = \pm\kappa\lambda, \qquad \kappa = 0, 1, 2\ \ldots,$$

где a – ширина щели; κ – порядковый номер минимума; λ – длина волны.

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму интенсивности света, определяется из условия

$$a\sin\varphi = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}, \qquad \kappa = 0, 1, 2\ \ldots,$$

где φ – приближенное значение угла дифракции.

3) Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей.

Условие главных максимумов интенсивности

$$d\sin\varphi = \pm\kappa\lambda, \qquad \kappa = 0, 1, 2\ \ldots,$$

где d – период (постоянная решетки); κ – номер главного дифракционного максимума в случае монохроматического света или порядок спектра в случае белого света; φ – угол отклонения лучей, соответствующий максимуму интенсивности.

4) Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \kappa N,$$

где Δλ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и λ + Δλ), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N – число щелей решетки.

5) Формула Вульфа-Брэггов

$$2d\sin\theta = \kappa\lambda,$$

где θ – угол скольжения (угол между направлением параллельного пучка рентгеновского излучения, падающего на кристалл, и атомной плоскостью в кристалле); d – расстояние между атомными плоскостями кристалла.

Примеры решения задач

Задача 1

На дифракционную решетку длиной 10 мм, имеющую 400 штрихов на 1 мм, падает нормально свет от разрядной трубки. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину (рис. 4) на плоский экран Э, удаленный от линзы на расстояние 1м. Определить: 1) ширину спектра первого порядка, если границы видимого спектра составляют 780 нм (красный край спектра) и 400 нм (фиолетовый край спектра); 2) число спектральных линий красного цвета, которые теоретически можно наблюдать с помощью данной дифракционной решетки; 3) в спектре какого порядка эта решетка может разрешить две линии с длиной волны, равной 500 нм и 500,1 нм?

Дано:

$l_0 = 10$ мм $= 10^{-2}$ м

$n = 400$ мм$^{-1} = 4\cdot10^5$ м$^{-1}$

$L = 1$ м

$\lambda_{кр} = 780$ нм $= 7{,}8\cdot10^{-7}$ м

$\lambda_{ф} = 400$ нм $= 4\cdot10^{-7}$ м

$\lambda_1 = 500$ нм $= 5\cdot10^{-7}$ м

$\lambda_2 = 500{,}1$ нм $= 5{,}001\cdot10^{-7}$ м

$l_1 = ?$ $\kappa_{кр} = ?$ $\kappa = ?$

Решение:

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму фиолетового цвета при дифракции света на решетке, определяется из условия

$$d\sin\varphi_1 = \kappa\lambda_ф \qquad (\kappa = 1), \tag{1}$$

следовательно,

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda_ф}{d}. \tag{2}$$

Аналогично для дифракционного максимума красного цвета получим:

$$\sin\varphi_2 = \frac{\lambda_{кр}}{d}. \tag{3}$$

Из рис. 4 следует, что расстояние от центра дифракционной картины до фиолетовой спектральной линии равно

$$l_1 = L\,\mathrm{tg}\,\varphi_1, \tag{4}$$

соответственно для красной спектральной линии

$$l_2 = L\,\mathrm{tg}\,\varphi_2. \tag{5}$$

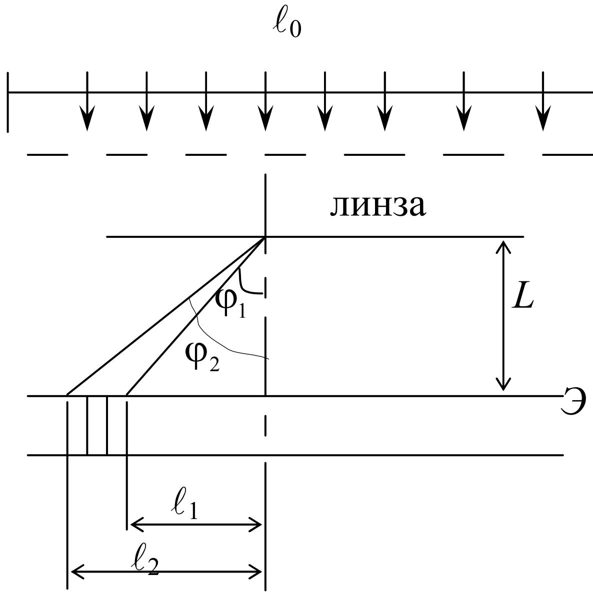


Рис. 4

Ширина спектра первого порядка будет $\Delta l = l_2 - l_1$ или с учетом формул (4) и (5)

$$\Delta l = L\,(\mathrm{tg}\ \varphi_2 - \mathrm{tg}\ \varphi_1). \qquad (6)$$

В случае малых углов φ, что имеет место для спектра первого порядка

$$\mathrm{tg}\varphi \cong \sin\varphi.$$

Поэтому, подставив выражения (2) и (3) в формулу (6), получим:

$$\Delta l = L\,(\frac{\lambda_{кр}}{d} - \frac{\lambda_{ф}}{d}). \qquad (7)$$

Зная число штрихов n на 1 мм решетки, найдем период решетки:

$$d = \frac{1}{n}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в формулу (7), получим:

$$\Delta l = nL\left(\lambda_{кр} - \lambda_{ф}\right). \qquad (9)$$

Произведем вычисления

$$\Delta l = 1 \cdot 4 \cdot 10^5\left(7{,}8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}\right) = 1{,}52 \cdot 10^{-1}\ \text{м} = 15{,}2\ \text{см}.$$

Для определений числа спектральных линий красного цвета найдем максимальное значение $к_{max}$, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей не может превышать 90° (sin 90° = 1). Из формулы (1) напишем:

$$\kappa = \frac{d\sin\varphi}{\lambda_{кр}},$$

следовательно, $\kappa_{max} \leq \dfrac{d}{\lambda_{кр}}$. С учетом (8) получим:

$$\kappa_{max} \leq \frac{1}{n\lambda_{кр}} = \frac{1}{4\cdot 10^5 \cdot 7{,}8\cdot 10^{-7}} = 3{,}3.$$

Так как число κ_{max} должно быть обязательно целым, то $\kappa_{max}= 3$. Влево и вправо от центра картины будет наблюдаться одинаковое число спектральных линий, равное $2\kappa_{max}$. Таким образом, общее число спектральных линий равно $2\kappa_{max} = 6$.

Так как разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \kappa N, \tag{10}$$

то минимальная разница длин волн двух спектральных линий, разрешаемых решеткой,

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{\kappa N}. \tag{11}$$

Две спектральные линии разрешены, если

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\lambda}{\kappa N}. \tag{12}$$

Полагая $\lambda = \lambda_1$, получаем

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\lambda_1}{\kappa N}. \tag{13}$$

Из выражения (13) следует, что спектральные линии разрешены в спектрах с порядком

$$\kappa \geq \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)N}. \tag{14}$$

Число щелей решетки определяется выражением $N = \dfrac{l_0}{d}$, или с учетом формулы (8)

$$N = l_0 n. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим:

$$\kappa \geq \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1) l_0 n}. \qquad (16)$$

Произведем вычисления

$$\kappa \geq \frac{5 \cdot 10^{-7}}{(5{,}001 - 5) \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{5}} = 1{,}25.$$

Так как κ – целое число, то $\kappa \geq 2$.

5.2.8. Поляризация света

1) Закон Брюстера

$$\mathrm{tg}\, i_1 = n_{21},$$

где i_1 – угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика луч полностью поляризован; $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

2) Закон Малюса

$$I = I_n \cos^2 \alpha,$$

где I_n – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; I – интенсивность этого света после анализатора; α – угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор и плоскостью пропускания анализатора (плоскостью поляризации).

3) Угол поворота плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

- в твердых телах

$$\varphi = \alpha d,$$

где α – постоянная вращения; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

- в растворах

$$\varphi = [\alpha_0]\rho d,$$

где α_0 – удельное вращение; ρ – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 1

Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через две призмы Николя, угол между плоскостями поляризации которых равен 60°. Потери света в каждой призме составляют 10 % (рис. 5).

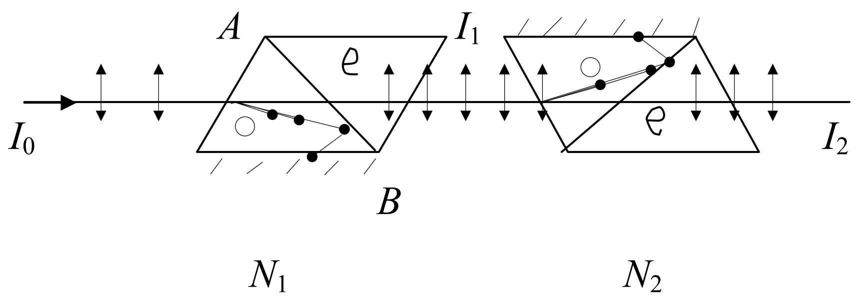


Рис. 5

Дано:	Решение:
$\alpha = 60^\circ$ $\kappa = 0{,}1$	В результате двойного лучепреломления естественный луч света, попадая на первую призму Николя (поляризатор), раздваивается на обыкновенный “о” и необыкновенный “е” лучи. Оба луча поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.
$\frac{I_0}{I_2} = ?$	

Обыкновенный луч, подчиняясь закону преломления, преломляется и, подойдя к слою канадского бальзама в призме (граница АВ), испытывает полное отражение и поглощается зачерненной боковой гранью призмы. Необыкновенный луч проходит через призму. Таким образом, на выходе поляризатора получается плоскополяризованный свет, интенсивность которого с учетом потерь на отражение и поглощение света поляризатором равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \kappa), \tag{1}$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поляризатор; κ – коэффициент, учитывающий потери на отражение и поглощение.

Плоскополяризованный луч света, падая на вторую призму Николя (анализатор), также расщепляется на обыкновенный и необыкновенный лучи. Обыкновенный луч полностью поглощается призмой. Необыкновенный луч проходит через призму. После прохождения анализатора интенсивность света уменьшается как за счет отражения и поглощения света анализатором, так и из-за несовпадения плоскости поляризации света с плоскостью пропускания анализатора. В соответствии с законом Малюса и с учетом потерь на отражение и преломление света интенсивность равна

$$I_2 = I_1(1-\kappa)\cos^2\alpha, \qquad (2)$$

где α – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора. Подставляя выражение (1) в (2), имеем

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1-\kappa)^2 \cos^2\alpha. \qquad (3)$$

Относительное уменьшение интенсивности света при прохождении света через 2 призмы Николя равно

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-\kappa)^2\cos^2\alpha}. \qquad (4)$$

Подставив в расчетную формулу (4) значение $\kappa = 0{,}1$; $\alpha = 60^\circ$, получим:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0{,}1)^2\cos^2 60^\circ} = 9{,}88.$$

5.3. Задание на контрольную работу № 4

401. Точка совершает гармонические колебания с периодом 2 с. Амплитуда колебаний 10 см. Найти смещение, скорость и ускорение точки спустя 0,2 с после ее прохождения через положение равновесия. Начало колебаний связано с положением равновесия.

402. Чему равно отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии для момента времени $t = T/12$, где T – период колебаний?

403. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с амплитудой смещения 0,04 м. При смещении 0,03 м сила упругости равна $9 \cdot 10^{-5}$ Н. Определить потенциальную и кинетическую энергии, соответствующие данному смещению, и полную энергию маятника.

404. Определить максимальное ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 15 см, если её наибольшая скорость равна 30 см/с. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна 60°.

405. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания равна 10 см/с, максимальное ускорение 100 см/с^2. Найти период и амплитуду колебаний.

406.Материальная точка массой 0,1 г совершает гармонические колебания с амплитудой 2 см и периодом 2 с. Начальная фаза колебаний равна нулю. Написать уравнение этих колебаний и определить максимальное значение скорости, а также максимальную силу, действующую на точку.

407. Материальная точка массой 20 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = 0{,}3\cos(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3})$, где смещение x – в метрах. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, полную механическую энергию точки и силу, действующую на точку в момент времени 2 с.

408. Материальная точка массой 0,01 кг совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид x=0,05sin6πt (смещение в сантиметрах, время в секундах). Найти возвращающую силу в момент времени $t = 5$ с, а также максимальную кинетическую энергию точки.

409. Найти максимальную кинетическую энергию материальной точки массой 2 г, совершающей гармонические колебания с амплитудой 4 см и частотой 5 Гц. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза 30°.

410. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, равна $9 \cdot 10^{-7}$ Дж. Амплитуда колебаний $2 \cdot 10^{-2}$ м. Определить смещение, при котором на тело действует сила $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ Н, и максимальную силу.

411. Период затухающих колебаний 4 с, логарифмический декремент затухания 1,6, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = \dfrac{T}{4}$ равно 4,5 см. Написать уравнение колебаний точки и построить его график в пределах двух периодов.

412. Уравнение колебаний тела имеет вид $x(t) = 0{,}3e^{-0{,}3t} \cos 5t.$ Определить моменты времени, в которые смещение максимально; вычислить добротность колебательной системы.

413. К вертикальной спиральной пружине подвешен стальной шарик радиусом 2 см. Циклическая частота его колебаний в воздухе 5 с$^{-1}$, а в некоторой жидкости – 4,06 с$^{-1}$. Начальное смещение 5 см. Определить коэффициент вязкости жидкости, записать уравнение колебаний шарика.

414. Гиря массой 0,5 кг подвешена к спиральной пружине жёсткостью 20 Н/м. и совершает колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания равен 0,004. Определить число полных колебаний, через которое амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза. Через какое время это произойдёт?

415. Чему равен логарифмический декремент затухания математического маятника, если за 1 минуту амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза? Длина маятника 1 м.

416. Коэффициент затухания успокоителя колебаний стрелки измерительного прибора равен 2с$^{-1}$. Через один период амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. Через сколько колебаний амплитуда составит 1 % от первоначальной?

417. Тело массой 1г совершает затухающие колебания с частотой 3,14 с$^{-1}$. В течение 50 с тело потеряло 80 % своей механической энергии. Определить коэффициент затухания, коэффициент сопротивления среды и добротность системы.

418. Определить период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы равен 1с и логарифмический декремент затухания равен 0,628.

419. Логарифмический декремент затухания маятника равен 0,003. Определить число колебаний, которое должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

420. За один период колебаний система теряет 97 % энергии. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний за это время? За какое время амплитуда уменьшится в 10 раз, если частота колебаний равна 14 $с^{-1}$?

421. Катушка с индуктивностью 30 мГн и резистор включены последовательно в цепь переменного тока с действующим значением напряжения 220 В и частотой 50 Гц. Найти сопротивление резистора и действующее значение напряжения на нем, если сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения $\pi/3$.

422. В цепь переменного тока с действующим значением напряжения 220 В и частотой 50 Гц включены последовательно конденсатор электроемкостью 1 мкФ и реостат с активным сопротивлением 300 Ом. Найти полное сопротивление цепи и действующее значение силы тока.

423. В цепь переменного тока с действующим значением напряжения 220 В и частотой 50 Гц включены последовательно резистор сопротивлением 100 Ом, конденсатор электроемкостью 32 мкФ и катушка индуктивностью 640 мГн. Найти действующее значение силы тока, сдвиг фаз между силой тока и напряжением и потребляемую мощность.

424. Катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения 10 $см^2$ включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Число витков катушки 3000. Найти активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз между силой тока и напряжением 60°.

425. Переменное напряжение, действующее значение которого 220 В, а частота 50 Гц, подано на катушку без сердечника индуктивностью 31,8 мГн и активным сопротивлением 10 Ом. Найти количество теплоты, выделяющейся в

катушке за одну секунду.

426. К зажимам генератора присоединен конденсатор электроемкостью 0,15 мкФ. Определить амплитудное значение напряжения на зажимах, если амплитудное значение силы тока 3,3 А, а частота тока составляет 5 кГц.

427. В катушке с активным сопротивлением 10 Ом при частоте переменного тока 50 Гц сдвиг фаз между колебаниями напряжения и силы тока равен 60^{o}. Определить индуктивность катушки.

428. Электропечь, сопротивление которой 22 Ом, питается от генератора переменного тока. Определить количество теплоты, выделяемое печью за 1 час, если амплитуда силы тока 10 А.

429. Сила тока в колебательном контуре изменяется со временем по закону $I = 0{,}02\sin 400\pi t$ (А). Индуктивность контура 0,5 Гн. Найти период собственных колебаний в контуре, электроемкость контура, максимальную энергию электрического и магнитного полей.

430. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Определить частоту колебаний, возникающих в контуре, если максимальная сила тока в катушке индуктивности 1,2 А, максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 1200 В, полная энергия контура 1,1 мДж.

431.Два одинаково направленных гармонических колебания с одинаковой частотой и амплитудами 3 см и 5 см складываются в одно колебание с амплитудой 7 см. Найти разность фаз складываемых колебаний.

432. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний 3 см и 4 см. Найти амплитуду результирующего колебания, если: 1) колебания совершаются в одном направлении; 2) колебания взаимно перпендикулярны.

433. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых имеют вид $x = \sin(t/2)$, $y = \cos t$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

434. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin\pi t$, $y = 4\sin(\pi t + \pi)$. Найти траекторию движения точки, построить ее с соблюдением масштаба.

435. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$. Найти траекторию точки, построить ее и указать направление движения точки.

436. Складываются два колебания одного направления с одинаковыми периодами, равными 1,5 с, и амплитудами, равными 2 см. Начальная фаза первого колебания равна $\frac{\pi}{2}$, второго $-\frac{\pi}{3}$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Записать его уравнение и построить векторную диаграмму.

437. Движение точки задано уравнениями $x = 10\sin\omega t$ и $y = 5\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. $\omega = 2\ \text{с}^{-1}$. Найти уравнение траектории. Вычислить скорость точки в момент времени 0,5 с.

438. Материальная точка участвует в двух колебаниях $x = 10\cos 3t$ и $y = 10\sin 3t$. Записать уравнение траектории, выражения для скорости и ускорения точки.

439. Смещение материальной точки по двум взаимно перпендикулярным направлениям описывается уравнениями $x = \sin 2t$ и $y = 5\sin(2t + 1{,}57)$. Записать уравнение траектории; найти зависимость линейной скорости от времени; вычислить максимальную скорость.

440. Складываются три колебания одного направления с одинаковыми периодами, равными 1,5 с; амплитудами, равными 3 см; фазами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$. Построить векторную диаграмму положения амплитуд. Определить из чертежа амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, записать его уравнение.

441. Уравнение плоской звуковой волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет вид $y = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$, где смещение y – в микрометрах. Определить длину волны, скорость распространения волны и максимальную скорость колебаний частиц среды.

442. Звуковые колебания, имеющие частоту 500 Гц и амплитуду 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Найти скорость распространения волны и максимальную скорость колебаний частиц воздуха.

443. Найти смещение от положения равновесия и скорость точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $\lambda/12$, для момента времени $T/6$. Амплитуда колебания 0,05 м.

444. Плоская звуковая волна возбуждается источником колебаний частотой 200 Гц. Амплитуда колебаний источника равна 4 мм. Написать уравнение волны, если в начальный момент смещение точек максимально. Найти смещение точек среды на расстоянии 1 м от источника в момент времени 0,1 с. Скорость звуковой волны 300 м/с. Затуханием пренебречь.

445. В воздухе распространяется плоская акустическая волна со скоростью 340 м/с. Смещение точек волны описывается уравнением $y(x,t) = 0{,}005\sin(1256t - 3{,}8x)$ см. Определить длину волны, амплитуду колебаний, скорость колебаний молекул воздуха, интенсивность волны.

446. Плоская звуковая волна имеет период 3 мс, амплитуду 0,2 мм и длину волны 1,2 м. Для точек среды, находящихся от источника колебаний на расстоянии 2 м, найти: смещение, скорость, ускорение точек в момент 7 мс.

447. Входной контур радиоприемника состоит из катушки индуктивностью 2 мГн и плоского конденсатора с площадью пластин 10 см^2 и расстоянием между ними 2 мм. Пространство между пластинами заполнено слюдой с диэлектрической проницаемостью 7. На какую длину волны настроен радиоприемник?

448. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором электроемкостью 1 мкФ наступает при частоте 4000 Гц. Если параллельно первому конденсатору подключить второй конденсатор, то резонансная частота становит-

ся равной 2000 Гц. Определить электроемкость второго конденсатора.

449. В однородной изотропной немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью равной 3 распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны 10 В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны.

450. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля волны 50 мВ/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и среднее за период колебаний значение плотности потока энергии.

451. Расстояние от щелей до экрана в опыте Юнга равно 1 м. Определить расстояние между щелями, если на отрезке длиной 1 см укладывается 10 темных интерференционных полос. Длина волны монохроматического света равна 0,7 мкм.

452. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны 590 нм. Свет падает по нормали к поверхности пластины. Между линзой и пластинкой находится жидкость с показателем преломления 1,33. Определить толщину зазора в том месте, где в отраженном свете наблюдается третье светлое кольцо.

453. В опыте Юнга расстояние между щелями равно 0,8 мм, длина волны света 0,7 мкм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

454. Радиус второго темного кольца Ньютона в отраженном свете равен 0,4 мм. Определить радиус кривизны плосковыпуклой линзы, взятой для опыта, если она освещается монохроматическим светом с длиной волны 0,5 мкм.

455. Расстояние между двумя когерентными источниками света равно 0,2 мм. Они удалены от экрана на расстояние 2 м. Найти длину волны, излучаемую когерентными источниками, если расстояние на экране между третьим и пятым минимумами интерференционной картины равно 1,2 см.

456. Между стеклянной пластиной и лежащей на ней плосковыпуклой линзой находится жидкость. Найти показатель преломления жидкости, если ра-

диус третьего темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете с длиной волны 0,5 мкм равен 0,85 мм. Радиус кривизны линзы равен 0,64 м.

457. В опыте Юнга на пути одного из лучей помещена тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная полоса сместилась в положение занятое 5-й светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки 1,5. Длина волны $6 \cdot 10^{-7}$ м. Какова толщина пластинки?

458. На стеклянную пластинку нанесен слой прозрачного вещества с показателем преломления 1,3. На пластинку падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны 640 нм. Какую минимальную толщину должен иметь слой, чтобы отраженные лучи были максимально ослаблены в результате интерференции?

459. Входное окно фотоприемника покрыто тонкой пленкой, материал которой имеет показатель преломления 1,25. Толщина пленки равна 0,20 мкм. На какой наибольшей длине волны достигается максимальное просветление входного окна фотоприемника?

460. На пути одного из лучей в опыте Юнга поставлена трубка длиной 2 м с плоскопараллельными основаниями. При заполнении трубки хлором вся интерференционная картина на экране сместилась на 20 полос. Вычислить показатель преломления хлора, считая, что показатель преломления воздуха 1,000276. Длина волны 589 нм.

461. Точечный источник света с длиной волны 0,5 мкм расположен на расстоянии 1 м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом 1 мм. Найти расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, находящейся на оси отверстия, для которой число зон Френеля в отверстии равно 3. Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

462. На щель шириной 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (длина волны равна 0,5 мкм). Определить ширину центрального максимума в дифракционной картине, наблюдаемой на

экране, удаленном от щели на расстояние 3 м.

463. На дифракционную решетку, содержащую 250 штрихов на 1 мм, падает нормально свет с длиной волны 0,6 мкм. Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка. Определить угол, под которым наблюдается последний дифракционный максимум.

464. Диафрагма с круглым отверстием диаметром 2,4 мм расположена на расстоянии 1 м от точечного источника света и 1,5 м от экрана. Длина волны источника света 0,6 мкм. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины?

465. Дифракционная решетка имеет такой период, что максимум первого порядка для длины волны 0,7 мкм соответствует углу 30^{o}. Какова длина волны света, который в спектре второго порядка имеет максимум под углом 45^{o}?

466. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения. Расстояние между атомными плоскостями равно 280 пм. Под углом 65° к атомной плоскости наблюдается дифракционный максимум первого порядка. Определить длину волны рентгеновского излучения.

467. Какую разность длин волн может разрешить дифракционная решетка длиной 2 см и периодом 5 мкм в области красных лучей (длина волны 0,7 мкм) в спектре второго порядка? Сколько дифракционных максимумов можно наблюдать с помощью этой решетки в случае падения на решетку монохроматического света с длиной волны 0,7 мкм?

468. На дифракционную решетку, содержащую 600 штрихов на 1 мм, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 1,2 м. Границы видимого спектра составляют 0,4 мкм – 0,78 мкм.

469. Расстояние между атомными плоскостями кристалла кальцита равно 0,3 нм. Определить, при какой длине волны рентгеновского излучения второй дифракционный максимум будет наблюдаться при отражении лучей под углом 30° к поверхности кристалла.

470. На дифракционную решетку падает нормально параллельный пучок белого света. Спектры третьего и четвертого порядков частично накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре четвертого порядка накладывается красная граница (длина волны 0,78 мкм) спектра третьего порядка?

471. Чему равен угол между плоскостями поляризации двух николей, если интенсивность естественного света, прошедшего через эту систему, уменьшилась в 5,4 раза? Считать, что каждый николь поглощает и отражает 14 % падающего на него света.

472. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 60°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

473. Угол между плоскостями поляризации николей равен 30°. Интенсивность естественного света, прошедшего такую систему, уменьшилась в 5 раз. Пренебрегая потерей света при отражении, определить коэффициент поглощения света в каждом из николей, считая их одинаковыми.

474. Раствор сахара с концентрацией, равной 200 кг/м^3, налитый в стеклянную трубку, поворачивает плоскость поляризации света, проходящего через раствор, на угол 45°. Другой раствор, налитый в такую же трубку, поворачивает плоскость поляризации на угол 30°. Определить концентрацию этого раствора.

475. Между двумя параллельными николями помещают кварцевую пластинку толщиной 1 мм, вырезанную параллельно оптической оси. При этом плоскость поляризации монохроматического света, падающего на поляризатор, повернулась на угол 20°. При какой минимальной толщине пластинки свет не пройдет через анализатор?

476. При прохождении естественного света через два николя, угол между плоскостями поляризации которых составляет 45°, происходит ослабление света. Коэффициенты поглощения света в поляризаторе и анализаторе соответственно равны 0,08 и 0,1. Найти, во сколько раз изменилась интенсивность света после прохождения этой системы.

477. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе

жидкости с воздухом равен 45°. Каким должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был полностью поляризован?

478. Пластинку кварца толщиной d_1 = 2 мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi = 53^o$. Определить толщину d_2 пластинки, при которой данный монохроматический свет не проходит через анализатор.

479. Между двумя николями установлена кварцевая пластинка толщиной 1 мм. Какой угол между главными плоскостями николей нужно установить, чтобы интенсивность света после прохождения через николи уменьшилась в 10 раз? Поглощением света в николях и кварцевой пластинке пренебречь. Постоянная вращения кварца равна 27 град/мм.

480. Луч света переходит из воды в алмаз так, что луч, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол между падающим и преломленным лучами.

6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5 “КВАНТОВАЯ ФИЗИКА”

6.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 5

В контрольную работу № 5 включены задачи на следующие темы: тепловое излучение; фотоэффект; строение атома; спектры атомов; элементы квантовой механики; физика твердого тела; физика атомного ядра; радиоактивность.

Для решенния задач 501...510 по теме “Тепловое излучение” необходимо изучить его основные характеристики: энергетическая светимость, спектральная поглощательная и излучательная способность тел. Особенно важно усвоить законы излучения абсолютно черного тела как оптимального излучателя для тепловых источников.

Приступая к решению задач 501...510 проработайте соответствующий материал по учебному пособию [1], с. 367...373.

Исследованию квантовой природы внешнего фотоэффекта и его закономерностей посвящено решение задач 511...520. Предварительно необходимо ознакомиться с данным явлением, рассмотреть вольт-амперную и световую характеристики, изучить этот материал по пособию [1], с. 376...381.

Решение задач 521...530 требует понимания квантовой природы спектров излучения атомов, на примере атома водорода. Следует уяснить, что излучение атомом света происходит при переходе электрона с высшего энергетического уровня на низкий. При этом излучается один квант (фотон), частота которого определяется разностью энергий соответствующих уровней. Если в задаче не указаны номера каких-либо энергетических уровней, то их можно определить по принадлежности излучения к той или иной части спектра. Проработайте этот материал по учебному пособию [1], с. 387...389, 412...426.

Задачи 531...550 на тему “Элементы квантовой механики” требуют понимания корпускулярно-волнового дуализма микрочастиц (знание волн де Бройля и их свойств), а также знание соотношения неопределенностей как границы применимости классических представлений к микрочастицам квантовой природы.

Приступая к решению этих задач проработайте материал данной темы по пособию [1], с. 393...398.

Задачи 551...560 относятся к теме “Физика твёрдого тела”. Здесь нужно обратить внимание на зонную структуру энергетических зон твердых тел, изучить зависимость проводимости полупроводников от температуры, ознакомиться с эффектом Холла по учебному пособию [1], с. 442...450.

Исследованию элементов физики атомного ядра посвящено решение задач 561...580.

Задачи 561...570 посвящены радиоактивному излучению и закону радиоактивного распада. Проработайте этот материал по учебному пособию [1], с. 471...474.

Решение задач 571...580 требует знания состава ядра, понятий дефекта массы и энергии связи ядра, характеристик ядерных сил.

Решение задач 571...580 требует понимания закономерностей ядерных реакций, в частности законов сохранения. Обратить внимание на способ определения энергии реакции деления ядер.

Приступая к решению этих задач ознакомьтесь с этим материалом по учебному пособию [1], ч. 484...493.

Табл. 5

Вариант	Номера задач							
0	501	511	521	531	541	551	561	571
1	502	512	522	532	542	552	562	572
2	503	513	523	533	543	553	563	573
3	504	514	524	534	544	554	564	574
4	505	515	525	535	545	555	565	575
5	506	516	526	536	546	556	566	576
6	507	517	527	537	547	557	567	577
7	508	518	528	538	548	558	568	578
8	509	519	529	539	549	559	569	579
9	510	520	530	540	550	560	570	580

6.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

6.2.1. Тепловое излучение

1. Энергетическая светимость тела R_e – это энергия, излучаемая единицей поверхности тела за единицу времени в диапазоне длин волн от 0 до ∞

$$R_e = \frac{\Phi}{t}.$$

2. Поток Φ, излучаемый (поглощаемый) телом, равен

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W – энергия, излучаемая (поглощаемая) телом; t – время.

3. Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e – энергетическая светимость (излучательность) абсолютно черного тела; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4) – постоянная Стефана-Больцмана; T – термодинамическая температура.

4. Первый закон Вина (закон смещения Вина)

$$\lambda_m = b/T,$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум излучения абсолютно черного тела; $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К – постоянная первого закона Вина.

5. Второй закон Вина

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = b' \cdot T^5,$$

где $(r_{\lambda,T})_{\max}$ – максимальная спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела; $b' = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт / (К$^5 \cdot$ м^3) – постоянная второго закона Вина.

Примеры решения задач

Задача 1

Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, 0,58 мкм. Определить энергетическую светимость поверхности тела.

Дано:	Решение:
$\lambda_m = 0{,}58$ мкм $= 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ м	Энергетическая светимость R_e абсолютно черного тела в соответствии с законом Стефана-Больцмана пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры и выражается формулой
R_e - ?	

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана; T – термодинамическая температура.

Температуру T можно вычислить с помощью закона Вина:

$$\lambda_m = b / T, \qquad (2)$$

где b – постоянная закона смещения Вина.

Используя формулы (2) и (1), получаем

$$R_e = \sigma(b/\lambda_m)^4.$$

Произведем вычисления

$$R_e = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{5{,}8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \text{ Вт/м}^2 = 3{,}54 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2 = 35{,}4 \text{ МВт/м}^2 \ .$$

6.2.2. Фотоэффект

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar\omega,$$

где h – постоянная Планка; $\hbar = h/2\pi$ – приведенная постоянная Планка; ν – частота фотона; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Импульс фотона

$$p = h/\lambda.$$

Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A – работа выхода электрона; $\frac{mv_{\max}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Красная граница фотоэффекта

$$\nu_o = A/h \quad \text{или} \quad \lambda_o = hc/A,$$

где ν_0 и λ_o – минимальная частота света и соответствующая длина волны, при которых еще возможен фотоэффект.

Примеры решения задач

Задача 1

Работа выхода материала фотокатода равна 3,4 эВ. Какова должна быть максимальная длина волны излучения, падающего на фотокатод, если фототок прекращается при разности потенциалов 1,2 В?

Дано:	Решение:
$A_{\text{вых}} = 3{,}4$ эВ $U_з = 1{,}2$ В	Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $$\varepsilon = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$
$\lambda_{\max} - ?$	где ε – энергия фотонов, падающих на поверхность фотокатода;

$A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона; $W_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Максимальная кинетическая энергия фотонов равна работе сил задерживающего электрического поля, т.е.

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_з,$$

где e – заряд электрона; $U_з$ – задерживающая разность потенциалов. Минимальная энергия фотонов, при которой возможен фотоэффект, равна $\varepsilon = h\frac{c}{\lambda_{max}}$,

где $\lambda_{\max}$ – максимальная длина волны фотонов.

Подставим полученные соотношения в уравнение Эйнштейна, получим:

$$h\frac{c}{\lambda_{\max}} = A_{\text{вых}} + eU_з$$, откуда находим $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{A_{\text{вых}} + eU_з}.$$

Подставим числовые значения

$$\lambda_{\max} = \frac{6{,}610^{-34} \cdot 310^{8}}{5{,}4 \cdot 10^{-19} + 1{,}6 \cdot 10^{-19} 1{,}2} = 2{,}710^{-7}\,\text{м}$$

6.2.3. Физика атома. Спектры атомов

1. Полная энергия электрона в состоянии, характеризуемом главным квантовым числом n

$$E_n = -\frac{E_i Z^2}{n^2}, \qquad (3)$$

где $E_i = Rhc$ – энергия ионизации атома водорода; Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева; $E_i = 13{,}5$ эВ.

2. Энергия, излучаемая или поглощаемая атомом водорода или водородоподобным ионом

$$E = h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} = Z^2 E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где n_1 и n_2 – главные квантовые числа, соответствующие энергетическим состояниям, между которыми совершается переход электрона.

3. Сериальная формула для определения длины волны спектра излучения атома водорода (или водородоподобного иона)

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где λ – длина волны фотона; R – постоянная Ридберга.

Примеры решения задач

Задача 1

Атом водорода перешел из возбужденного состояния, характеризуемого главным квантовым числом, равным трем, в основное. Определить возможные спектральные линии в спектре излучения водорода. Найти максимально возможную энергию фотона.

Дано:	Решение:
$n_1 = 1$ $n_2 = 3$	
λ - ? $\varepsilon_ф$ - ?	

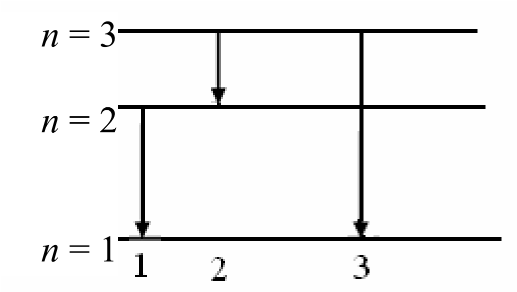


Рис. 1

Из рисунка видно, что при переходе атома из состояния, характеризуемого главным квантовым числом n = 3, в основное (n = 1), возможно излучение трех спектральных линий.

Для определения длины волны воспользуемся сериальной формулой для водородоподобных ионов

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где λ – длина волны фотона; R – постоянная Ридберга; Z – заряд ядра в относительных единицах (при Z = 1 формула переходит в сериальную формулу для водорода); n_1 – главное квантовое число состояния, в которое перешел атом; n_2 – главное квантовое число исходного состояния.

Найдем длину волны линии, излученной при переходе атома из состояния n_2 = 3 в состояние n_1 = 2, приняв постоянную Ридберга $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$:

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1{,}1 \cdot 10^7\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right), \ \lambda_1 = \frac{36}{5} \cdot \frac{10^{-7}}{1{,}1} = 0{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{м} = 0{,}65 \text{ мкм}.$$

Аналогично находим длину волны спектральной линии, излученной атомом при переходе из состояния $n_2 = 2$ в состояние $n_1 = 1$.

$$\frac{1}{\lambda_2} = 1{,}1 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right), \ \lambda_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{10^{-7}}{1{,}1} = 0{,}12 \cdot 10^{-6}\,\text{м} = 0{,}12\ \text{мкм}.$$

При переходе из состояния $n_2 = 3$ в состояние $n_1 = 1$ длина волны линии равна

$$\frac{1}{\lambda_3} = 1{,}1 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right), \ \lambda_3 = \frac{9}{8}\frac{10^{-7}}{1{,}1} = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{м} = 0{,}1\ \text{мкм}.$$

Энергия фотона определяется из выражения

$$\varepsilon_{\text{ф}} = hc/\lambda,$$

где h – постоянная Планка, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с, с – скорость света в вакууме, с = $3 \cdot 10^8$м/с.

Максимальная энергия фотона соответствует минимальной длине волны, следовательно

$$\varepsilon_{\text{ф}} = hc/\lambda_{\min} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-7}} = 2 \cdot 10^{-18}\,\text{Дж} = 12{,}3\ \text{эВ}.$$

6.2.4. Элементы квантовой механики

1. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p},$$

где p – импульс частицы.

2. Если кинетическая энергия частицы много меньше энергии покоя ($E_k << E_0$), то для определения импульса частиц можно пользоваться классическим выражением, т.е.

$$p = mv = \sqrt{2m_o E_k}\ ,$$

где кинетическая энергия частицы $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$.

3. Если кинетическая энергия частицы $E_k \geq E_0$, то импульс частицы следует вычислять по формуле релятивистской механики, т.е.

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k},$$

где $E_о$ – энергия покоя частицы; $E_к$ – кинетическая энергия частицы, равная

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

где m_0 – масса покоя частицы; v – скорость частицы.

4. Соотношения неопределенностей:

а) для координаты и импульса $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$,

где Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось x;

Δx – неопределенность координаты x;

б) для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$,

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Примеры решения задач

Задача 1

Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля для двух случаев: 1) U_1 = 51 В; 2) U_2 = 510 кВ.

Дано:	Решение:
U_1 = 51 В U_2 = 510 кВ = $5{,}1 \cdot 10^5$ В λ – ?	Длина волны де Бройля λ для частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой $$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1)$$ где h – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия $E_к$. Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше энергии ее покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы):

- в нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2mE_k}\ , \qquad (2)$$

- в релятивистском случае

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}\ , \qquad (3)$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется:

- в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}, \qquad (4)$$

- в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}. \qquad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов U_1 = 51 В и U_2 = 510 кВ, с энергией покоя электрона и, в зависимости от этого, решим, которую из формул – (4) или – (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, равна

$$E_к = eU.$$

В первом случае

$E_к = eU_1$ = 51 эВ = $0{,}51 \cdot 10^{-4}$ МэВ, что много меньше энергии покоя электрона, равной $E = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ.

Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Для упрощения расчетов заметим, что $E_к = 10^{-4}\ m_0c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} m_0 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{m_0 c}.$$

Учитывая, что h/m_oc есть комптоновская длина волны λ_k, получим:

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \lambda_k.$$

Так как λ_k = 2,43 пм, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} 2{,}43 \text{ пм} = 171 \text{ пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия

$$E_к = eU_2 = 510 \text{ кэВ} = 0{,}51 \text{ МэВ},$$

т.е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (5). Учитывая, что $E_к$ = 0,51 МэВ = m_oc^2, по формуле (5) найдем

$$\lambda_2 = \frac{h}{\frac{1}{c}\sqrt{\left(2m_0c^2 + m_0c^2\right)m_0c^2}} = \frac{h}{\sqrt{3m_0^2c^2}},$$

$$\text{или} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_k}{\sqrt{3}}.$$

Подставив значение λ_k и произведя вычисления, получим:

$$\lambda_2 = \frac{2{,}43}{\sqrt{3}} \text{ пм} = 1{,}40 \text{ пм}.$$

Задача 2

Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано:	Решение:
$E_к = 10$ эВ	Соотношение неопределенностей для координаты и
$l_{\min}$ - ?	импульса имеет вид $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$, где Δp_x – неопределенность импульса частицы (электрона); Δx – неопределенность

координаты частицы (в данном случае электрона); $\hbar = h/2\pi$ – приведенная постоянная Планка h.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l/2.$$

Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде

$$\frac{l}{2}\Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

откуда

$$l \geq \frac{\hbar}{\Delta p}.$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp, во всяком случае, не должна превышать значение самого импульса p, т. е. $\Delta p \leq p$.

Импульс p связан с кинетической энергией $E_к$ соотношением

$$p = \sqrt{2mE_k}\ .$$

Заменим Δp значением $\sqrt{2mE_k}$ (такая замена не увеличит l). Перейдем к равенству

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE}}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} \text{ м} = 1{,}16 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 116 \text{ пм}.$$

Задача 3. Оценить относительную ширину испускаемой спектральной линии, длина волны которой составляет 0,6 мкм, при переходе атома из возбужденного в основное состояние. Время жизни атома в возбужденном состоянии оставляет приблизительно $3\cdot10^{-7}$ с.

Дано:	Решение:
$\lambda = 0{,}6\ \text{мкм} = 6\cdot10^{-7}$ м $\Delta t = 3\cdot10^{-7}$ с	Выразим ширину испускаемой спектральной линии через энергию фотона с помощью формулы Планка:
$\dfrac{\Delta\nu}{\nu} - ?$	$\varepsilon = h\nu$, где ν – частота фотона; h – постоянная Планка; ε – энергия фотона, откуда $\Delta\nu = \dfrac{\Delta\varepsilon}{h}$.

Частота испускаемого фотона связана с длиной волны соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где c – скорость света в вакууме.

Искомая величина $\dfrac{\Delta\nu}{\nu}$ равна $\dfrac{\Delta\nu}{\nu} = \dfrac{\Delta\varepsilon\lambda}{hc}$.

Для нахождения $\Delta\varepsilon$ воспользуемся соотношением неопределенностей для энергии и времени $\Delta\varepsilon\Delta t \geq \hbar/2$,

где $\Delta\varepsilon$ – неопределенность энергии; Δt – время жизни атома в возбужденном энергетическом состоянии.

$$\Delta\varepsilon = \hbar/2\Delta t.$$

Подставим $\Delta\varepsilon$ в искомую величину, получим:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\lambda h}{2\pi\cdot hc\Delta t} = \frac{\lambda}{\pi\cdot c\cdot\Delta t}.$$

Подставим числовые значения и находим

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{6\cdot10^{-7}}{4\cdot3{,}14\cdot3\cdot10^{8}\cdot3\cdot10^{-7}} = 5{,}3\cdot10^{-10}.$$

6.2.5.Физика твердого тела

1. Удельная электропроводность полупроводника

$$\gamma = e(nu_n + pu_p),$$

где e – заряд электрона; n и p – концентрация носителей заряда (подвижных электронов и дырок); u_n и u_p – подвижности электронов и дырок.

В случае проводимости одного типа одним из слагаемых в выражении (1) можно пренебречь. Для чистого, беспримесного полупроводника проводимость называется собственной и в формуле для γ следует положить $n = p$.

2. Зависимость собственной удельной электропроводности полупроводника от температуры

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right),$$

где ΔE – ширина запрещенной зоны полупроводника; γ_0 – константа, почти не зависящая от температуры; k – постоянная Больцмана.

3. Холловская разность потенциалов равна

$$U_н = R_н \frac{B}{a} I,$$

где B – индукция магнитного поля; a – толщина образца; I – сила тока в образце; R_H – постоянная Холла.

4. Для полупроводника с кристаллической решеткой типа алмаза (Ge, Si) с примесной проводимостью одного типа постоянная Холла равна

$$R_H = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{ep}.$$

Примеры решения задач

Задача 1

До какой температуры нужно нагреть образец из арсенида галлия, находящегося при температуре 0 $^\circ C$, чтобы его проводимость возросла в 4 раза?

Дано:	Решение:
$T = 273\text{К}$ $\gamma_2 / \gamma_1 = 4$	Удельная проводимость полупроводников связана с температурой соотношением
$T = ?$	$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E / 2kT},$$

где γ – постоянная; ΔE – ширина запрещенной зоны; k – постоянная Больцмана.

Таким образом, $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = \dfrac{e^{-\Delta E / 2kT_2}}{e^{-\Delta E / 2kT_1}} = \exp\left[\dfrac{\Delta E}{2k}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)\right] = 4$.

Прологарифмируем выражение и получим:

$$\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \ln 4,$$

откуда

$$T_2 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{2\kappa \ln 4}{\Delta E}\right)^{-1}.$$

Полагая для арсенида галлия ΔE = 1,43 эВ, произведем вычисления

$$T_2 = \left(\frac{1}{273} - \frac{1{,}3810^{-23} \cdot 2 \cdot 0{,}69}{1{,}43 \cdot 1{,}610^{-19}}\right)^{-1} = 300\text{К}.$$

Задача 2

Некоторый примесный полупроводник имеет решетку типа алмаза и обладает только дырочной проводимостью. Определить концентрацию носителей и их подвижность, если постоянная Холла равна $3{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл. Удельная проводимость полупроводника 110 Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$.

Дано:	Решение:
$R_H = 3{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл $\gamma = 110$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$	Концентрация p дырок связана с постоянной Холла, которая для полупроводников с решеткой типа алмаза, обладающих носителями только одного знака, выражается формулой
n_p - ? u_p - ?	

$$R_н = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{ep},$$

где e – элементарный заряд.

Отсюда

$$p = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{eR_H}. \qquad (1)$$

Запишем все величины в единицах СИ: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $R_H = 3{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл.

Подставим числовые значения величин в формулу (1) и произведем вычисления

$$p = \frac{3 \cdot 3{,}14}{8}\frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4}}\ \text{м}^{-3} = 1{,}19 \cdot 10^{22}\ \text{м}^{-3}.$$

Удельная проводимость γ полупроводников выражается формулой

$$\gamma = e(nu_n + pu_p), \qquad (2)$$

где n и p – концентрации электронов и дырок; u_n и u_p – их подвижности.

При отсутствии электронной проводимости первое слагаемое в скобках равно нулю и формула (2) примет вид

$$\gamma = epu_p.$$

Отсюда искомая подвижность

$$u_p = \frac{\gamma}{ep}. \qquad (3)$$

Подставим в (3) выражение p по формуле (1)

$$u_p = \frac{8}{3\pi}\gamma R_H. \qquad (4)$$

Подставив в (4) значения γ и R_H и произведя вычисления, получим:

$$u_p = \frac{8}{3 \cdot 3{,}14} 110 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}) = 3{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

6.2.6. Физика атомного ядра. Радиоактивность

1. Обозначение ядра химического элемента:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X},$$

где X – химический символ элемента; A – массовое число (число нуклонов в ядре)

$$A = (Z + N);$$

Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

2. Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 exp(-\lambda t),$$

где N – число ядер, нераспавшихся к моменту времени t; N_o – число ядер в начальный момент времени ($t = 0$); λ – постоянная распада.

3. Связь периода полураспада с постоянной распада

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

4. В случае если интервал времени Δt, за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада $T_{1/2}$, то

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

5. Среднее время жизни τ радиоактивного ядра, т.е. интервал времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в е раз,

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

6. Число атомов N, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A,$$

где m – масса изотопа; μ – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро.

7. Активность A радиоактивного изотопа

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распавшихся за интервал времени dt; $A_о$ – активность изотопа в начальный момент времени.

В системе СИ единица активности препарата – *беккерель* (Бк)

1 Бк = 1 распад/с.

Внесистемная единица активности – *кюри* (Ки)

$$1 \text{ Ки} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

1 *Кюри* – это активность препарата изотопа радия-226 массой 1 г.

8. Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_я,$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_я$ – масса ядра.

9. Энергия связи ядра

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2,$$

где Δm – дефект массы ядра; c – скорость света в вакууме.

$$E_{св} = 931{,}5 \cdot \Delta m \text{ МэВ},$$

где дефект массы Δm выражен в атомных единицах массы (а.е.м.), 931,5 – энергетический эквивалент 1 а.е.м.

10. Удельная энергия связи равна $E_{св} / A$ [МэВ/нуклон].

Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $^{63}_{29}\text{Cu}$.

Решение:

Дефект массы

$\Delta m = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_я$, где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; Z – количество протонов; N – количество нейтронов в ядре; $m_я$ – масса ядра атома.

Так как в справочной литературе всегда приводятся массы нейтральных атомов m, но не ядер, формулу для дефекта массы целесообразно преобразовать.

Масса нейтрального атома $m = m_я + Zm_e$, где m_e – масса электрона.

Откуда $m_я = m - Zm_e$. Следовательно, дефект массы будет равен

$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m$.

Учитывая, что $(m_p + m_e) = m_{{}^1_1H}$, где $m_{{}^1_1H}$ – масса атома водорода, для дефекта массы окончательно получим выражение:

$$\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m.$$

В данной задаче для меди Z = 29, N = A – Z = 63 – 29 = 34

Δm = (29·1,00783 + 34·1,00867 – 62,92960) а.е.м. = 0,59191 а.е.м.

1 а.е.м. = $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

$\Delta m = 0{,}59191 \text{а.е.м.} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \dfrac{\text{кг}}{\text{а.е.м.}} = 0{,}98257 \cdot 10^{-27}$ кг

$E_{\text{связи}} = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}98257 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right)^2 = 8{,}84314 \cdot 10^{-11}$ Дж,

т.к. 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

$E_{\text{св.}} = 5{,}527 \cdot 10^{-8}$ эВ=552 МэВ.

Энергия связи, приходящаяся на 1 нуклон (удельная энергия связи),

$$\frac{E_{\text{св.}}}{A} = \frac{552\,\text{МэВ}}{63\,\text{нуклона}} = 8{,}76\frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}.$$

Примечание

Ответ 552 МэВ можно было получить короче, если учесть, что энергетический эквивалент 1 а.е.м. равен 931,5 МэВ, тогда

$E_{св.}$= 0,59191а.е.м.$\cdot$931,5 МэВ = 552 МэВ.

1а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

$1{,}6605655\,\text{кг} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}\right)^{2} = 14{,}9517 \cdot 10^{-11}\ \text{Дж} = 931{,}5\,\text{МэВ}$.

Задача 2

Определить начальную активность радиоактивного препарата магния-27 массой 0,2 мкг, а также его активность через 6 часов.

Дано:	Решение:
$m = 0{,}2$ мкг = $2 \cdot 10^{-10}$ кг $t = 6$ ч = $2{,}16 \cdot 10^{4}$ с $T_{1/2}$ =10 мин = 600 с $A_о$ - ? A - ?	Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа dN ядер, распавшихся за интервал времени dt, к этому интервалу

$$A = -\frac{dN}{dt}, \tag{1}$$

знак "–" показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Чтобы найти dN/dt, воспользуемся законом радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{2}$$

где N – число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе в момент времени t; $N_о$ – число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный (t = 0); λ – постоянная распада.

Продифференцируем выражение (2) по времени

$$dN/dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{3}$$

Исключив из формул (1) и (3) dN/dt, находим активность препарата в момент времени t

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{4}$$

Начальную активность A_o препарата получим при t = 0

$$A_o = \lambda N_о. \tag{5}$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \qquad (6)$$

Число $N_о$ радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν данного изотопа

$$N_о = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A, \qquad (7)$$

где m – масса изотопа; μ – молярная масса.

С учетом выражений (6) и (7) формулы (5) и (4) принимают вид:

$$A_0 = \frac{m}{\mu}\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A, \qquad (8)$$

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right). \qquad (9)$$

Произведя вычисления и учитывая, что $T_{1/2} =$ 600 с; ln2 = 0,693; t = 6 ч = $63{,}6 \cdot 10^3$ с = $2{,}16 \cdot 10^4$ с, получим:

$$A_0 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}}\frac{0{,}693}{600} 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ Бк} = 5{,}13 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = \frac{5{,}13 \cdot 10^{12}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} = 138 \text{ Ки},$$

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right) = 138 \exp\left(-\frac{0{,}693}{600} \cdot 2{,}16 \cdot 10^4\right) = 1{,}4 \text{ Ки}.$$

Задача 3

Определить расход урана-235 в ядерном реакторе атомной электростанции за 1 сутки. Электрическая мощность электростанции равна 15 МВт, КПД электростанции составляет 20 %. Считать, что при каждом акте деления ядра урана-235 выделяется энергия 200 МэВ.

Дано:	Решение:
$P_{\text{эл}} = 15$ МВт = $1{,}5 \cdot 10^7$ Вт $\eta = 20\% = 0{,}2$ $E = 200$ МэВ = $3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж t =1сутки = $8{,}6 \cdot 10^4$ с	КПД электростанции определяется из соотношения: $\eta = \dfrac{P_{\text{эл}}}{P_{\text{тепл}}} \cdot 100\%,$ откуда находим тепловую мощность станции: $P_{\text{тепл}} = \dfrac{P_{\text{эл}}}{0{,}2}.$
m-?	

Выразим тепловую энергию электростанции, вырабатываемую за время t:

$$P_{\text{тепл}} = \frac{W_{\text{тепл}}}{t} \Rightarrow W_{\text{тепл}} = P_{\text{тепл}} \cdot t = \frac{P_{\text{эл}}}{0{,}2} \cdot t .$$

Исходя из этих данных, найдем число распавшихся атомов N за сутки:

$$N = \frac{W_{\text{тепл}}}{E} = \frac{P_{\text{эл}} t}{0{,}2E} .$$

Выразим массу урана, распавшегося за сутки

$$N = \frac{m}{\mu} N_A ,$$

где N – количество атомов, распавшихся за сутки; μ – молярная масса урана ($\mu = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль); N_{A} – число Авогадро ($6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

$$m = \frac{N \cdot \mu}{N_A} = \frac{P_{\text{эл}} \cdot t \cdot \mu}{0{,}2 \cdot E \cdot N_A} .$$

Подставим числовые значения

$$m = \frac{N \cdot \mu}{N_A} = \frac{1{,}5 \cdot 10^7 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4 \cdot 235 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 3.2 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{23}} = 0{,}072 \text{ кг} .$$

6.3. Задание на контрольную работу № 5

501. Абсолютно черное тело имеет температуру 500 К. Какова будет температура тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в 5 раз? Исходя из формулы Планка, изобразить графически начальный и конечный спектры излучения.

502. Температура абсолютно черного тела равна 2000 К. Определить длину волны, на которую приходится максимум спектра энергии излучения, и спектральную плотность энергетической светимости для этой длины волны.

503. Определить температуру и энергетическую светимость абсолютно черного тела, если максимум энергии спектра излучения приходится на длину волны 600 нм.

504. Из смотрового окошечка печи излучается поток 4 кДж/мин. Определить температуру печи, если площадь окошечка равна 8 см^2.

505. Поток излучения абсолютно черного тела равен 10 кВт, а максимум спектра излучения приходится на длину волны 0,8 мкм. Определить площадь излучающей поверхности.

506. Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум видимого спектра излучения переместится с красной границы спектра 780 нм на фиолетовую 390 нм?

507. Вычислить энергию (в $кВт \cdot ч$), излучаемую за сутки с площади 0,5 м^2 нагревателя, температура которого 70 ^{o}C. Считать, что нагреватель излучает как серое тело с коэффициентом поглощения 0,3.

508. Печь, потребляющая мощность 1 кВт, имеет отверстие площадью 100 см^2. Определить долю мощности, рассеиваемую стенками печи, если температура ее внутренней поверхности равна 1000 К.

509. При остывании абсолютно черного тела максимум его спектра излучения сместился на 500 нм. На сколько градусов остыло тело? Начальная температура тела 2000 К.

510. Определить мощность, необходимую для накаливания вольфрамовой нити электролампы длиной 10 см и диаметром нити 1 мм до температуры 3000 К. Коэффициент поглощения нити 0,34.

511. Красная граница фотоэффекта для цинка составляет 310 нм. Определить максимальную кинетическую энергию (в электрон-вольтах) фотоэлектронов и задерживающую разность потенциалов, если на цинк падает ультрафиолетовое излучение с длиной волны 200 нм.

512. Фотоэлектроны, вылетающие с поверхности серебряной пластины, полностью задерживаются при приложении задерживающей разности потенциалов, равной 8 В. Найти длину волны излучения, падающего на фотокатод.

513. Фотон с энергией 10 эВ выбивает электроны из серебряной пластины. Определить импульс, полученный пластиной, если принять, что направления импульсов фотона и фотоэлектрона перпендикулярны поверхности пластины.

514. На поверхность фотокатода падает ультрафиолетовое излучение с длиной волны 0,3 мкм. Задерживающая разность потенциалов, при которой фототок прекращается, равна 1,6 В. Определить красную границу фотоэффекта.

515. Какова должна быть длина волны излучения, падающего на платиновую пластину, если максимальная скорость фотоэлектронов равна 3 Мм/с?

516. Ультрафиолетовое излучение с длиной волны 0,25 мкм, направленное на металлическую пластину, вызывает фототок, который прекращается при минимальной задерживающей разности потенциалов 0,96 В. Определить работу выхода электрона из металла.

517. На поверхность металла падает ультрафиолетовое излучение с длиной волны 0,1 мкм. Красная граница фотоэффекта равна 0,3 мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

518. На поверхность лития падает рентгеновское излучение с длиной волны 1 нм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов. Можно ли пренебречь работой выхода электрона?

519. Две пластины, одна из которых медная, а другая из неизвестного материала, освещаются ультрафиолетовым излучением из одного и того же источника. Для фотоэлектронов из медной пластины задерживающая разность потенциалов равна 2,4 В, а для неизвестной пластины она равна 4,2 В. Найти работу выхода электронов из неизвестного материала.

520. Красная граница фотоэффекта для вольфрама равна 275 нм. Определить задерживающую разность потенциалов для электронов, вырываемых из вольфрама светом с длиной волны 180 нм.

521. Фотон, соответствующий длине волны 0,020 мкм, выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Вычислить скорость электрона за пределами атома.

522. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в видимой области спектра излучения атома водорода.

523. Определить все возможные спектральные линии , возникающие при переходе атома водорода из возбужденного состояния с главным квантовым числом, равным 3, в основное.

524. Атом водорода в основном состоянии поглотил фотон с длиной волны 0,1215 мкм. Определить главное квантовое число возбужденного состояния атома водорода.

525. В водородоподобном ионе лития электрон перешел из состояния с главным квантовым числом, равным четырем, в состояние, характеризуемое главным квантовым числом, равным двум. Определить энергию кванта и длину волны излучения, испущенного ионом.

526. Какую наименьшую энергию должны иметь электроны, чтобы возбужденный этими электронами спектр водорода имел три спектральные линии?

527. Определить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода из возбужденного состояния с главным квантовым числом, равным трём, в основное состояние.

528. Определить диапазон длин волн монохроматического излучения, чтобы при возбуждении атома водорода этим излучением наблюдались три спектральные линии?

529. Как изменилась энергия электрона в атоме водорода при испускании атомом фотона с частотой $1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц?

530. Какой диапазон длин волн должно иметь монохроматическое излучение, чтобы при возбуждении атомов водорода этим излучением главное квантовое число возросло в 3 раза?

531. Определить неопределенность координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $2{,}0 \cdot 10^{6}$ м/сек, если относительная неопределен-

ность скорости равна 0,1. Сравнить полученную неопределенность с диаметром атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

532. Электрон с кинетической энергией 10 эВ находится в металлической пылинке диаметром 1 мкм. Оценить (в процентах) относительную неопределенность скорости электрона.

533. Если допустить, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, то какова будет относительная неопределенность импульса этой частицы?

534. Диаметр пузырька в жидководородной пузырьковой камере составляет величину порядка 10^{-7} м. Рассчитать неопределенность в измерении скоростей электрона и α-частицы в такой камере, если неопределенность координаты принять равной диаметру пузырька.

535. Используя соотношение неопределенностей, оценить наименьшую ошибку в определении импульса электрона и протона, если координаты этих частиц определяются с точностью 50 мкм.

536. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $1 \cdot 10^{-8}$ с. При переходе в основное состояние атом испустил фотон с длиной волны 0,5 мкм. Оценить энергию фотона и неопределенность его длины волны.

537. Атом испустил фотон с длиной волны 700 нм. Найти наибольшую точность, с которой может быть измерена длина волны излучения, если продолжительность излучения равна 40 нс.

538. Оценить относительное уширение спектральной линии $\frac{\Delta\nu}{\nu}$, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\sim 1 \cdot 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона, равная $6 \cdot 10^{-7}$ м.

539. Время жизни возбужденного ядра составляет величину порядка 0,5 нс, длина волны излучения равна 0,2 нм. С какой наибольшей точностью может быть определена энергия излучения?

540. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет примерно $2 \cdot 10^{-8}$ с. При переходе атома в основное состояние испускается фотон, длина волны которого составляет 0,5 мкм. Оценить относительную ширину $\Delta\lambda / \lambda$ испускаемой спектральной линии.

541. Найти длину волны де Бройля для электрона, если его кинетическая энергия равна энергии покоя.

542. Определить длину волны де Бройля для протона, движущегося со средней квадратичной скоростью при T = 300 К.

543. α-частица движется в однородном магнитном поле с индукцией 5 мТл по окружности радиусом 0,8 м. Определить длину волны де Бройля α-частицы.

544. Длина волны де Бройля протона равна 2 нм. Какую ускоряющую разность потенциалов прошел протон?

545. Кинетическая энергия нейтрона равна 2 МэВ. Определить длину волны де Бройля нейтрона.

546. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Определить длину волны де Бройля для такого протона.

547. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 1,0 нм?

548. Найти длину волны де Бройля нейтрона, кинетическая энергия которого равна удвоенной энергии покоя.

549. Кинетическая энергия протона равна 1876 МэВ. Как и во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия уменьшится в два раза?

550. Определить длину волны де Бройля протона, движущегося в магнитном поле с индукцией 1мТл по окружности радиусом 10 см.

551. Как изменится удельное сопротивление чистого арсенид-галлиевого образца при нагреве его от комнатной температуры до 400 К?

552. Определить ширину запрещенной зоны полупроводниковой пластины, если при нагревании от 0 до 10 градусов Цельсия её удельное сопротивление уменьшилось в 2,28 раз. Из какого материала изготовлена пластина?

553. Перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 0,1 Тл, помещена тонкая пластинка из примесного кремния. Толщина пластинки соответствует 400 мкм. Определить плотность тока, при которой холловская разность потенциалов достигнет значения 0,5 В. Постоянную Холла для кремния принять равной 0,3 м^3/Кл.

554. Удельное сопротивление кремния *p*-типа равно 10^{-2} Ом$\cdot$м. Определить концентрацию дырок и их подвижность. Принять постоянную Холла равной $4\cdot10^{-4}$ м^3/Кл.

555. Тонкая пластинка из кремния р-типа толщиной 200 мкм расположена перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией 0,5 Тл. При плотности тока 2 мкА/мм^2, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов оказалась равной 2,8 В. Определить концентрацию носителей тока.

556. Концентрация носителей тока в чистом кремнии равна $5\cdot10^{10}$ см$^{-3}$. Определить сопротивление кремниевого стержня длиной 2 см и сечением 1 мм^2 при комнатной температуре.

557. Вычислить постоянную Холла для кремния р-типа, если его удельное сопротивление равно 0,2 Ом$\cdot$м.

558. Кристалл из чистого германия, ширина запрещенной зоны которого равна 0,72 эВ, нагревают от температуры 0 $^{\circ}$С до температуры 15 $^{\circ}$С. Во сколько раз возрастает его удельная проводимость?

559. При нагревании кристалла из чистого кремния от температуры 0 $^{\circ}$С до температуры 10 $^{\circ}$С его удельная проводимость возрастает в 2,28 раза. По этим данным определить ширину запрещенной зоны кристалла кремния.

560. Найти удельное сопротивление чистого германиевого образца при температуре 100 $^{\circ}$С, если при 20 $^{\circ}$С оно составляет величину 0,5 Ом$\cdot$м.

561. Определить, какая доля радиоактивного изотопа ${}^{225}_{89}\mathrm{Ac}$ распадается в течение 6 суток.

562. Активность некоторого изотопа за 10 суток уменьшилась на 20 %. Определить период полураспада этого изотопа.

563. Определить массу изотопа ${}^{131}_{53}\mathrm{I}$, имеющего активность, равную 37 ГБк.

564. Найти среднюю продолжительность жизни атома радиоактивного изотопа кобальт ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$.

565. Счетчик α-частиц, установленный вблизи радиоактивного изотопа, при первом измерении регистрировал 1400 частиц в минуту, а через 4 часа только 400 частиц. Определить период полураспада изотопа.

566. Во сколько раз уменьшится активность изотопа ${}^{32}_{15}\mathrm{P}$ через 20 суток?

567. На сколько процентов уменьшится активность изотопа ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$ за 7 минут?

568. Определить число ядер, распадающихся в течение времени: 1) t_1 = 1 мин; 2) t_2 = 5 сут, – в радиоактивном изотопе фосфора ${}^{32}_{15}\mathrm{P}$ массой, равной 1 мг.

569. Из каждого миллиона атомов радиоактивного изотопа каждую секунду распадается 200 атомов. Определить период полураспада изотопа.

570. Найти период полураспада радиоактивного изотопа, если его активность за 10 суток уменьшилась на 24 % по сравнению с первоначальной.

571. Считая, что в одном акте деления ядра ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ освобождается энергия 200 МэВ, определить энергию, выделяющуюся при делении одного килограмма изотопа ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, и массу каменного угля с удельной теплотой сгорания 30 кДж/г, эквивалентную в тепловом отношении одному килограмму ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$.

572. При бомбардировке изотопа ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ дейтронами образуются две α-частицы, при этом выделяется энергия 22,3 МэВ. Зная массы дейтрона и α- частицы, найти массу изотопа ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ в атомных единицах массы.

573. Найти дефект массы и энергию связи трития $_{1}^{3}\mathrm{H}$. Какой процент от энергии покоя ядра составляет его энергия связи?

574. Найти удельную энергию связи $_{1}^{2}\mathrm{H}$ и $_{2}^{3}\mathrm{He}$. Какое из этих ядер более устойчиво?

575. Найти минимальную энергию γ- кванта, достаточную для осуществления реакции деления первоначально покоившегося дейтрона γ- лучами: $_{1}^{2}\mathrm{H} + h\nu \rightarrow {}_{1}^{1}\mathrm{H} + {}_{0}^{1}n$.

576. Найти электрическую мощность атомной электростанции, расходующей 0,1 кг урана-235 в сутки, если КПД станции равен 30 %. Считать энергию, выделяющуюся при одном акте деления ядра урана-235, равной 200 МэВ.

577. Найти тепловую мощность атомного реактора, расходующего 0,1 кг урана-235 в сутки. Считать энергию, выделяющуюся при одном акте деления ядра урана-235, равной 200 МэВ.

578. Найти электрическую мощность атомной электростанции при условии, что убыль массы ТВЭЛ-ов (стержней, содержащих ядерное горючее) составляет 100 г в сутки. КПД станции равен 31 %.

579. Найти электрическую мощность атомного реактора, расходующего 0,1 кг урана-235 в сутки. КПД реактора составляет 18%. Считать энергию, выделяющуюся при одном акте деления ядра урана-235, равной 200 МэВ.

580. Определить КПД атомной станции мощностью 20 МВт, если суточный расход ядерного горючего при работе станции составляет 75 г урана-235. Считать, что при каждом акте деления ядра урана-235 выделяется энергия 200 МэВ.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 ФИЗИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

7.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 6

Контрольная работа включает задания по следующим темам дисциплины “Физика твёрдого тела”: пространственная решетка кристалла; теплоемкость и теплопроводность кристаллов; электронный газ в металлах; собственные и примесные полупроводники, *p–n*-переход; диффузия носителей тока; эффект Холла.

Задачи с 1 по 13 относятся к теме “Пространственная решётка кристалла”. Приступая к решению этих задач проработайте материал пособия [3], с. 12...18. Выпишите и разберите такие определения как: узел решётки, атомная плоскость, элементарная ячейка, трансляции, типы решёток, координационное число, индексы Миллера.

Задачи с 14 по 27 относятся к теме “Теплоемкость и теплопроводность кристаллов”. Проработайте материал пособия [3], с. 44...61. Рассмотрите и усвойте понятия: нормальные колебания решётки, фононы, дебаевская частота и дебаевская температура, закон Дюлонга-Пти.

Задачи с 28 по 31 относятся к теме “Электронный газ в металлах”. Проработайте материал пособия [3], с. 32...42.

Задачи с 32 по 46 относятся к теме “Собственные и примесные полупроводники”. Проработайте материал пособия [3], с.86...106.

Задачи с 47 по 51 и с 57 по 61 относятся к теме “Диффузия носителей тока. *p–n*-переход”. Проработайте материал пособия [3], с. 106...109. и с. 113...117.

Задачи с 52 по 56 относятся к теме “Эффект Холла”. Проработайте материал пособия [3], с. 117...119.

Табл. 6

Вариант	Номера задач							
0	601	608	612	614	621	628	635	642
1	602	611	617	623	631	640	649	658
2	603	609	615	619	630	641	648	659
3	604	610	616	622	634	647	651	660
4	605	613	618	624	629	637	645	661
5	606	620	632	639	642	646	652	657
6	607	625	633	636	643	653	654	656
7	603	615	626	638	647	655	659	661
8	607	616	627	644	650	656	658	660
9	602	614	624	631	640	649	654	657

7.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач

7.2.1. Пространственная решетка кристалла

1. Координаты любого узла решетки записываются в виде

$X_1 = n_1 a_1; Y_2 = n_2 a_2;\ Z_3 = n_3 a_3$ и обозначаются: [[$n_1n_2n_3$]], где a_i – основные периоды решетки; n_i – целые числа, называемые индексами узла и обозначающие число периодов решетки, соответствующих данному узлу, $i = 1, 2, 3$.

Для описания направления в кристалле выбирают прямую, проходящую через начало координат. Ее направление однозначно определяется индексами направления [$n_1n_2n_3$], где n_i – индексы ближайшего к началу координат узла решетки.

2. Период идентичности вдоль прямой, заданной индексами [$n_1n_2n_3$], в кубической решетке выражается соотношением

$$l = a\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\ ,$$

где a – параметр решетки.

3. Кристаллографические плоскости определяются тремя взаимно простыми целыми числами (hkl), называемыми индексами Миллера. Они определяют систему бесконечного числа параллельных между собой плоскостей, каждая из которых характеризуется определенным значением числа

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом, кристаллографическая плоскость однозначно задается совокупностью чисел $\{(hkl), q\}$. Для отрицательных индексов над (или под) буквой ставится знак минус, например $\bar{h}$. Индексы $[[n_1 n_2 n_3]]$ любого узла, лежащего в данной плоскости, удовлетворяют соотношению:

$$n_1 h + n_2 k + n_3 l = q.$$

При $q = 0$ плоскость проходит через начало координат.

Если плоскость параллельна какой-либо оси координат, то соответствующий индекс Миллера равен нулю. Так, плоскость (110) параллельна оси z, а плоскость (100) параллельна плоскости (yz).

4. Расстояние D плоскости от начала координат определяется числом q

$$D = q/b_0,$$

где

$$\vec{b}_0 = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3,$$

где b_0 – вектор обратной решетки; $\vec{b}_i$ (i = 1,2,3) – базисные векторы обратной решетки

$$\vec{b}_1 = V_c^{-1}[\vec{a}_2\vec{a}_3],\ \vec{b}_2 = V_c^{-1}[\vec{a}_3\vec{a}_1],\ \vec{b}_3 = V_c^{-1}[\vec{a}_1\vec{a}_2];$$

V_c – объем элементарной ячейки кристалла.

Из выражения $D = q / b_0$ следует, что расстояние d между соседними плоскостями ($\Delta q = 1$) с индексами (hkl) равно:

$$d = \left(h^2 b_1^2 + k^2 b_2^2 + l^2 b_3^2\right)^{-1/2}.$$

5. Кристаллические плоскости отсекают на осях координат отрезки, равные

$$x_q = a_1 q/h,\ \ y_q = a_2 q/k,\ \ z_q = a_3 q/l$$

Очевидно, что если q/h, q/k и q/l – целые числа, то плоскость пересекает соответствующую координатную ось в узловой точке.

6. Молярный объем кристалла

$$V_\mu = \mu/\rho,$$

где μ – молярная масса; ρ – плотность кристалла.

7. Объем элементарной ячейки в случае кубической сингонии

$$V_{эл} = a^3,$$

где a – параметр решетки.

8. Число элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_\mu = V_\mu / V_{эл}$$

Если кристалл состоит из одинаковых атомов, то

$$Z_\mu = N_A / n,$$

где N_A – число Авогадро; n – число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку.

9. Число элементарных ячеек в единице объема кристалла

$$Z = Z_\mu / V_\mu.$$

Если кристалл состоит из одинаковых атомов, то

$$Z = \rho N_A / (n\mu)$$

10. Параметр решетки, состоящей из одинаковых атомов

$$a = (n\mu / \rho N_A)^{1/3}$$

Расстояние между соседними атомами в кубической решетке:

а) в простой $d = a$;

б) в гранецентрированной $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

в) в объемноцентрированной $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

11. Число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку:

а) простая кубическая решетка $n = 1$;

б) гранецентрированная кубическая решетка $n = 4$;

в) объемноцентрированная кубическая решетка $n = 2$.

Примеры решения задач

Задача 1

Определить параметр решетки и плотность кристалла кальция, если расстояние между ближайшими соседними атомами равно 0,393 нм. Решетка кубическая, гранецентрированная.

Дано:

$N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$d = 0{,}393 \cdot 10^{-9}$ м

$n = 4$

---

a =? ρ = ?

Решение:

Параметр решетки a и расстояние d между двумя ближайшими соседними атомами связаны соотношением:

$$a = d\sqrt{2}.$$

Подставляя в это выражение числовые значения, получим:

$$a = 5{,}56\ 10^{-10}\ \text{м}.$$

Плотность кристалла

$$\rho = \mu n/(N_А a^3) = 1{,}55 \cdot 10^3\ \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Задача 2

Вычислить период идентичности l вдоль прямой [2 3 1] в решётке NaCl, если плотность кристалла равна 2,17 г/см^3. Решётка гранецентрированная кубическая.

Дано:

$n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$

$\rho = 2{,}17 \cdot 10^3$ кг/м^3

---

l = ?

Решение:

Постоянная решетки кристалла NaCl равна

$$a = (n\mu/(\rho N_А))^{1/3} \qquad (1)$$

Число Авогадро $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \dfrac{1}{\text{моль}}$.

Для гранецентрированной решетки число узлов в элементарной ячейке $n = 4$. Пользуясь таблицей Менделеева, находим: A(Na) = 23, A(Cl) = 35. Следовательно, M(NaCl) = 58, откуда молярная масса NACl:

$$\mu(\text{NaCl}) = 58 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}.$$

Подставляя числа в формулу (1), получаем

$$a = 5{,}62\ 10^{-10}\ \text{м}.$$

Период идентичности кристалла вдоль прямой [231]

$$l = a(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} = 5{,}62 \cdot 10^{-10}\ (4 + 9 + 1)^{1/2} = 13{,}3\ 10^{-10}\ \text{м}$$

Задача 3

Написать индексы Миллера для плоскости, проходящей через узлы с индексами: $[[010]]$, $[[12\underline{2}]]$, $[[132]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

Дано:	Решение:
Индексы узлов: $[[010]]$, $[[12\underline{2}]]$, $[[132]]$.	Для любого узла с индексами $[[n_1 n_2 n_3]]$, лежащего в данной плоскости, индексы Миллера (hkl) удовлетворяют соотношению:
(hkl) =?, x_q=?, y_q=?, z_q=?	$n_1 h + n_2 k + n_3 l = q,$ (1)

где h, k, l, q – целые числа. Подставляя в уравнение (1) последовательно индексы всех трех узлов, получаем систему уравнений:

$$k = q$$

$$h + k - 2l = q$$

$$h + 3k + 2l = q$$

Решая эту систему в целых числах, получаем: $h = -6$, $k = 4$, $l = -1$; $q = 4$, т.е. данная плоскость задается индексами: $\{(\underline{6}4\underline{1});4\}$. Она отсекает на осях координат отрезки, равные

$$x_0 = a_1 q/h = -2/3\ a_1;\ \ y_0 = a_2 q/k = a_2;\ \ z_0 = -4a_3,$$

где a_i (i = 1,2,3) – основные периоды решетки. Плоскость пересекает оси y и z в узловых точках.

7.2.2. Теплоемкость и теплопроводность кристаллов

1. Согласно закону Дюлонга и Пти, молярная теплоемкость химически простых твердых тел при температурах, больших температуры Дебая Θ_D:

$$C_\mu = 3R,$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К) универсальная газовая постоянная.

Для химически сложных тел (состоящих их атомов различных химических элементов) – закон Неймана-Коппа:

$$C_\mu = 3nR,$$

где n – общее число частиц в химической формуле соединения.

2. Удельная теплоемкость:

- для химически простых

$$c = C_\mu/\mu;$$

- для химически сложных веществ

$$c = 3nR/\sum_i \mu_i .$$

3. Энергия фонона ε связана с круговой частотой колебаний ω соотношением

$$\varepsilon = \hbar\omega,$$

где $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с.

4. Квазиимпульс фонона

$$p = h/\lambda,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с

5. Скорость v фонона (скорость звуковых волн в кристалле в пренебрежении дисперсией)

$$v = \omega\lambda/(2\pi).$$

6. Частота Дебая (максимальная частота колебаний кристаллической решетки)

$$\omega_D = v\,(6\pi^2 n)^{1/3},$$

где $n = N/V$ – концентрация атомов в кристалле,

$$n = N_{\text{A}}\rho/\mu,$$

где ρ – плотность кристалла; μ – молярная масса.

7. Температура Дебая:

$$\Theta_D = \hbar\omega_D / k,$$

где k – постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

8. Поток тепловой энергии Q, проходящий через поперечное сечение S стержня в единицу времени

$$Q = -\lambda(dT/dx)S,$$

где λ – теплопроводность; dT/dx – градиент температуры.

$$\lambda = \; v_{\text{ф}} \, l C_V / 3,$$

где $v_{\text{ф}}$ – групповая скорость фононов; l – средняя длина свободного пробега фононов между двумя последовательными столкновениями; C_V – теплоемкость единицы объема.

9. Молярная теплоемкость кристаллической решетки при температуре $T \ll \Theta_D$:

$$C_\mu = 12\pi^4 R\,(T/\Theta_D)^3/5 = 234R(T/\Theta_D)^3.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить по классической теории теплоемкость кристалла бромида алюминия ($AlBr_3$) объемом 200 см^3. Плотность кристалла бромида алюминия равна 3,01 г/см^3. Условие $T > \Theta_D$ считать выполненным.

Дано:

$V = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3

$\rho = 3{,}01 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м$^{-3}$

$C = ?$

Решение:

Химическая формула соединения $AlBr_3$ содержит четыре атома ($n = 4$).

Поэтому, согласно закону Неймана-Коппа, молярная теплоемкость кристалла:

$$C_\mu = n\,3R = 99{,}7 \text{ Дж/моль К}.$$

Теплоемкость всего кристалла

$$C = C_\mu m/\mu = C_\mu \rho V/\mu = 12R\rho V/\mu. \qquad (1)$$

По таблице Менделеева находим: A(Al) = 27, A(Br) = 80, следовательно $M(AlBr_3) = 267$, а $\mu = 0{,}267$ кг/моль. Подставляя в формулу (1) числа, получаем

$$C = 225 \text{ Дж/К}.$$

Задача 2

Вычислить длину волны фононов в свинце, соответствующую частоте $\omega = 0{,}1\omega_D$, если плотность свинца 11,3 г/см^3, а молярная масса 207 г/моль.

Дано:	Решение:
$\rho = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\mu = 207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\omega = 0{,}1\ \omega_D$	Частота Дебая (максимальная частота колебаний кристаллической решетки) определяется выражением:
$\lambda_Ф = ?$	$$\omega_D = v(6\pi^2 n)^{1/3}, \qquad (1)$$

где v – средняя скорость распространения колебаний (скорость звука) в кристалле; n – концентрация атомов в кристалле,

$$n = N_A \rho/\mu\ . \qquad (2)$$

В пренебрежении дисперсией звука в кристалле:

$$\lambda_Ф = 2\pi\, v/\omega,$$

или, согласно условию задачи,

$$\lambda_Ф = 20\pi\, v/\omega_D.$$

Окончательно, пользуясь формулами (1) и (2), получаем

$$\lambda_Ф = 20\pi(6\pi^2 N_A \rho/\mu)^{-1/3} \qquad (3)$$

Подставляя в формулу (3) $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ и числовые данные из условия задачи, будем иметь: $\lambda_Ф = 5 \cdot 10^{-9}$ м.

Задача 3

Определить температуру Дебая для серебра, если известно, что для нагревания серебра массой 15 г от температуры 5 К до температуры 10 К надо затратить количество тепла $6{,}8\cdot 10^{-2}$ Дж. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

Дано:

$m = 0{,}015$ кг

$Q = 6{,}8\ 10^{-2}$ Дж

$T_1 = 5$ К

$T_2 = 10$ К

$\Theta_D = ?$

Решение:

Так как по условию задачи $T \ll \Theta$, то можно воспользоваться формулой Дебая:

$$C_\mu = (12/5)\pi^4 R(T/\Theta_D)^3 = 234\mathrm{R}(T/\Theta_D)^3 \qquad (1)$$

Теплоемкость C тела связана с молярной теплоемкостью C_μ соотношением:

$$C = C_\mu m/\mu \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и интегрируя по температуре от T_1 до T_2, получаем

$$Q = (3\pi^4 mR/5\mu\Theta_D{}^3)\ [T_2{}^4 - T_1{}^4]. \qquad (3)$$

Выразим из формулы (3) температуру Дебая:

$$\Theta_D = ((3\pi^4 mR/5\mu Q)[T_2{}^4 - T_1{}^4])^{1/3}. \qquad (4)$$

Произведем вычисления по формуле (4), учтя, что у серебра молярная масса равна $\mu = 0{,}108$ кг/моль: $\Theta_D = 210$ К.

7.2.3. Электронный газ в металлах

1. Концентрация электронов $dn(\varepsilon)$, энергия которых заключена в интервале значений от E до $E + dE$:

$$dn(E) = (2m^*)^{3/2}\ (2\pi^2\hbar^3)^{-1}\ E^{1/2}\ (e^{(E-E_F)kT} + 1)^{-1},$$

где m^* и E – эффективная масса и энергия электрона; $\mu = E_F$ – энергия Ферми.

2. При $T = 0$

$$E_F = (\hbar^2/2m^*)\ (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

3. Средняя энергия электронов при $T = 0$:

$$\langle E \rangle = 3/5\ E_F$$

4. Температура Ферми

$$T_F = \frac{E_F}{k}.$$

5. Температура вырождения

$$T_в = 4/(9\pi)^{1/3} T_F = 1{,}313 T_F.$$

Примеры решения задач

Задача 1

Определить температуру вырождения для калия, если считать, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность калия $\rho = 860$ кг/м^3.

Дано:	Решение:
$\rho(K) = 860$ кг/м^3	Температура вырождения $T_В$ согласно квантовой теории электронов в металле определяется выражением:
$T_В$ = ?	$T_В = h^2 n^{2/3}/(2\pi k m)$, (1)

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $k = 1{,}38\ 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг – масса электрона; n – концентрация квазисвободных электронов в металле. Согласно условию, n равно концентрации N атомов, которая определяется выражением:

$$N = N_А \rho/\mu, \quad (2)$$

где $N_А$ – число Авогадро; ρ – плотность кристалла; μ – молярная масса калия. По таблице Менделеева: $\mu = 39 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Полагая $n = N$ и подставляя выражение (2) в формулу (1) с учетом приведенных выше числовых данных окончательно получаем

$$T_В = 3{,}12\ 10^4\ К.$$

7.2.4. Собственные и примесные полупроводники

Собственные полупроводники

1. Концентрация электронов в зоне проводимости

$$n = 2(2\pi m_n kT)^{3/2} h^{-3} \exp[-(E_c - E_F)/(kT)] = N_c \exp[(\mu - E_c)/(kT)],$$

где N_c – эффективное число состояний (т.е. плотность состояний), приведенное ко дну зоны проводимости; $(E_F - E_c)$ энергия Ферми, отсчитанная от дна зоны проводимости; $k = 1{,}38\ 10^{-23}$ Дж/К постоянная Больцмана; T – температура полупроводника в кельвинах; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка; m_n – эффективная масса электрона.

2. Концентрация дырок в валентной зоне

$$p = 2(2\pi m_p kT)^{3/2} h^{-3} \exp[(E_V - E_F)/(kT)] = N_V \cdot \exp[(E_V - E_F)/(kT)],$$

где N_V – эффективное число состояний валентной зоны, приведенное к потолку зоны; $(E_V - E_F)$ – энергия Ферми, отсчитанная от потолка валентной зоны; E_V – энергия, соответствующая потолку валентной зоны; m_p – эффективная масса дырок.

3. Равновесная концентрация носителей в собственных полупроводниках

$$n_i = n = p = (N_c N_V)\exp[-E_g/(kT)],$$

где E_g – ширина запрещенной зоны полупроводника.

4. Положение уровня Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F - E_c = -E_g/2 + kT/2\ln(N_V/N_c)$$

или

$$E_F - E_c = -E_g/2 + 3kT/4\ln(m_n/m_p).$$

При $T = 0$ или $m_n = m_p$ уровень Ферми находится посередине запрещенной зоны.

5. Удельная проводимость

$$\sigma = e(u_p + u_n)\sqrt{(N_c N_V)}e^{-\frac{E_g}{2kT}} = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}},$$

где u_n и u_p – подвижности электронов и дырок соответственно.

Примесные полупроводники

6. Уравнение электронейтральности для электронного (донорного) полупроводника

$$n_n = p_n + n_d,$$

где n_n – концентрация электронов в зоне проводимости электронного полупроводника; p_n – концентрация дырок в валентной зоне электронного полупроводника; n_d – концентрация электронов, перешедших с донорных уровней в зону проводимости.

7. Уравнение электронейтральности для дырочного (акцепторного) полупроводника

$$p_p = n_p + p_{\text{A}},$$

где p_p – концентрация дырок в валентной зоне дырочного полупроводника; n_p – концентрация электронов в зоне проводимости дырочного полупроводника; p_{A} – концентрация дырок, перешедших с акцепторных уровней в валентную зону.

В случае, когда все примеси ионизованы,

$$n_d \sim N_d \text{ (или } n_{\text{A}} \sim N_{\text{A}}\text{)},$$

где N_d и N_{A} – концентрация атомов доноров и акцепторов, соответственно.

8. Закон действующих масс

Произведение концентраций электронов и дырок в полупроводнике не зависит от его легирования, а зависит только от температуры и равно квадрату концентраций носителей в собственном полупроводнике

$$np = n_i^2(T).$$

9. Электропроводность электронного (донорного) полупроводника

$$\sigma = \sigma_0 \exp[-E_g/(2kT)] + \sigma_{0n} \exp[-E_d/(2kT)],$$

где E_d – энергия активации донорных примесей, $\sigma_{0n} = neu_n$.

10. Электропроводность дырочного (акцепторного) полупроводника

$$\sigma = \sigma_0 \exp[-E_g/(2kT)] + \sigma_{0p} \exp[-E_{\text{A}}/(2kT)],$$

где $\sigma_{0p} = epu_p$; E_{A} – энергия активации акцепторных уровней.

Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить положение уровня Ферми относительно дна зоны проводимости в полупроводнике с концентрацией ионизированных доноров 10^{23} м$^{-3}$. При температуре 300 К плотность состояний у дна зоны проводимости $2{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Дано:	Решение:
$N_d = 1{,}0 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$ $T = 300$К $N_c = 2{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $(E_F - E_c) = ?$	По условию задачи мы имеем дело с донорным полупроводником (n-типа), который находится при температуре $T > T_s$, где T_s – температура, при которой происходит полное истощение примеси: $T_s = E_d\,(k \ln(3N_c/N_d))^{-1}$ (1)

Обычно энергия ионизации доноров порядка $E_d \sim 0{,}01$ эВ. Используя это значение и численные значения N_c и N_d, можно оценить величину T_s. Проведя вычисления по формуле (1), получим: $T_s \sim 20$ K, т.е. $T >> T_s$.

Концентрация электронов в зоне проводимости при полном истощении донорных уровней становится равной концентрации примеси ($n = N_Д$). Она определяется выражением:

$$n = N_c \exp[(E_F - E_c)/(kT)]. \qquad (2)$$

Следовательно, в нашем случае:

$$N_c/N_d = \exp[-(E_F - E_c)/(kT)]. \qquad (3)$$

Прологарифмируем выражение (3):

$$\ln(N_c/N_d) = -\,(E_F - E_c)/(kT). \qquad (4)$$

Отсюда

$$(E_F - E_c) = -\,kT \ln(N_c/N_d). \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (5) численные значения величин, проведем вычисления и определим положение уровня Ферми: $(E_F - E_c) = -\,0{,}143$ эВ.

Задача 2

В германии при температуре 300К концентрация собственных носителей равна $4{,}0 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$. Определить концентрацию электронов n_n, дырок p_n и доноров N_d, если $n_n = 1{,}005\ N_d$.

Дано:	Решение:
$T = 300$K	По условию задачи мы имеем дело с примесным полупроводником n-типа (донорный полупроводник). Используем уравнение электронейтральности:
$n_i = 4{,}0 \cdot 10^{19}$ K	$$n_n = p_n + N_d \qquad (1)$$
$n_n = 1{,}005$ N$_Д$	
$n_n = ?\ p_n = ?\ N_d = ?$	

Подставляем условие для n_n в формулу (1):

$$1{,}005 N_d = p_n + N_{d,}$$

откуда $p_n = 5 \cdot 10^{-3} N_d$.

Для определения N_d используем закон действующих масс:

$$np = n_i^2, \qquad (2)$$

откуда получаем

$$5{,}025 \cdot 10^{-3} N_d^2 = n_i^2,$$

и, следовательно

$$N_d = n_i/0{,}071 = 5{,}65 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Теперь вычислим концентрацию электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне

$$n_n = 1{,}005\ N_d = 5{,}68 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$$

$$p_n = 5\ 10^{-3}\ N_d = 2{,}82 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$$

Итак, $N_d = 5{,}65 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$, $n_n = 5{,}68 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$, $p_n = 2{,}82 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$

7.2.5. p–n-переход. Диффузия носителей тока

1. Сила прямого тока в p–n-переходе:

$$J = J_s[\exp(eU/kT) - 1],$$

где U – внешнее напряжение, приложенное к p–n-переходу в прямом направлении ((+) к p-области, (–) к n-области); J_s – предельное значение обратного тока (ток насыщения). Сила обратного тока: $J = -J_S$, $J_S \sim n_i^2 \sim [-E_g/(kT)]$.

2. Коэффициенты диффузии электронов D_n и дырок D_p

$$D_n = kTu_n/e; \qquad D_p = kTu_p/e,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона; u_n и u_p – подвижности электронов и дырок соответственно.

3. Коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_{\text{эфф}} = (n + p)/(n/D_p + p/D_n),$$

где n и p – концентрация электронов и дырок соответственно.

Для собственного полупроводника ($n = p$):

$$D_{\text{эфф}} = 2D_nD_p/(D_n + D_p).$$

4. Диффузионная длина L:

$$L = (D_{\text{эфф}}\tau)^{1/2},$$

где τ – время жизни неравновесных носителей тока.

5. Концентрация неравновесных носителей тока:

$$\Delta n(x) = \Delta n(0)\ \mathrm{e}^{-x/L},$$

где $\Delta n(0)$ – концентрация неравновесных носителей тока в месте их образования, например, на поверхности освещенного полупроводника; x – координата (расстояние от освещенной поверхности полупроводника); L – диффузионная длина.

Примеры решения задач

Задача 1

На расстоянии 0,48 мм от освещенной поверхности собственного кремния концентрация неравновесных носителей тока спадает в 3 раза. Определить время жизни неравновесных носителей тока, если температура кремния 300 К, а подвижность электронов и дырок при этой температуре соответственно

1500 $см^2/(В \cdot с)$ и 500 $см^2/(В \cdot с)$. Собственная концентрация в Si при данной температуре 10^{10} $см^{-3}$.

Дано:	
$n_i = 10^{16}$ $м^{-3}$	Решение:
$u_n = 0{,}15$ $м^2/(В \cdot с)$	Время жизни неравновесных носителей тока можно
$u_p = 0{,}05$ $м^2$ $(В \cdot с)$	определить из соотношения
$T = 300К$	$L = (D_{эфф}\tau)^{1/2} \Rightarrow \tau = L^2/D_{эфф}$.
$x = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ м	В этой формуле не известны ни диффузионная дли-
$\Delta n(x)/\Delta n(0) = 1/3$	на, ни коэффициент амбиполярной диффузии. Диффузион-
$\tau = ?$	ную длину найдем из соотношения:

$$\Delta n(x) = n(о)e^{-x/L} \Rightarrow \Delta n(x)/\Delta n(0) = e^{-x/L} \Rightarrow \ln(\Delta n(x)/\Delta n(0)) = -x/L.$$

Следовательно,

$$L = x(\ln(\Delta n(0)/\Delta n(x))) = 4{,}8 \cdot 10^{-4}/\ln 3 = 4{,}37 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Чтобы найти коэффициент амбиполярной диффузии, надо сначала найти коэффициенты диффузии электронов и дырок:

$$D_n = kTu_n/e; \qquad D_p = kT\, u_p/e.$$

Подставляя числа, получаем:

$$D_n = 3{,}88 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}; \qquad D_p = 1{,}29 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Для собственного полупроводника ($n=p=n_i$) коэффициент амбиполярной диффузии равен:

$$D_{эфф} = 2D_nD_p/(D_n + D_p) = 1{,}94 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}.$$

И, наконец, вычисляем время жизни неравновесных носителей тока:

$$\tau = L^2/D_{эфф} = 9{,}84 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

7.2.6. Эффект Холла

1. При не слишком сильных магнитных полях холловская разность потенциалов U_H пропорциональна магнитной индукции поля B, силе тока I и обратно пропорциональна толщине пластины b:

$$U_H = R_H\, BI/b = R_H\, Bja, \tag{1}$$

где j – плотность тока в образце; a – ширина образца; R_H – постоянная Холла, зависящая от материала образца.

2. Для полупроводников со смешанной проводимостью, у которых концентрации электронов и дырок сравнимы друг с другом, постоянная Холла вычисляется из следующего соотношения:

$$R_H = 3\pi(pu_p^2 - nu_n^2)/[8e(pu_p + nu_n)^2], \qquad (2)$$

где n и p – концентрации электронов и дырок, соответственно; u_n и u_p – подвижности электронов и дырок соответственно.

а) Для полупроводников p-типа выражение для R_{H} примет вид

$$R_H = 3\pi/(8ep);$$

б) Для полупроводников n – типа (при $n>>p$):

$$R_H = 3\pi/(8en);$$

в) Для собственных полупроводников, в которых $n = p = n_i$, выражение (2) принимает вид

$$R_H = 3\pi(u_p - u_n)/[8en_i(u_p + u_n)].$$

Примеры решения задач

Задача 1

Тонкая пластина из кремния n-типа шириной 2 см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля величиной 0,5 Тл. При плотности тока, направленной вдоль пластины, равной 2мкА/мм^2, холловская разность потенциалов оказалась равной 2,8 В. Определить концентрацию основных носителей тока.

Дано:	Решение:
$a = 0{,}02$ м	
$B = 0{,}5$ Тл	В данной задаче рассматривается полупроводник n-типа, для которого постоянная Холла определяется из соотношения:
$j = 2$ А/м^2	
$U_H = 2{,}8$ В	
$n = ?$	$R_H = 3\pi/(8en)$. (1)

Чтобы определить концентрацию n носителей, нужно знать постоянную Холла R_H, которую можно выразить из формулы для холловской разности потенциалов:

$$U_H = R_H\,Bja.$$

Отсюда

$$R_H = U_H/(Bja). \tag{2}$$

Приравняем правые части выражений (1) и (2):

$$3\pi/(8en) = U_H/(Bja).$$

Отсюда получим концентрацию основных носителей тока

$$n = 3\pi Bja/(8eU_H). \tag{3}$$

Подставляя в формулу (3) числовые значения, получим:

$$n = 5{,}26 \cdot 10^{16}\ \text{м}^{-3}.$$

7.3. Задания на контрольную работу № 6

601. Вычислить период идентичности вдоль направления [021] в решетке AgBr, если плотность кристалла равна 3,87 г/см^3. Решетка гранецентрированная кубическая.

602. Кристаллическая плоскость проходит через узлы $[[110]]$, $[[20\underline{1}]]$, $[[\underline{3}21]]$ решетки. Написать индексы Миллера для этой плоскости.

603. Система плоскостей в примитивной кубической решетке задается индексами Миллера (312). Найти наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

604. Написать индексы Миллера для двух плоскостей, содержащих узлы с индексами: а) $[[11\underline{3}]]$, $[[\underline{1}12]]$, $[[101]]$ и б) $[[2\underline{1}1]]$, $[[010]]$, $[[11\underline{1}]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

605. Система плоскостей примитивной кубической решетки задана индексами (142). Определить расстояние между соседними плоскостями, если параметр решетки равен 0,3 нм.

606. Определить параметр примитивной кубической решетки, если межплоскостное расстояние для системы плоскостей, заданных индексами Миллера (323), при рентгеноструктурном анализе оказалось равным 0,17 нм.

607. Три системы плоскостей в примитивной кубической решетке заданы индексами Миллера: а) (111); б) (011); в) (010). Определить отношения межплоскостных расстояний: $d_{111} : d_{011} : d_{010}$.

608. Барий имеет объемноцентрированную кубическую решетку. Плотность кристалла бария равна $3{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а молярная масса $137 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Определить параметр решетки.

609. Золото имеет гранецентрированную кубическую решетку. Плотность золота принять равной $19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, а молярную массу $197 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Определить параметр решетки и расстояние между ближайшими соседними атомами.

610. Определить число элементарных ячеек в единице объема кристалла меди. Решетка гранецентрированная кубическая. Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а молярная масса $64 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

611. Молибден имеет объемноцентрированную кубическую решетку. Вычислить плотность молибдена и расстояние между ближайшими соседними атомами. Параметр решетки равен 0,315 нм, а молярная масса – $96 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

612. Найти плотность кристалла неона, если известно, что решетка гранецентрированная кубическая. Постоянная решетки равна 0,451 нм, а молярная масса $20{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

613. Определить молярную массу кристалла, если известно, что расстояние между ближайшими соседними атомами равно 0,304 нм. Решетка объемноцентрированная кубическая. Плотность кристалла $0{,}534 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

614. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости кристаллов каменной соли и флюорита (KCl и CaF_2). Относительные атомные массы: A (K) = 39; A(Cl) = 35; A(Ca) = 40; A(F) = 19.

615. Вычислить по классической теории теплоемкость кристалла NaCl объемом 100 см^3. Плотность кристалла $2{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

616.Определить изменение внутренней энергии кристалла корунда (Al_2O_3) при нагревании от 30 $^{\circ}$C до 150 $^{\circ}$C. Масса кристалла 30 г. Молярная масса Al: $27 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, кислорода: $16 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Условие $T > \Theta_D$ считать выполненным.

617. Вычислить частоту Дебая в кристалле золота. Для золота температура Дебая равна 180 К.

618. Медный образец массой 50 г находится при температуре 10 К. Определить количество теплоты, необходимое для его нагревания до температуры 15 К. Температуру Дебая для меди принять равной 300 К. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным. Молярная масса меди $64 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

619. Вычислить по теории Дебая теплоемкость цинка массой 80г при температуре 12 К. Температура Дебая для цинка 308 К. Молярная масса цинка – $65 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

620. При нагревании серебра массой 10 г от температуры 10 К до температуры 20 К было затрачено количество теплоты 0,71 Дж. Определить температуру Дебая серебра. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

621. Используя теорию Дебая, вычислить удельную теплоемкость железа при температуре 15 К. Принять температуру Дебая для железа равной 467 К. Молярная масса железа 56 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

622. Вычислить частоту Дебая для серебра, если при температуре 20 К молярная теплоемкость равна 1,7 Дж/(моль$\cdot$К).

623. Вода при температуре 0 ^{o}C покрыта слоем льда толщиной 20 см. Температура воздуха равна –10 ^{o}C. Определить количество теплоты, переданной водой за время 1 час через поверхность льда площадью 10 см^2. Теплопроводность льда 2,2 $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{K})$.

624. Вычислить длину волны фононов в вольфраме, соответствующую частоте $\omega = 0{,}1\omega_D$, если для вольфрама плотность $19{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса $184\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

625. Вычислить среднюю длину свободного пробега фононов в кварце (SiO_2), если теплопроводность кварца 13 $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{K})$, молярная теплоемкость 44 $\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{K})$ и усредненная скорость звука 5 км/с. Плотность кварца $2{,}65\cdot 10^3$ кг/м^3.

626. Температура Дебая для меди равна 309 К. Определить длину волны фононов, соответствующих частоте $\nu = 0{,}1\ \nu_D$ и усредненную скорость звука в меди. Плотность меди $8{,}93\cdot 10^3\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$, молярная масса $64\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

627. Длина волны фонона, соответствующего частоте $\omega = 0{,}01\ \omega_D$, равна 52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить температуру Дебая Θ_D, если усредненная скорость звука в кристалле равна 4,8 км/с.

628. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом Na при при температуре 0 К. Энергия Ферми равна 3,12 эВ, плотность кристалла 970 кг/м^3.

629. Вычислить среднюю кинетическую энергию электронов в металле, если энергия Ферми равна 7 эВ.

630. Определить максимальную скорость электронов в металле при температуре 0 К, если энергия Ферми равна 5 эВ.

631. Определить среднюю дрейфовую скорость носителей тока в образце из натрия, если плотность тока, протекающего по образцу, равна 2 А/мм^2, плотность кристалла натрия 970 кг/м^3, а молярная масса 23 г/моль.

632. Собственный полупроводник при температуре 300 К имеет сопротивление $5 \cdot 10^5$ Ом. Если его нагреть до температуры 400 К, то его сопротивление уменьшится до $2,5 \cdot 10^5$ Ом. Найти ширину запрещенной зоны.

633. Кремниевый образец нагревают от температуры 0 ^{o}C до 10 ^{o}C. Во сколько раз возрастет его удельная проводимость? Ширину запрещенной зоны принять равной 1,12 эВ.

634. Образец собственного полупроводника германия при температуре 27 ^{o}C обладает удельным сопротивлением 0,47 $\text{Ом} \cdot \text{м}$. Определить удельную проводимость германия при температуре 127 ^{o}C. Ширину запрещенной зоны принять равной 0,66 эВ.

635. Во сколько раз изменится сопротивление германиевого образца, если его охладить от комнатной температуры 20 ^{o}C до температуры жидкого азота (77 К). Ширину запрещенной зоны считать равной 0,72 эВ.

636. Для приборов на основе германия предельная рабочая температура (температура, при которой собственная концентрация носителей тока становится сравнимой с примесной) равна 75 ^{o}C. Определить предельную рабочую температуру для приборов на основе кремния. Ширина запрещенной зоны германия равна 0,72 эВ, а кремния 1,1 эВ.

637. В чистом германии при температуре 300 К ширина запрещенной зоны равна 0,72 эВ. На сколько надо повысить температуру полупроводника, чтобы концентрация электронов в зоне проводимости увеличилась в два раза?

638. При температуре 300 К концентрация электронов в зоне проводимости равна $1,5 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$. Определить положение энергии Ферми относительно дна зоны проводимости и ширину запрещенной зоны при температуре 0 К. Плотность состояний в зоне проводимости принять равной $2,5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

639. При температуре 300 К удельная электропроводность кремния равна $4,3 \cdot 10^{-4}$ $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, подвижность электронов 0,135 м^2/(В$\cdot$с), а подвижность дырок 0,048 м^2/(В$\cdot$с). Определить концентрацию собственных носителей. Какая часть полного тока обусловлена электронами?

640. Определить подвижность носителей тока в кремниевом образце толщиной 10 мкм, имеющем концентрацию электронов 10^{18} м$^{-3}$, если при подаче на образец напряжения 5В через него протекает ток плотностью $2 \cdot 10^4$ А/м^2.

641. При температуре 300 К концентрация ионизированных примесей 10^{22} м$^{-3}$. Найти положение уровня Ферми, приняв плотность состояний у дна зоны проводимости равной $2{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

642. В образец кремния вводится примесь n-типа с концентрацией $5{,}0 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. После этого концентрация неосновных носителей в нем при температуре 300 К составляет $2{,}42 \cdot 10^{10}$ м$^{-3}$. Определить концентрацию собственных носителей n_i в кремнии при температуре 300 К в предположении, что все примеси ионизированы.

643. Считается, что полупроводниковый материал пригоден для использования в приборе, если при рабочих температурах концентрация собственных носителей $n_i \le 1{,}1 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$. Определить максимальную рабочую температуру приборов на основе арсенида галлия (GaAs), у которого ширина запрещенной зоны равна 1,43 эВ, плотность состояний у дна зоны проводимости $4{,}7 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$, а у потолка валентной зоны $7{,}0 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$. При этом можно считать, что величины ширины запрещенной зоны и плотностей состояний не зависят от температуры.

644. В слиток германия одновременно введены сурьма с концентрацией $8{,}7 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$ и галлий с концентрацией $3{,}68 \cdot 10^{20}$м$^{-3}$. Найти удельную проводимость слитка при условии, что все примесные атомы ионизированы, а подвижность электронов 0,36 м^2/(В$\cdot$с); сурьма является донором, а галлий – акцептором.

645. Образец германия, имеющий при температуре 300 К собственную удельную проводимость $4{,}3 \cdot 10^{-4}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$, легирован донорной примесью с концентрацией $1{,}0 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$. Найти концентрацию дырок. Определить, какая часть тока обусловлена дырками. Подвижности электронов и дырок при темпе-

ратуре 300 K принять соответственно равными 0,135 $м^2/(В \cdot с)$ и 0,048 $м^2/(В \cdot с)$.

646. В чистом германии концентрация собственных носителей при температуре 300 K равна $2{,}25 \cdot 10^{19} м^{-3}$. Подвижности электронов и дырок при этой температуре соответственно равны 0,4 $м^2/(В \cdot с)$ и 0,2 $м^2/(В \cdot с)$. Определить проводимость чистого германия и германия с концентрацией акцепторов $4{,}5 \cdot 10^{21}$ $м^{-3}$.

647. Определить коэффициент амбиполярной диффузии в кремнии при температуре 300 K, если концентрация электронов в Si равна 10^{11} $см^{-3}$, а подвижность электронов и дырок соответственно равна 1500 $см^2/(В \cdot с)$ и 500 $см^2/(В \cdot с)$. Собственная концентрация носителей 10^{10} $см^{-3}$.

648. Определить коэффициент амбиполярной диффузии в полупроводнике, если известно, что на расстоянии 0,7 мм от его освещенной поверхности концентрация неравновесных носителей тока спадает в два раза, а время их жизни равно 500 мкс.

649. Коэффициент амбиполярной диффузии в полупроводнике равен 25 $см^2/с$, а время жизни неравновесных носителей тока 200 мкс. Определить концентрацию неравновесных носителей тока на расстоянии 0,5 мм от освещенной поверхности полупроводника, если их концентрация на поверхности 10^{15} $см^{-3}$.

650. Подвижность дырок в собственном полупроводнике при температуре 300 K равна 600 $см^2/(В \cdot с)$. Определить подвижность электронов, если коэффициент амбиполярной диффузии равен 30,5 $см^2/с$.

651. Определить время жизни неравновесных носителей тока в собственном кремнии при температуре -20 ^oC, если диффузионная длина равна 2 мм. Подвижности электронов и дырок соответственно равны 1500 $см^2/(В \cdot с)$, 500 $см^2/(В \cdot с)$.

652. Образец германия n-типа имеет удельное сопротивление 0,015 $Ом \cdot м$ и значение постоянной Холла $5{,}4 \cdot 10^{-3}$ $м^3/Кл$. Определить концен-

трацию основных носителей и их подвижность. Дырочной проводимостью пренебречь.

653. Удельная проводимость антимонида индия p-типа $2 \cdot 10^3$ $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$, а подвижность дырок в нем 0,4 м^2/(В$\cdot$с). Определить постоянную Холла и концентрацию дырок. Электронной проводимостью пренебречь.

654. Подвижности электронов и дырок в кремнии соответственно равны 0,15 м^2/(В$\cdot$с) и 0,05 м^2/(В$\cdot$с). Вычислить постоянную Холла для кремния, если его удельное сопротивление 620 $Ом \cdot м$. Кремний рассматривать как собственный полупроводник.

655. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной 1 см и длиной 10 см помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,2 Тл. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины приложено постоянное напряжение 300 В. Определить холловскую разность потенциалов на гранях пластины, если постоянная Холла равна 0,1 м^3/Кл, а удельное сопротивление – 0,5 $Ом \cdot м$.

656. Удельное сопротивление кремния с примесями равно 0,01 $Ом \cdot м$. Определить концентрацию дырок и их подвижность. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью, а постоянная Холла равна $4 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл.

657. p–n-переход находится под обратным напряжением 0,1 В при T = 300 К. Его сопротивление 692 Ом. Каково сопротивление перехода при прямом напряжении той же величины?

658. Сопротивление p–n-перехода при T = 300 К, находящегося под прямым напряжением 0,1 В, равно 10 Ом. Определить сопротивление перехода при обратном напряжении.

659. Прямое напряжение, приложенное к p–n-переходу, равно 0,2 В. Вычислить отношение сил тока через переход при температурах 273 К и 300 К. Ширина запрещенной зоны равна 1эВ.

660. Определить, во сколько раз возрастет сила тока насыщения через p–n-переход для кремниевого прибора, если его температура в процессе работы

возрастет от 20 ^{o}C до 120 ^{o}C. Ширину запрещенной зоны для кремния принять равной 1,1 эВ.

661. Определить величину прямого напряжения, при котором ток через p–n-переход равен предельному значению обратного тока (выпрямление отсутствует). Температуру принять равной 20 ^{o}C.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Некоторые физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2)
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль$\cdot$К)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ м/с
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 $\cdot$ К^4)
Постоянная Вина	b	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ Кл
Постоянная Планка	$\begin{cases} h \\ \hbar \end{cases}$	$6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж

2. Некоторые астрономические величины (округленные значения)

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Масса Земли	$5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ м

3. Относительные атомные массы некоторых элементов (округленные значения)

Элемент	Химический символ	A
Азот	N	14
Аргон	Ar	40
Водород	H	1
Гелий	He	4
Кислород	O	16
Неон	Ne	20
Углерод	C	12

4. Масса, заряд и энергия покоя некоторых частиц

Частица	Масса, кг	Заряд, Кл	Энергия покоя, МэВ
Электрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	$-1{,}60 \cdot 10^{-19}$	0,511
α-частица	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	$3{,}2 \cdot 10^{-19}$	3733
Протон	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$	938

5. Относительная диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Парафиновая бумага	2,0	Масло трансформаторное	2,2
Стекло	7,0	Эбонит	3,0
Слюда	7,0	Резина	2,5

6. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление (Ом·м)	Металл	Удельное сопротивление(Ом·м)
Алюминий	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	Медь	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$
Железо	$9{,}8 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	Никелин	$4{,}0 \cdot 10^{-7}$

7. Показатели преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Вода	1,33	Алмаз	2,42
Стекло	1,5	Кварц	1,54

8. Работа выхода электрона из металла

Металл	Работа выхода (T = 293 К); эВ	Металл	Работа выхода (T = 293 К); эВ
Золото	4,3	Натрий	2,4
Калий	2,2	Платина	6,3
Литий	2,3	Серебро	4,7
Медь	4,4	Цезий	2,0

9. Электрические характеристики некоторых полупроводников (температура комнатная)

Тип полупроводника	Ширина запрещенной зоны	Удельное сопротивление	Подвижность	
	E_g		Электроны	Дырки
	эВ	$Ом \cdot м$	$м^2/В \cdot с$	
Собственный германий	0,66	0,5	0,39	0,19
Собственный кремний	1,1	$6{,}2 \cdot 10^2$	0,15	0,05
Арсенид галлия	1,43		0,85	0,042

10. Характеристики некоторых радиоактивных изотопов

Элемент	Обозначение	Период полураспада
Магний	${}^{27}_{12}Mg$	10 минут
Кобальт	${}^{60}_{27}Co$	5,3 года
Йод	${}^{131}_{5}I$	8 суток

11. Массы атомов некоторых химических элементов

Название элемента	Атомный номер	Символ и массовое число	Масса атома а.е.м.
Протон		${}_1^1p$	1,00728
Нейтрон		${}_0^1n$	1,00866
Водород	1	${}_1^1H$ ${}_1^2H$ ${}_1^3H$	1,00783 2,01410 3,01605
Гелий	2	${}_2^3He$ ${}_2^4He$	3,011603 4,00260

12. Некоторые соотношения между единицами измерения физических величин

Физическая величина	**Соотношение между единицами измерения**
Масса	1 тонна = 10^3 кг 1 а.е.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Сила	1 кГ = 9,81 Н
Время	1 сутки = $8{,}64\cdot10^5$ с 1 год = $3{,}16\cdot10^7$ с
Работа, энергия, теплота	1 кал = 4,19 Дж 1 кВт·ч = $36\cdot10^5$ Дж 1эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж
Давление	1 мм. рт. ст. = $1{,}33\cdot10^2$ Па 1 атм. = $1{,}014\cdot10^5$ Па
Угловые величины	1 град = 1° = $1{,}75\cdot10^{-2}$ рад 1 рад = $57{,}3^{\circ}$

12. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Приставка		
Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
экса	Э	10^{18}	Деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	Санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	Милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^{9}	Микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	Нано	н	10^{-9}
кило	К	10^{3}	Пико	п	10^{-12}
гекто	Г	10^{2}	Фемто	ф	10^{-15}
Дека	Да	10^{1}	Атто	а	10^{-18}

13. Греческий алфавит

Обозначения букв	Названия букв	Обозначения букв	Названия букв
Α,α	альфа	Ν,ν	ню
Β,β	бета	Ξ,ξ	кси
Γ,γ	гамма	Ο,ο	омикрон
Δ,δ	дельта	Π,π	пи
Ε,ε	эпсилон	Ρ,ρ	ро
Ζ,ζ	дзета	Σ,σ	сигма
Η,η	Эта	Τ,τ	тау
Θ,θ	тхэта	Υ,υ	ипсилон
Ι,ι	йота	Φ,φ	фи
Κ,κ	каппа	Χ,χ	хи
Λ,λ	ламбда	Ψ,ψ	пси
Μ,μ	мю	Ω,ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ.. 3

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ... 3

Библиографический список... 5

2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 “ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ”.. 7

2.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 1.......... 7

2.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач.......................... 10

2.2.1. Кинематика поступательного и вращательного движения.................... 10

Примеры решения задач.. 11

2.2.2. Динамика. Законы Ньютона.. 13

Примеры решения задач.. 14

2.2.3. Работа постоянной и переменной силы. Закон сохранения механической энергии... 16

Примеры решения задач.. 17

2.2.4. Закон сохранения импульса. Совместное применение законов сохранения импульса и механической энергии... 20

Примеры решения задач.. 21

2.2.5. Динамика вращательного движения твёрдого тела.............................. 23

Примеры решения задач.. 24

2.2.6. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела.. 25

Примеры решения задач.. 27

2.2.7. Элементы специальной теории относительности................................ 29

Примеры решения задач.. 30

2.3. Задание на контрольную работу № 1... 31

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 “МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ”.. 41

3.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 2.......... 41

3.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач..........................43
3.2.1. Идеальный газ, уравнение состояния идеального газа
(уравнение Клапейрона-Менделеева)... 43
Примеры решения задач.. 44
3.2.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.
Внутренняя энергия идеального газа.. 46
Примеры решения задач.. 47
3.2.3. Элементы классической статистики.. 49
Примеры решения задач.. 50
3.2.4. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость идеального газа.......... 52
Примеры решения задач.. 53
3.2.5. Круговые процессы. КПД цикла. Цикл Карно..................................... 56
Примеры решения задач.. 56
3.2.6. Энтропия.. 57
Примеры решения задач.. 57
3.3. Задание на контрольную работу № 2.. 59
4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 “ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”.. 68
4.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 3........ 68
4.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач........................ 71
4.2.1. Электростатика.. 71
Примеры решения задач.. 75
4.2.2. Постоянный электрический ток.. 83
Примеры решения задач.. 84
4.2.3. Магнитостатика... 87
Примеры решения задач.. 89
4.2.4. Электромагнитная индукция.. 97
Примеры решения задач.. 98
4.3. Задание на контрольную работу № 3.. 102
5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 “КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ”.................... 114
5.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 4......... 114

5.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач........................ 116
5.2.1. Гармонические механические колебания... 116
Примеры решения задач.. 117
5.2.2. Затухающие колебания.. 118
Примеры решения задач.. 119
5.2.3. Электромагнитные колебания.. 120
Примеры решения задач.. 121
5.2.4. Сложение гармонических колебаний.. 122
Примеры решения задач.. 123
5.2.5. Упругие и электромагнитные волны.. 125
Примеры решения задач.. 125
5.2.6. Интерференция света... 126
Примеры решения задач.. 128
5.2.7. Дифракция света.. 130
Примеры решения задач.. 132
5.2.8. Поляризация света.. 135
Примеры решения задач.. 136
5.3. Задание на контрольную работу № 4.. 137
6. КОНТРОЬНАЯ РАБОТА № 5 "КВАНТОВАЯ ФИЗИКА"......................... 149
6.1.Методические указания к выполнению контрольной работы № 5.......... 149
6.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач......................... 151
6.2.1. Тепловое излучение.. 151
Примеры решения задач.. 151
6.2.2. Фотоэффект... 152
Примеры решения задач.. 153
6.2.3. Физика атома. Спектры атомов... 154
Примеры решения задач.. 155
6.2.4. Элементы квантовой механики.. 156
Примеры решения задач.. 157
6.2.5. Физика твёрдого тела.. 162

Примеры решения задач.. 162
6.2.6. Физика атомного ядра. Радиоактивность.. 165
Примеры решения задач.. 166
6.3. Задание на контрольную работу № 5.. 170
7. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 “ФИЗИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА”............... 179
7.1. Методические указания к выполнению контрольной работы № 6......... 179
7.2. Основные законы и формулы. Примеры решения задач......................... 180
7.2.1. Пространственная решётка кристалла.. 180
Примеры решения задач.. 183
7.2.2. Теплоёмкость и теплопроводность кристаллов.................................... 185
Примеры решения задач.. 186
7.2.3. Электронный газ в металлах.. 188
Примеры решения задач.. 189
7.2.4. Соственные и примесные полупроводники.. 190
Примеры решения задач.. 192
7.2.5. p – n-переход. Диффузия носителей тока... 193
Примеры решения задач.. 194
7.2.6. Эффект Холла.. 195
Примеры решения задач.. 196
7.3. Задания на контрольную работу № 6.. 197
ПРИЛОЖЕНИЯ.. 206

Валентина Павловна Дзекановская
Елена Андреевна Лиходаева
Инна Георгиевна Орехова
Наталья Анатольевна Тупицкая
Валентина Борисовна Харламова
Юрий Валентинович Чуркин
Дмитрий Георгиевич Летенко
Сергей Васильевич Субботин

ФИЗИКА

Задания на контрольные работы
Методические указания к выполнению контрольных работ

Редактор Шабанова Т.В.
Сводный темплан 2009 г.
Лицензия ЛР N 020308 от 14.02.97.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 78.01.07.953.П.005641.11.03

Подписано в печать 11.09.2009 Формат 60 x 84 1/16
Б. кн. - журн. П. л. 13,5 Б.л. 6,75 Изд-во СЗТУ
Тираж 300экз. Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет
Издательство СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, 5