**Случайные события**

**10.2.** В каждой из двух урн содержится 8 черных и 2 белых шара. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется черным

**11.2.** Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 *мин*, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 *мин* поступит: а) 5 вызовов; б) менее пяти вызовов; в) более пяти вызовов. Предполагается, что поток вызовов – простейший.

***Методические указания:***

*Основные понятия комбинаторики.*

*Элементами* называются объекты, из которых составлены соединения.

*Различают следующие три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.*

Перестановками*из*n*элементов называют соединения, содержащие все*n*эле-ментов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов.*

*Число перестановок из*n*элементов находится по формуле*



*где*n*! (читается “эн-факториал”) – произведение натуральных чисел от 1 до*n*включительно, т. е.*



*Например, *

Размещениями*из*n*элементами по*k*в каждом (*n *>*k*) называются такие соединения, в каждое из которых входит*k*элементов, взятых из данных*n*элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.*

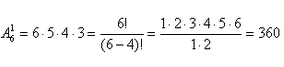
*Число размещений из*n*элементов по*k*находят по формуле*



*или, пользуясь факториалами,*

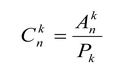
**

*Например,*

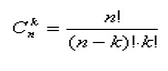
**

Сочетаниями*из*n*элементов по*k*(*n *>*k*) называют соединения, в каждое из которых входит*k*элементов, взятых из данных*n*элементов и которые отличают-ся друг от друга, по крайней мере, одним элементом.*

*Число сочетаний из*n*элементов по*k*находят по формуле*



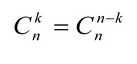
или, пользуясь факториалами,



Для упрощения вычислений при



 полезно использовать следующее свойство сочетаний:



Например,

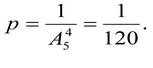


**Задача.** На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, м, р, т, ю. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной и расположенных “в одну линию” карточках можно будет прочесть слово “юрта”.

Р е ш е н и е. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 4 карточки из 5, т. е.  равно -

числу размещений из 5 элементов по 4. Благоприятствует появлению слова “юрта” лишь один исход.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих появлению события, к числу всех элементарных исходов.



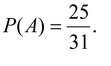
**Задача.**Вероятность поражения мишени при одном выстреле первым стрелком равна 0,8, а вторым стрелком 0,9. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень.

Р е ш е н и е. События *А* (первый стрелок поразил мишень) и *В* (второй стрелок поразил мишень) независимые. Искомая вероятность того, что оба стрелка поразят мишень по теореме умножения вероятностей независимых событий равна:

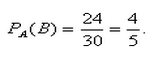


**Задача.** Для некоторой местности среднее число ясных дней в июле равно 25. Найти вероятность того, что первые два дня июля будут ясными.

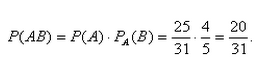
Р е ш е н и е. Вероятность того, что первого июля будет ясный день (событие *A*), равна



Вероятность того, что второго июля будет ясный день (событие *B*), при условии, что первого июля также был ясный день, т. е. условная вероятность события *В*, равна

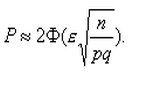


Искомая вероятность того, что первые два дня июля будут ясными, по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна



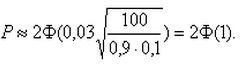
**Задача.** Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,9. Найти вероятность того, что относительная частота отклонится от вероятности появления события (по абсолютной величине) не более чем на 0,03.

Р е ш е н и е. Обозначим искомую вероятность через Р. Воспользуемся формулой



По условию: *n*=100, e =0,03, *p*=0,9, *q*=1-*р*=1-0,9=0,1.

Следовательно,



По таблице найдем Ф(1)=0,3413. Искомая вероятность 

При решении задач на повторные независимые испытания, в которых вероятности появления события различны, удобно пользоваться производящей функцией вероятностей (через  обозначена вероятность того, что в *n* испытаниях событие появится ровно *k* раз).

Пусть вероятность появления события в первом испытании равна *p*1, во втором – *p*2, … , в *n*-м – *p*n.

*Производящей функцией* вероятностей  называют функцию, определяемую равенством:



Пусть производят ряд испытаний, причем вероятность появления события в первом испытании равна *p*1, во втором – *p*2 и т. д. Тогда вероятность  того, что при *n* испытаниях события появятся ровно *k* раз, равна коэффициенту  при разложении производящей функции по степеням *z*. Например, если *n*=2, то



Здесь коэффициент *p*1 *p*2 при  равен вероятности  того, что в двух испытаниях событие появится ровно два раза; коэффициент *p*1 *q*2+*p*2 *q*1 при *z* равен вероятности  того, что событие появится ровно один раз; свободный член *q*1 *q*2 равен вероятности  того, что событие не появится ни одного раза.

**Задача.** Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы (за время *t*) первого элемента *p*1=0,8, а второго *p*2=0,9. Найти вероятности того, что за время *t* будут работать безотказно: а) 2 элемента, б) 1 элемент, в) ни один из элементов.

Р е ш е н и е. Так как вероятности безотказной работы элементов равны соответственно 0,8 и 0,9, то вероятности того, что элементы откажут равны: *q*1=1- 0,8=0,2; *q*2=1- 0,9=0,1.

Составим производящую функцию: 

Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту  при :



Вероятность того, что 1 элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при *z*:



Вероятность того, что ни один из элементов не будет работать безотказно, равна свободному члену:



Контроль: 0,72+0,26+0,02=1.

Простейший поток событий.

Одним из основных понятий современных теорий массового обслуживания и надежности является понятие простейшего (пуассоновского) потока.

*Потоком событий* называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примеры потоков: поступление вызовов на АТС, поступление вызовов на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие кораблей в порт, последовательность отказов элементов устройства.

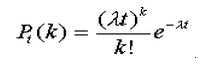
*Простейшим* называют поток, обладающий свойствами стационарности, отсутствием последействия и ординарности.

*Свойство стационарности* характеризуется тем, что вероятность появления *k* событий за время длительностью *t* не зависит от начала отсчета промежутка времени, а зависит лишь от его длительности. Например, вероятности появления пяти событий на промежутках времени (1; 4), (6; 9), (8; 11) одинаковой длительности *t*= 3 ед. времени равны между собой.

*Свойство отсутствия последействия* характеризуется тем; что вероятность появления *k* событий на любом промежутке времени не зависит от того, сколько событий появилось до начала рассматриваемого промежутка.

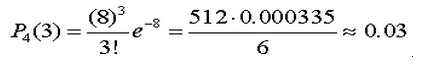
*Свойство ординарности* характеризуется тем, что вероятность появления двух и более событий пренебрежимо мала, сравнительно с вероятностью появления одного события.

*Интенсивностью потока l*называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Доказано, что если известна постоянная интенсивность потока l , то вероятность появления *k* событий простейшего потока за время длительностью *t*определяется формулой

.

**Задача.**Среднее число заявок, поступающих на АТС в 1 *мин* равно двум. Найти вероятности того, что за 4 *мин* поступит а) три вызова, б) менее трёх вызовов, в) не менее трёх вызовов.

Р е ш е н и е 1: По условию λ=3, t= 4, k=3. По формуле Пуассона после подстановки получим

.

Р е ш е н и е 2: Найдём вероятность того, что за 4 мин поступит менее трёх вызовов, т. е. ни одного вызова, или один вызов, или два вызова. Поскольку эти события не совместны, применима теорема сложения:

.

Р е ш е н и е 3: Найдём вероятность того, что за 4 мин поступило не менее трёх вызовов: так как события “поступило менее трёх вызовов” и “поступило не менее трёх вызовов” -- противоположные, то сумма вероятностей этих событий равна единице:



Отсюда: .

****