ИНСТИТУТ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Н.Ф. Жмаев

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ

2006

На обложке тетради с расчетно-графическим заданием нужно указать специальность, группу, курс, шифр, название дисциплины, фамилию, имя, отчество, домашний адрес с почтовым индексом.

Текст вопросов и задач необходимо переписывать полностью. Писать следует через строку, оставляя справа поля шириной 23 – 30 мм и место после ответа на вопрос или решения задачи для пометок рецензента.

Ответ на теоретический вопрос должен быть полным и в то же время достаточно конкретным и кратким. Не допускается дословное переписывание и тем более сканирование книжного текста. Материал следует излагать только по существу поставленного вопроса и «своими словами».

Работа должна быть выполнена аккуратно чернилами или пастой одного цвета. Не допускается применение произвольных не стандартизованных или не общепринятых сокращений. Текст должен быть разборчивым. Трудно читаемая работа и работа, дословно переписанная с книжного текста, не рецензируется.

Исправлять незачтенную работу следует так, чтобы рецензент мог сопоставить первоначальный и новый текст. Если в зачтенной работе имеются замечания рецензента, по ним также следует внести исправления. При полной переработке РГЗ при направлении работы на повторное рецензирование к ней должна прилагаться ранее незачтенная работа.

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ 82

Номера вопросов и задач выбираются в соответствии с предпоследней и последней цифрами номера зачетной книжки.

Последняя цифра зачетной книжки	Предпоследняя цифра и номер зачетной книжки				
	1; 2	3; 4	5; 6	7; 8	9; 0
	Контрольные вопросы				
0; 5	1; 10; 20; 30	2; 11; 21; 31	3; 12; 22; 32	4; 13; 23; 33	5; 14; 24; 34
1; 6	6; 11; 22; 35	7; 12; 23; 32; 36	8; 13; 24; 33	9; 14; 25; 37	10; 15; 26; 38
2; 7	2; 12; 24; 39	3; 13; 25; 40	4; 14; 26; 35	5; 15; 27; 36	6; 16; 28; 37
3; 8	7; 13; 26; 38	8; 14; 27; 39	9; 15; 28; 40	2; 10; 16; 29	3; 11; 17; 30
4; 9	3; 14; 28; 36	4; 15; 29; 37	5; 16; 30; 38	6; 17; 31; 39	7; 18; 32; 40
	Задачи				
	0; 5	1; 6	2; 7	3; 8	4; 9
1; 2	1; 11; 19	1; 12; 20	3; 13; 21	4; 14; 22	5; 15; 23
3; 4	6; 16; 24	7; 17; 25	8; 18; 26	9; 12; 27	10; 13; 28
5; 6	1; 14; 20	2; 15; 21	3; 16; 22	4; 17; 23	5; 18; 24
7; 8	6; 19; 25	7; 10; 26	8; 11; 27	9; 13; 28	10; 14; 18
9; 0	1; 15; 19	2; 16; 22	3; 17; 23	4; 18; 24	5; 19; 25

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. История развития метрологии.
2. Предмет и задачи метрологии.
3. Понятие физической величиной и ее измерения. Классификация физических величин.
4. Принципы построения систем единиц физических величин. Основные, производные единицы и их размерности.

5. Система единиц физических величин СИ. Ее отличительные особенности. Основные и дополнительные, кратные и дольные единицы.
6. Внесистемные единицы физических величин.
7. Правила написанияобозначений единиц физических величин.
8. Сигналы измерительной информации. Основные понятия и определения.
9. Виды измерений: прямые, косвенные, совместные, совокупные.
10. Методы измерений: непосредственной оценки, метод сравнения. Их разновидности, достоинства, недостатки.
11. Модель реального объекта и необходимая степень ее адекватности.
12. Структурные элементы измерения.
13. Основные этапы измерения: подготовка, измерительный эксперимент, обработка экспериментальных данных.
14. Понятие погрешности измерения. Погрешность систематическая, случайная, промахи; абсолютная, относительная. Пояснить на примерах.
15. Классификация погрешностей измерения в зависимости от причин возникновения: инструментальная, методическая и др. Привести примеры.
16. Погрешности средств измерений. Их классификация и способы математического выражения. Пояснить на примерах.
17. Нормирование погрешности средств измерений. Аддитивная и мультипликативная составляющая. Класс точности.
18. Погрешности измерения различного происхождения.
19. Систематические погрешности измерения и способы их уменьшения
20. Гистограммы и кривые распределения случайных величин, плотность распределения. Генеральная совокупность, выборка.
21. Распределение случайных погрешностей измерения. Вероятность, плотность распределения вероятностей. Нормальный закон распределения Гаусса.
22. Математическое ожидание, как наиболее достоверное значение измеряемой величины. Доказать.
23. Дисперсия. Оценка среднеквадратичной погрешности (стандартной погрешности) и среднеарифметического результата ряда измерений.
24. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Правило трех сигма.
25. Коэффициент Стьюдента. Алгоритм обработки результатов ряда равноточных измерений.
26. Полная погрешность измерения и ее составляющие. Три случая суммирования систематической и случайной погрешностей.
27. Необходимое число многократных измерений и его обоснование.
28. Среднеквадратичная погрешность нескольких серий измерений
29. Закон сложения случайных погрешностей и его следствия.
30. Погрешность косвенных измерений, когда интересующая величина зависит от одной непосредственно измеряемой величины.
31. Погрешность косвенных измерений, когда интересующая величина зависит от произведения или частного нескольких измеряемых величин.
32. Последовательность и необходимая точность вычислений при определении погрешности.
33. Согласование точности измерений со свойствами объекта.
34. Графический анализ результатов эксперимента.
35. Приближенные методы построения экспериментальной линейной функции.
36. Государственная метрологическая служба.
37. Ведомственная метрологическая служба.
38. Метрологическое обеспечение производства, его цели и задачи.

39. Законодательная база сертификации. Обязательная и добровольная сертификация.
40. Области применения сертификации.

ЗАДАЧИ

Задачи сгруппированы по разделам. В каждом разделе даны краткие пояснения и основные правила и положения, являющиеся «подсказками», помогающими в решении задач. К некоторым задачам, отмеченным звездочкой, даны ответы в конце раздела.

ЗАДАЧИ 1 -7. ПРЯМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Результат измерения

Результат измерения обычно представляется в следующем виде:

$$X = X_{изм} \pm \Delta X,$$

где $X_{изм}$ – измеренное значение, т.е. его *наилучшая* оценка; ΔX – погрешность. Тогда,

$$X_{изм} + \Delta X \text{ – наибольшее},$$
$$X_{изм} - \Delta X \text{ – наименьшее}$$

вероятные значения измеренной величины.

Оценка погрешности

В отличие от результата измерения, погрешность не может быть численно определена непосредственно из эксперимента.

Для простых измерений с приемлемой точностью погрешность можно оценить визуально исходя из здравого смысла. Например, при измерении ширины письменного стола рулеткой с миллиметровыми делениями неизбежна погрешность ± 1 мм из-за неточности нанесения делений на самой рулетке, из-за шероховатости края доски и неодинаковой ширины стола в разных местах. Да и практической целесообразности более точного измерения в данном случае нет.

Если деления на шкале прибора, например, вольтметра, нанесены через один вольт и не так часто как на полотне рулетки, то можно попытаться оценить доли деления, например 5,3 В, но не забывать при этом, что это лишь приближенная оценка с вероятной погрешностью не менее ± 0,1 В.

Гораздо труднее оценить погрешность, например, интервала времени, измеренного с помощью секундомера. Источником погрешности здесь, главным образом, является неизвестное время реакции при запуске и остановке секундомера. Такого рода погрешности можно надежно оценить при многократных измерениях одной и той же величины. Естественно, предположить, что наилучшей оценкой будет среднее арифметическое из ряда измерений. Так, если при четырех измерениях получены значения:

$$2{,}4; \quad 2{,}6; \quad 2{,}4; \quad 2{,}2,$$

то $t_{ср} = 2{,}4$ с.

Очевидно также, что правильный результат лежит где-то между наименьшей (2,2) и наибольшей (2,6) величинами, поэтому можно записать:

$$t = t_{ср} \pm \Delta t; \qquad t = 24 \text{ с} \pm 0{,}2 \text{ с}.$$

Для более достоверной оценки погрешности в метрологии используются методы статистического анализа и теории вероятности.

Округление погрешностей и результатов измерений

Величина погрешности (ΔX) всегда недостоверна, является лишь оценкой погрешности, и высокая точность ее вычисления не имеет смысла. При округлении погрешностей следует придерживаться следующих правил.

Если первая цифра в погрешности 1 или 2, то в сохраняются две значащих цифры, если первая цифра в погрешности 3 и более, то сохраняется одна цифра. При высокоточных измерениях целесообразно сохранять две значащих цифры. Например, для погрешности 0,14, округление до 0,1 приведет к уменьшению погрешности на 40 %, и здесь следует сохранить обе цифры.

Из этого правила следует, что последняя значащая цифра измеренного значения должна быть того же порядка, т.е. находиться в той же десятичной позиции, что и погрешность. Например, результат 92,81, измеренный с погрешностью 0,3; 3,0; или 30, должен быть записан соответственно так:

$$X = 92{,}8 \pm 0{,}3; \qquad X = 93 \pm 3; \qquad X = 90 \pm 30.$$

В промежуточных расчетах следует оставлять на одну значащую цифру больше, округляется конечный результат.

Эти правила нужно строго соблюдать при решении всех задач.

Относительная погрешность

Абсолютная погрешность измерения (ΔX) показывает точность измерения, но не характеризует качество измерения. Например, погрешность в 1 см для расстояния 1 км означала бы необычайно точное измерение, в то время как погрешность в 1 см для расстояния 5 см не более как грубая оценка.

Для характеристики качества измерения служит относительная погрешность:

$$\delta = \Delta X / X.$$

Поскольку относительная погрешность хорошего измерения – обычно малое число, ее умножают на 100 и выражают в процентах. Так, при

$$x = 50 \pm 1 \text{ см}$$

относительная погрешность будет:

$$\delta = \Delta X / X; \qquad \delta = 1/50 = 0{,}02 = 2\ \%.$$

Относительная погрешность – величина безразмерная.

К сожалению, и относительная погрешность неоднозначно характеризует качество измерения. Полезно помнить, что при вычислении относительной погрешности сохранение одной значащей цифры обеспечивает точность вычисления порядка 10 %, двух – порядка 1 %, трех – 0,1 %.

Различие

Если два измерения одной и той же величины не одинаковы, то говорят, что они между ними имеется *различие*. Численно различие между двумя измерениями определяется как их разность. Например, различие результатов двух измерений 40 ± 8 и равно: $|40 - 42| = 2$. Оно меньше погрешности как одного (5), так и другого (8) измерения. Такое *различие* является незначимым. Напротив, при результатах двух измерений 35 ± 2 и 45 ± 1, *различие* составляет 10 и оно *значимо*, так как больше величины погрешностей. Значит, результаты измерений не согласуются между собой и должны быть уточнены.

Сравнение измеренных и действительных значений

Результат любого измерения вне сравнения с другими аналогичными значениями не представляет никакого интереса. В выводе, представляющем интерес, должны сравниваться два или более значений.

Простейший такой эксперимент – *измерение величины, действительное значение которой известно*. Например, определение плотности спиртового раствора ареометром для установления подлинности. Очевидно, в этом случае действительное значение должно лежать в интервале между

$$X_{изм} - \Delta X \qquad \text{и} \qquad X_{изм} + \Delta X$$

или незначительно выходить за рамки этого интервала.

Сравнение двух измеренных значений если, согласно теории, они должны быть равны

Например, для проверки закона сохранения полного импульса изолированной системы измерены импульсы $P_1 = (1{,}49 \pm 0{,}04)$(кг·м)/с, до столкновения двух шаров, и $P_2 = (1{,}56 \pm 0{,}06)$ (кг·м)/с. Интервал, в котором возможно лежит P_1 (от 1,45 до 1,53), перекрывается с интервалом P_2 (от 1,5 до 1,62). Следовательно, эти измерения находятся в согласии с законом сохранения импульса.

Удобно просто найти разность $P_1 - P_2$ и убедиться, что она достаточно близка к нулю по сравнению с P_1 и P_2. При этом нужно иметь в виду, что погрешность разности значений $P_1 - P_2$ будет сумма их погрешностей. В общем случае, если $g = x \pm y$, то $\Delta g = \Delta x + \Delta y$.

Заметим также, что если величина x и y измерены с малыми относительными погрешностями $\frac{\Delta x}{|x_{изм}|}$ и $\frac{\Delta y}{|y_{изм}|}$, то относительная погрешность произведения $g = x \cdot y$ равна сумме относительных погрешностей x и y:

$$\frac{\Delta g}{g_{изм}} = \frac{\Delta x}{x_{изм}} + \frac{\Delta y}{y_{изм}}.$$

Задача 1*

Перепишите правильно следующие результаты измерений в наиболее наглядном виде с нужным числом значащих цифр и использованием стандартных кратных или дольных единиц:

$H = (5{,}03 \pm 0{,}04329)$ м;

$T = (19{,}5432 \pm 1)$ с;

$Q = (-3{,}21 \cdot 10^{-19} \pm 2{,}67 \cdot 10^{-20})$ Кл;

$\lambda = (0{,}000000563 \pm .00000007)$ м;

$P = (3{,}267 \cdot 10^3 \pm 42)$ (г·см/с).

Придумайте сами и запишите 5 – 6 аналогичных примеров.

Напомним, что десятичные множители кратных и дольных единиц выбираются так, чтобы числовые величины находились в диапазоне от 0,1 до 1000. Например:

1 км = $1 \cdot 10^3$ м; 1 мм = $1 \cdot 10^{-3}$ м; 1 Ф = $1000 \cdot 10^3$ мкФ.

Задача 2*

Плотность жидкости измерили пять раз и получили следующие результаты (в г/см^3):

1,8; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8.

Какой можно сделать вывод о наилучшей оценке значения измеренной величины и ее погрешности? Каково различие между измеренным и действительным значениями и значимо ли оно, если действительное значение равно 1,85 г/см^3.

Задача 3

Время десяти оборотов диска измеряется путем фиксирования моментов времени начала и конца вращения. Какова погрешность времени десяти оборотов, если время начала и время конца вращения измеряются с погрешностью ± 1 с. Если увеличивать число оборотов, как это скажется на определении погрешности одного оборота?

Задача 4*

В эксперименте по проверке закона сохранения момента импульса получили для начального (L_1) и конечного (L_2) моментов импульса вращающейся системы следующие результаты (в (кг·м^2)/с)):

L_1:	$3 \pm 0{,}3$;	$7{,}4 \pm 0{,}5$;	$14{,}3 \pm 1$;	$25{,}2 \pm 2$;	32 ± 2;	27 ± 2,
L_2:	$2{,}7 \pm 0{,}6$;	$8{,}0 \pm 1$;	$16{,}5 \pm 1$;	24 ± 2;	31 ± 2;	41 ± 2.

Вычислите значения разности $L = L_1 - L_2$ и ее погрешности для всех шести измерений. Согласуются ли полученные результаты с законом сохранения момента импульса?

Задача 5

Калькулятор показал результат 123,123. Если вы решили, что это число в действительности имеет только три значащих цифры, оцените абсолютные и относительные погрешности результатов. Сделайте те же вычисления для чисел 0,123123; 321,321.

Лежит ли относительная погрешность в интервале, ожидаемом для случая трех значащих цифр?

Задача 6

Для пяти измерений, приведенных в задаче 1, рассчитайте погрешности в процентах. Не забудьте округлить результаты до разумного числа значащих цифр и обосновать их.

Задача 7

С помощью линейки можно произвести отсчет с точностью до 0,1 мм, а с помощью микрометра – с точностью до 0,01 мм. Если необходимо измерить отрезок длиной 2 см с точностью 1 %, можно ли это сделать с помощью линейки? А с помощью микрометра? Обоснуйте ответ.

ЗАДАЧИ 8 – 17. КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Погрешность в суммах и разностях

Пусть $q = x + y - z$. Величины x, y и z измерены с погрешностями Δx, Δy, Δz. Тогда наибольшая возможная погрешность результата Δq определиться как сумма погрешностей измеренных величин вне зависимости от знака сложения или вычитания:

$$\Delta q = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|.$$

Если известно, что погрешности Δx, Δy, Δz независимы и случайны, тогда лучше погрешность Δq находить как квадратичную сумму исходных погрешностей:

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

При многократных измерениях аналогично поступают со среднеквадратичными погрешностями исходных величин:

$$S_q = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Если для суммы $z = x - y$ относительная погрешность находится как

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y} \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x - y},$$

и $x \to y$, то $\dfrac{\Delta z}{z}$ может возрасти до бесконечности, что не соответствует действительности, и таких измерений следует избегать, а вычисленные значения погрешности будут недостоверны.

Погрешность функции одной переменной

В простейшем случае, если $y = Ax + B$, где A и B постоянные величины, то $\Delta y = A \cdot \Delta x$.

В общем случае для произвольной функции одной переменной $y = f(x)$ для погрешностей, малых по сравнению с измеряемой величиной, или малых приращений, можно прибегнуть к помощи дифференциального исчисления и найти:

$$dy = f'(x)dx$$

или в приращениях

$$\Delta y = f'(x)\Delta x$$

Нельзя пользоваться этим методом в точках экстремума, где $f'(x) = 0$.

Относительная погрешность равна:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x.$$

Этот метод верен как для случайных, так и для систематических погрешностей.

Погрешность произведения или частного

Пусть $z = x^n \cdot y^m$ тогда

$$\ln z = n \ln x + m \ln y$$

Продифференцировав это выражение, получим:

$$\frac{dz}{z} = n\frac{dx}{x} + m\frac{dy}{y} \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y}.$$

Следовательно, *относительная погрешность* результата равна сумме относительных погрешностей измеряемых величин. При этом n и m могут быть любыми числами, как целыми, так и дробными, как положительными, так и отрицательными.

Пример

Измерены ток (I) с погрешностью δ_I и мощность (P) с погрешностью δ_P. Найти наибольшую возможную погрешность сопротивления, исходя из выражения:

$$R = P/I^2 = P \cdot I^{-2}.$$

Находим:

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{2\Delta I}{I^2}\right); \qquad \Delta R = \pm\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{2\Delta I}{I^2}\right)R.$$

Если погрешности ΔP и ΔI независимы и случайны, то лучше и здесь пользоваться среднеквадратичными погрешностями:

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta I^2}{I}\right)^2}.$$

В общем случае для функции произведения нескольких независимых переменных $q = f(x, ..., z)$ среднеквадратичная погрешность результата будет равна:

$$\delta_q = \sqrt{\left(\frac{\delta q}{\delta x}\delta x\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta q}{\delta z}\delta z\right)^2}.$$

Задача 8*

Чтобы рассчитать ускорение тележки, измерялись ее начальная и конечная скорости V_1 и V_2, и вычислялась разность $V_1 - V_2$. Получили следующие результаты измерений (в см/с):

1) $V_1 = 14{,}0$; $V_2 = 18{,}0$;

2) $V_1 = 19{,}0$; $V_2 = 19{,}6$.

Все четыре результата измерения характеризуются погрешностью 1 %.

Вычислите абсолютные погрешности всех четырех измерений, найдите разность $V_1 - V_2$ и ее погрешность для каждого из двух испытаний. Вычислите погрешность в процентах для каждого из двух значений $V_1 - V_2$. В чем несостоятельность этих измерений?

Задача 9*

Измерены две величины $a = (11{,}5 \pm 0{,}2)$ см и $b = (25{,}4 \pm 0{,}2)$ см. Затем вычислено произведение $q = a \cdot b$.

Определите абсолютное значение погрешности q, и погрешность в процентах. Повторите вычисления для измерений $a = (10 \pm 1)$ см и $b = (27{,}2 \pm 0{,}1)$ см. Сделайте вывод о влиянии составляющих погрешностей на погрешность результата.

Задача 10*

Измерены две величины: $x = 10 \pm 1$ и $y = 20 \pm 1$.

Какова наилучшая оценка для произведения $q = x \cdot y$? Вычислите наибольшее и наименьшее вероятные значения q и его погрешность. Затем вычислите погрешность q по правилу определения погрешности произведения. Сравните результаты и сделайте выводы.

Сделайте те же вычисления для измерений: $X = 10 \pm 8$, $Y = 20 \pm 15$.

Задача 11

Получены следующие результаты измерений:

$a = (5 \pm 1)$ см; $b = (18 \pm 2)$ см; $c = (12 \pm 1)$ см;

$t = (30 \pm 0{,}5)$ с; $m = (18 \pm 1)$ г.

Вычислите величины:

$$a + b + c; \quad a + b - c; \quad 4a^2; \quad b/2; \quad mb/t$$

и их погрешности абсолютные, относительные и в процентах.

Задача 12

Вычислите следующие выражения:

$$(5 \pm 1) + (8 \pm 2) - (10 \pm 4); \quad (5 \pm 1) + (8 \pm 2); \quad \frac{10 \pm 1}{20 \pm 2}; \quad 2\pi(10 \pm 1):$$

а) все величины зависимы;

б) все величины не зависимы и случайны.

Число $\pi = 3{,}14$ – погрешности не содержат.

Задача 13*

Время одного колебания маятника (τ) приблизительно равно 0,5 с. При измерении времени секундомером с погрешностью 0,1 с погрешность составит 20 %. Для повышения точности измерили время пяти, а затем двадцати колебаний и получили время $2{,}4 \pm 1$ с и $9{,}4 \pm 1$ с.

Вычислите для каждого измерения значение τ, его абсолютную и процентную погрешность. Можно ли, по вашему мнению, бесконечно улучшать точность измерения τ, если:

а) измерять время все большего числа периодов;

б) производить многократные измерения времени одного периода?

Поясните ваше мнение.

Задача 14

Если для t найдено, что $t = (8{,}0 \pm 0{,}5)$ с, то каковы значения и погрешности:

$$t^2; \quad 1/t^3; \quad 2/t^3; \quad t - 1/t^2.$$

Задача 15*

Измерены четыре длины:

$a = (50 \pm 5)$ см; $b = (30 \pm 3)$ см; c = (40 ± 1) см; d = 7,8 ± 0,3) см.

Найдите погрешность для сумм $a+b$, $a+c$, $a+d$ в случае, когда исходные погрешности зависимы и когда независимы и случайны. Предполагая, что погрешность надо знать только с одной значащей цифрой, в каком из случаев погрешностью во втором слагаемом можно пренебречь?

Задача 16

Для пяти измерений значений величины x равных 6, 8, 10, 8, 9, вычислите наиболее достоверное значение x и его среднеквадратичную погрешность. Определите доверительный интервал при доверительной вероятности:

а) $P = 0{,}95$;

б) $P = 0{,}99$.

Задача 17

Чтобы определить коэффициент полезного действия электрического мотора постоянного тока был поднят груз массой m на высоту h. Совершая работу, равную $m\,g\,h$, мотор потребил энергию равную $U\,I\,t$, где U – приложенное напряжение, I – ток, t – время, в течение которого работал мотор. Все погрешности m, h, U и I могут быть измерены с точностью до 1 %, в то время как t имеет погрешность 5 %. Величина g известна с ничтожной погрешностью.

Используя известное выражение для $\eta = m\,g\,h\,/\,U\,I\,t$, определите коэффициент полезного действия мотора, когда все погрешности зависимы и когда независимы и случайны. Какое из полученных значений более достоверно и почему?

ЗАДАЧИ 18 – 25. МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Появление методической составляющей погрешности вызвано несовершенством выбранного метода измерения. Установить точное соответствие между измеряемой величиной и выходным сигналом никогда не удается, вследствие недостаточной изученности объекта, неполной адекватности модели, влияния внешних факторов и средства измерения на объект. Например, при измерении сопротивления методом амперметра и вольтметра и вычислении его значения по формуле $R = U/I$, где U и I показания вольтметра и амперметра, всегда возникает методическая составляющая погрешности вследствие того, что сопротивление вольтметра не равно бесконечности, а амперметра не равно нулю. Поэтому включение их в измерительную цепь вызывает изменение ее режима работы.

Если амперметр, имеющий сопротивление R_A, включен последовательно с измеряемым сопротивлением R, а вольтметр включен параллельно им, то ток протекающий через R и действительное сопротивление $R_д$ будут соответственно равны:

$$I = \frac{U}{R_A + R}; \qquad R_д = \frac{U - IR_A}{I} = \frac{U}{I} - R_A.$$

Следовательно, методическая погрешность измерения, равная измеренному значению минус действительное будет равна:

$$\Delta R = R - R_д = \frac{U}{I} - \left(\frac{U}{I} - R_A\right) = R_A.$$

Инструментальная погрешность возникает вследствие погрешности самих средств измерения и оценивается как систематическая составляющая в соответствии с классом точности данного средства измерения. Для некоторых средств измерения она указывается непосредственно в абсолютных значениях или задается в форме таблицы, например, для мостов компенсаторов и магазинов сопротивлений.

Задача 18

При измерении диаметра цилиндра (D) микрометром с ценой деления 0,01 мм получили следующие значения: 14,85; 14,80; 14,84; 14,81; 14,79. Определите наиболее вероятное значение D и его стандартную погрешность.

На результат измерения может оказывать влияние инструментальная погрешность, т.е. погрешность микрометра. Можно ли ее свести к случайной составляющей погрешности и учесть при обработке результатов измерений?

Задача 19

Определите относительную методическую погрешность (δ) измерения напряжения вольтметром с внутренним сопротивлением $R_B = 1200$ Ом на нагрузке $R_н = 500$ Ом, получающей питание от источника, ЭДС которого $E = 8$ В и внутреннее сопротивление $R_0 = 60$ Ом.

Задача 20

Определите относительную методическую погрешность (δ) измерения ЭДС источника вольтметром с внутренним сопротивлением $R_B = 900$ Ом, если внутреннее сопротивление источника $R_0 = 100$ Ом.

Указание: вначале выведите окончательную формулу для δ.

Задача 21

Для измерения ЭДС $E = 1{,}5$ В с внутренним сопротивлением $R_0 = 100$ Ом использован вольтметр класса 0,2 с верхним пределом измерения $U_B = 3$ В и внутренним сопротивлением $R_B = 1000$ Ом. Определите предел допустимой относительной погрешности вольтметра и методическую погрешность измерения. Сравните их между собой. Запишите значение полной погрешности измерения.

Задача 22

Вольтметр, имеющий верхний предел измерения $U_B = 150$ В и ток полного отклонения $I_B = 3$ мА, измеряется падение напряжения на резисторах $R_1 = 5$ кОм и $R_2 = 10$ кОм, включенных последовательно к источнику с напряжением 120 В, имеющему нулевое внутреннее сопротивление. Чему равны показания прибора и относительная методическая погрешность измерения? Погрешностями прибора пренебречь.

Задача 23

Резистор сопротивлением $R = 10$ кОм подключен к источнику напряжением $U =$ 15 мВ. Для измерения тока последовательно с резистором включен микроамперметр класса точности 1,5, имеющий предел измерения 1 мкА и внутреннее сопротивление $R_A = 7300$ Ом. Определите:

а) относительную методическую погрешность измерения тока микроамперметром;

б) наибольшую инструментальную погрешность измерения тока этим амперметром.

Сравните их и запишите значение полной погрешности измерения с нужным количеством значащих цифр.

Задача 24

Определите, какими должны быть отношения внутреннего сопротивления амперметра, включенного в цепь для измерения тока, к выходному сопротивлению этой цепи, чтобы относительные методические погрешности измерения тока не превышали (в процента):

0,1; 1,0 10.

Задача 25

Определите абсолютную и относительную инструментальные погрешности косвенного измерения сопротивления резистора по формуле $R = U/I$, если показания вольтметра 10 В, показания миллиамперметра 100 мА. Предел измерения вольтметра 15 В, класс точности 1,0, gредел измерения миллиамперметра 150 мА, класс точности 1,5.

ЗАДАЧИ 26 – 28. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

При построении графиков пользуйтесь миллиметровой бумагой. Отчетливо разметьте оси координат, укажите на них названия или обозначения величин и их единицы. Выбирайте масштаб таким образом, чтобы график заполнял всю площадь в пределах координатных осей, при этом необязательно наличие на графике начала координат. Исчерпывающие рекомендации по построению графиков даны в разделе 6.

Задача 26

Используя данные задачи 4, постройте на миллиметровой бумаге график зависимости конечного момента L_2 от начального L_1 для описанного там эксперимента. Нарисуйте для каждой точки отсчета вертикальные и горизонтальные черточки погрешностей в том же масштабе, что и график.

На какую кривую, по-вашему, будут ложиться все точки? Проведите эту кривую. Лежат ли точки на ожидаемой кривой (с учетом экспериментальных погрешностей).

Задача 27

В эксперименте с математическим маятником решено проверить, действительно ли период колебания маятника (T) не зависит от амплитуды колебания (A), определенной как наибольший угол, на который отклоняется маятник от вертикали. Были получены следующие результаты:

Амплитуда A, град	Период T, с	Амплитуда A, град	Период T, с
5 ± 2	1,932 ± 0,005	40 ± 3	2,01 ± 0,01
17 ± 2	1,94 ± 0,01	53 ± 4	2,04 ± 0,01
25 ± 2	1,96 ± 0,01	67 ± 6	2,12 ± 0,02

Постройте график зависимости T от A. Обратите внимание на выбор масштаба. Если почувствуете затруднение, постройте два графика: один, включающий начало координат A = 0 и T = 0 , и второй, на котором показаны значения T только между 1,9 и 2,2 с. Можно ли на основании этого эксперимента сделать вывод, что период (T) не зависит от амплитуды (A)? Если нет, то как можно объяснить это несоответствие?

Задача 28*

Если камень бросить вверх со скоростью V, он должен подняться на высоту h, определяемую уравнением $V^2 = 2gh$, откуда следует, что величина V^2 должна быть пропорциональна h. Для семи различных бросков студенты получили следующие результаты:

V^2, м^2/с^2	h, м	V^2, м^2/с^2	h, м
0,7 ± 3	0,4 ± 0,05	45 ± 5	2,6 ± 0,05
17 ± 3	0,8 ± 0,05	62 ± 5	3,4 ± 0,05
25 ± 3	1,4 ± 0,05	72 ± 6	3,7 ± 0,05
38 ± 4	2,0 ± 0,05		

Постройте на миллиметровой бумаге в разумно выбранном масштабе зависимость V^2 от h. Величину погрешности для каждой точки изображайте вертикальными и горизонтальными черточками соответствующей длины в виде крестика. Проведите наилучшую, по вашему мнению, прямую через начало координат и отмеченные точки и определите ее наклон как отношение V^2/h снятых с графика. Согласуются ли ваши результаты с принятым значением $2g = 19{,}6$ м/с^2.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1. $H = (5{,}03 \pm 0{,}04)$ м; $T = (19{,}5 \pm 1)$ с. В этом случае целесообразно удержать в вычислениях одну лишнюю значащую цифру;

$Q = (-0{,}32 \pm 0{,}03)\ 10^{-18}$ Кл; $\lambda = (0{,}56 \pm 0{,}07)\ 10^{-6}$ м; $P = (3{,}27 \pm 0{,}04)\ 10^{3}$ (г·см)/с.

2. Очевидный ответ: $(1{,}9 \pm 1)$ г/см^3. Различие равно 0,05 г/см^3, и не является значением, так как меньше величины погрешности.

4. $L_2 - L_1$ должно быть $0{,}3 \pm 0{,}9$; $-0{,}6 \pm 1{,}5$; $-2{,}2 \pm 2$ (следует округлить до -2 ± 2); 1 ± 4; 1 ± 4; -4 ± 4. Теоретически $L_2 - L_1$ должно равняться нулю. Здесь во всех случаях, кроме одного, измеренное значение меньше соответствующей погрешности. Следовательно, полученные значения согласуются с ожидаемым нулевым результатом.

8. Ответы: для $V_1 - V_2$ равны $(4{,}0 \pm 0{,}3)$ см/с и $(0{,}6 \pm 0{,}4)$ см/с. Погрешности, выраженные в процентах, 8 и 70 %. Получили убедительное подтверждение, что если при вычислении относительной погрешности имеем дело с разностью двух близких по значению величин, погрешность может быть сколь угодно большой.

9. Ответ: 292 см^2; 9 см^2 (или точно 7); 3 %; 270 см^2; 30 см^2; 10 %.

10. Ответ:

$q_{наил} = 10 \cdot 20 = 200$;
наибольшее вероятное $q_{наиб} = 11 \cdot 21 = 231$;
наименьшее $q_{наим} = 9 \cdot 19 = 171$,
следовательно $q = 200 \pm 30$.

Погрешность, вычисленная как сумма относительных погрешностей сомножителей, также дает значение $q = 200 \pm 30$, т.е. хорошо согласуется с вычисленным ранее. Однако это правило справедливо только для малых относительных погрешностей, значительно меньше единицы.

13. $(0{,}48 \pm 0{,}02)$ с или 4 %; $(0{,}470 \pm 0{,}005)$ с или 1 %. Нет, потому что маятник, в конце концов, остановится, если его не подталкивать. Кроме того, период может меняться из-за изменения температуры и других факторов.

15.

Сумма	Погрешность суммы, когда исходные погрешности	
	зависимы	независимы и случайны
a + b	80 ± 8;	80 ± 6;
a + c	90 ± 6;	90 ± 5;
a + d	58 ± 5;	58 ± 5.

28. Если будет найдена прямая линия, проходящая через ноль и через все черточки погрешностей, то данные согласуются с предсказанием пропорциональности U^2 и h. Наклон наилучшей аппроксимирующей линии ≈ 18,4. Чтобы найти погрешность в определении наклона наиболее крутой возможной линии (≈ 20,4) и наиболее пологой возможной линии (≈ 16,4), проведите наиболее крутую и наиболее пологую прямые, которые еще разумно совпадают с точками отсчета. Таким образом наклон $\Delta L_1/\Delta L_2$ равен $18{,}4 \pm 2$ м/с^2 (или 18 ± 2), что согласуется с ожидаемым значением 19,6 м/с^2.