СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА, ЧАСТЬ 1

2-й семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Санкт-Петербург
2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА, часть 1
2-й семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Институты: все

Укрупненные группы специальностей и направлений подготовки:

080000 – Экономика и управление
140000 – Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника
150000 – Металлургия, машиностроение и материалообработка
190000 – Транспортные средства
200000 – Приборостроение и оптотехника
210000 – Электронная техника, радиотехника и связь
220000 – Автоматика и управление
230000 - Информатика и вычислительная техника
240000 – Химическая и биотехнологии

Направления подготовки высшего профессионального образования:

261000 – Технология художественной обработки материалов
280200 – Защита окружающей среды

Санкт-Петербург
Издательство СЗТУ
2009

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 517(07)

Математика. Ч. 1, 2-й семестр: учебно-методический комплекс / сост.: И.А. Волынская [и др.] – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009. – с. 217

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

В данном методическом комплексе приведены сведения о дифференциальном и интегральном исчислении функции одной переменной, о функциях нескольких переменных. Данный учебно-методический комплекс предназначен для студентов 1-го курса 2-го семестра всех специальностей СЗТУ.

Рассмотрено на заседании кафедры математики 29.01.09г., одобрено методической комиссией института общепрофессиональной подготовки 29.01.09 г.

Рецензенты: кафедра математики СЗТУ (зав. каф. А.А.Потапенко, д-р физ. -мат. наук, проф.);
кафедра информатики СЗТУ (зав. каф. Г.Г. Ткаченко, канд. физ.-мат.наук, доц.)

Составители: Волынская И.А., доц.; Гаврилов В.Л., канд. техн. наук, доц.; Глюжецкене Т.В., канд. пед. наук, доц.; Могилева Л.М., канд. физ.-мат. наук, доц.; Потапенко А.А., д-р физ. -мат. наук, проф.; Сентяков В.А., доц.

1. Информация о дисциплине

1.1. Предисловие

Дисциплина «Математика, часть 1» изучается студентами технических специальностей всех форм обучения в четырех, а гуманитарных специальностей – в трех семестрах. Данный методический комплекс предназначен для студентов первого курса II семестра и содержит материал по разделам: «Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных», «Неопределенный и определенный интегралы».

Целью изучения дисциплины является привитие студентам навыков математического мышления, использование математических методов и основ математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины – усвоение студентами базовых знаний, дающих возможность осуществлять математическую формулировку любых технических, физических или социально-экономических задач и умение применять математический аппарат для решения конкретных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен овладеть основами знаний по дисциплине, формируемыми на нескольких уровнях:

Иметь представление:

- о целях и областях применения высшей математики;

Знать:

- основные понятия и определения курса;
- операции с векторами и матрицами;
- правила нахождения производных различных функций;
- способы взятия интегралов;

Уметь применять эти знания для решения прикладных задач:

- решение систем алгебраических уравнений в задачах оптимизации;
- исследование функций;
- нахождение физико-геометрических характеристик различных величин;
- исследование протекания физического явления во времени.

Владеть:

-умением осуществлять математическую постановку задач, решаемых в различных областях науки, техники, экономики и маркетинга;

- методами решения поставленных задач.

Место дисциплины в учебном процессе.

Курс «Математика, часть 1» является фундаментом для изучения большинства дисциплин, и также применяется в курсовом и дипломном проектировании.

1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы

1.2.1. Содержание дисциплины по ГОС

Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

1.2.2. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов		
	форма обучения		
	очная	очно-заочная	заочная
Общая трудоемкость дисциплины (ОТД))	**140**		
Работа под руководством преподавателя(включая ДОТ)	**84**	**84**	**84**
В т.ч. аудиторные занятия: лекции практические занятия (ПЗ)	 **44** **24**	 **12** **24**	 **6** **12**
Самостоятельная работа студента (СР)	**56**	**56**	**56**
Промежуточный контроль, количество в том числе: контрольная работа	**11** –	**13** **2**	**13** **2**
Вид итогового контроля	экзамен		

1.2.3. Перечень видов практических занятий и контроля

- две контрольные работы (для очно-заочной и заочной форм обучения);

- практические занятия – 24 часа для очной и очно-заочной форм обучения; 12 часов – для заочной формы обучения;

- 11 тестов (по темам, тренировочные);

- экзамен.

2. Рабочие учебные материалы

2.1. Рабочая программа (*объем* 140 *часов*)

Введение (2 часа)

Предмет и задачи дисциплины. Основные этапы развития математики. Ее роль в учебном процессе, научных исследованиях и промышленном производстве.

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной (38 часов)

[1], с. 4…78

Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Представление функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ по формуле Тейлора.

Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие, достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Кривизна плоской кривой. Радиус кривизны. Эволюта и эвольвента. Кривизна и радиус кривизны пространственной кривой.

Раздел 2. Элементы высшей алгебры (16 часов)

[2], с. 18…23

Комплексные числа, действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Корни из комплексных чисел.

Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

Раздел 3. Неопределенный и определенный интегралы (44 часа)

[2], с. 4…17, 28…67

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

Методы интегрирования: метод подстановки, интегрирование по частям, интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций. Использование таблиц интегралов.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенного интеграла.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их свойства.

Векторные функции действительного переменного, их дифференцирование.

Раздел 4. Функции нескольких переменных и их дифференцирование (38 часов)

[3], с. 3…56

Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.

Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теорема существования. Дифференцирование неявных функций.

Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применения при поиске оптимальных решений.

Элементы функционального анализа и топологии.

Основы дифференциальной геометрии поверхностей. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость и нормаль. Дифференциал длины дуги кривой. Первая квадратичная форма. Кривизна поверхности. Вторая квадратичная форма. Геодезические линии.

Заключение (2 часа)

Изложенный учебный материал послужит основой для изучения не только последующих разделов математики, но и основных технических дисциплин.

2.2. Тематический план дисциплины

2.2.1. Тематический план дисциплины

для студентов очной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля						
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ ПЗ
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ			
ВСЕГО		140	44	16	24		56		24
1	**Введение. Раздел 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**	40					20		
1.1	Основные теоремы о дифференцируемых функциях		8		4			1	1
1.2	Применение производной для исследования функции		2	2	4			2	2
2	**Раздел 2. Элементы высшей алгебры**	16					6		
2.1	Основные сведения о комплексных числах		4	2				3	
2.2	Основные сведения о рациональных функциях		2	2					
3	**Раздел 3. Неопределенный и определенный интегралы**	44					16		
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод непосредственного интегрирования		2		4			4	3
3.2	Методы вычисления неопределенных интегралов		2	2				5	
3.3	Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций		2	2					
3.4	Определенный интеграл, его		4		4			6,7	4

	свойства и приложения								
3.5	Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций		2		4			8	5
4	**Раздел 4. Функции нескольких переменных и их дифференцирование**	40					14		
4.1	Функции нескольких переменных		4	2	2			9	6
4.2	Дифференцирование функций нескольких переменных		4					10	
4.3	Некоторые приложения частных производных		2	2	2			11	7
4.4	Дифференциальная геометрия поверхностей		2	2					
4.5	Основы функционального анализа. Заключение		4						

2.2.2. Тематический план дисциплины

для студентов очно-заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля						
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	Контрольные работы
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ			
ВСЕГО		140	12	48	24		56		2
1	**Раздел 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**	40					20		
1.1	Основные теоремы о дифференцируемых функциях		2	6	4			1	3.1
1.2	Применение производной для исследования функции		2	2	4			2	3.2
2	**Раздел 2. Элементы высшей алгебры**	16					6		
2.1	Основные сведения о комплексных числах		2	4				3	

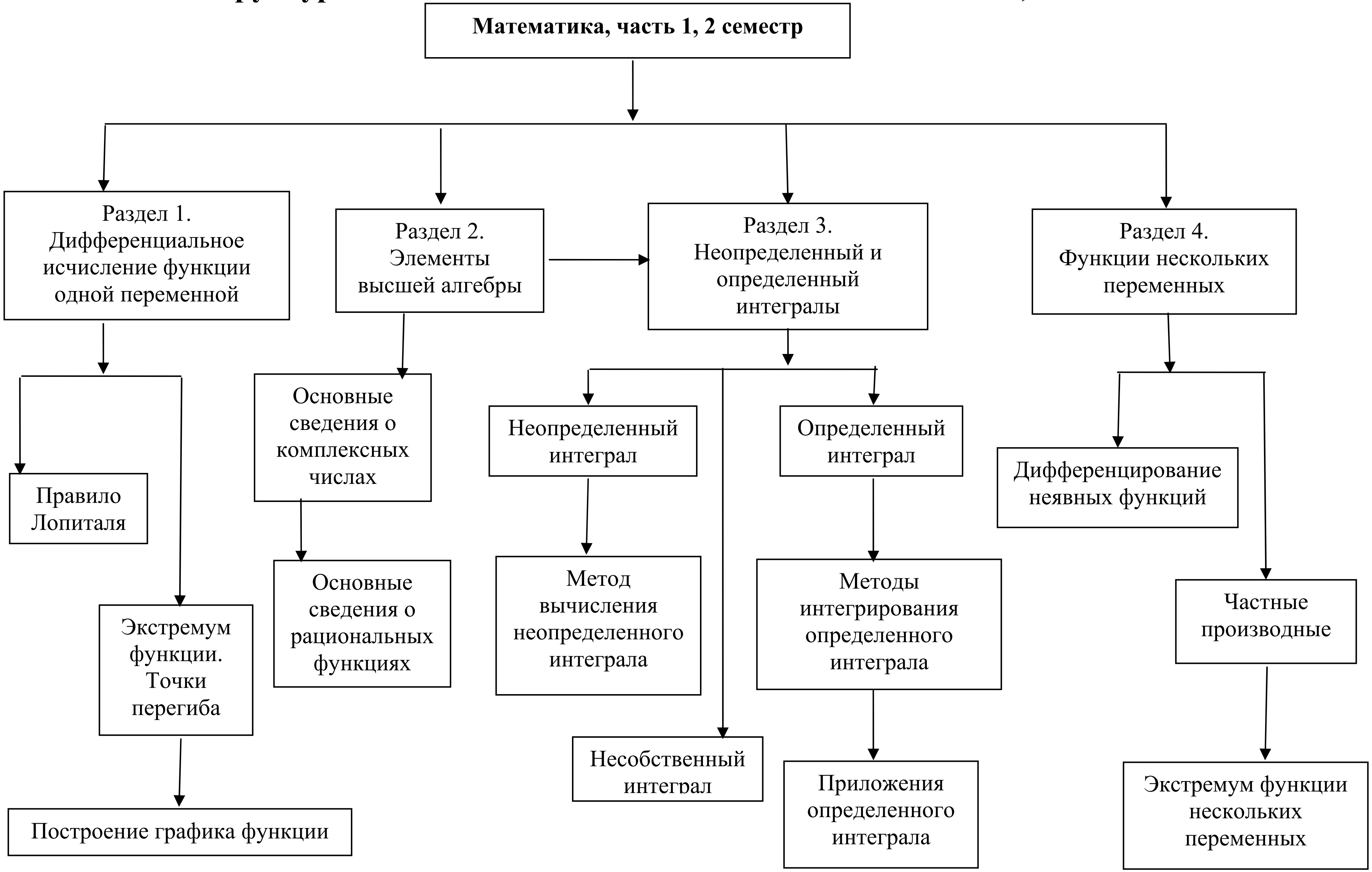
2.2	Основные сведения о рациональных функциях			4				
3	**Раздел 3. Неопределенный и определенный интегралы**	44				16		
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод непосредственного интегрирования		2		4		4	
3.2	Методы вычисления неопределенных интегралов			4			5	3.3, 3.4
3.3	Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций			4				
3.4	Определенный интеграл, его свойства и приложения		2	2	4		6,7	3.5, 4.2
3.5	Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций			2	4		8	4.1
4	**Раздел 4. Функции нескольких переменных и их дифференцирование**	40				15		
4.1	Функции нескольких переменных		2	4	2		9	
4.2	Дифференцирование функций нескольких переменных			4			10	4.3, 4.4
4.3	Некоторые приложения частных производных			4	2		11	4.5
4.4	Дифференциальная геометрия поверхностей			4				
4.5	Основы функционального анализа			4				

2.2.3. Тематический план дисциплины
для студентов заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля						
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	Контрольные работы
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ			
ВСЕГО		140	6	54	12	12	56		2
1	**Раздел 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**	40					20		
1.1	Основные теоремы о дифференцируемых функциях		2	6	2	2		1	3.1
1.2	Применение производной для исследования функции			4	2	2		2	3.2
2	**Раздел 2. Элементы высшей алгебры**	16					6		
2.1	Основные сведения о комплексных числах			6				3	
2.2	Основные сведения о рациональных функциях			4					
3	**Раздел 3. Неопределенный и определенный интегралы**	44					16		
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод непосредственного интегрирования		2		2	2		4	
3.2	Методы вычисления неопределенных интегралов			4				5	3.3, 3.4
3.3	Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций			4					
3.4	Определенный интеграл, его свойства и приложения			4		4		6,7	3.5, 4.2
3.5	Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций			2	2	2		8	4.1

4	**Раздел 4. Функции нескольких переменных и их дифференцирование**	40				14		
4.1	Функции нескольких переменных		2	4	2		9	
4.2	Дифференцирование функций нескольких переменных			4			10	4.3, 4.4
4.3	Некоторые приложения частных производных			4	2		11	4.5
4.4	Дифференциальная геометрия поверхностей			4				
4.5	Основы функционального анализа			4				

2.3. Структурно-логическая схема дисциплины «Математика, часть 1»



2.4. Временной график изучения дисциплины при использовании ДОТ

№ раздела	Название раздела	Продолжительность изучения раздела (в днях, из расчета - 4ч в день)
1	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	10
2	Элементы высшей алгебры	4
3	Неопределенный и определенный интегралы	14
4	Функции нескольких переменных	13
	Итого	41

2.5. Практический блок

2.5.1. Практические занятия

№ ПЗ	№ темы	Наименование практических занятий	Кол-во часов по					
			очной форме обучения		очно-заочной форме обучения		заочной форме обучения	
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ
1	Тема 1.1	Правило Лопиталя	4		4		2	2
2	Тема 1.2	Применение производной для исследования функции	4		4		2	2
3	Тема 3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл	4		4		2	2
4	Тема 3.4	Определенный интеграл. Его приложения	4		4			4
5	Тема 3.5	Несобственный интеграл	4		4		2	2

6	Тема 4.1	Функции нескольких переменных	2	2	2
7	Тема 4.3	Экстремумы функций нескольких переменных	2	2	2

2.6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина содержит 4 раздела. После изучения каждого раздела Вам следует ответить на вопросы тренировочных тестов и выполнить задания контрольных работ. Номера соответствующих тестов и заданий контрольных работ указаны в тематических планах.

За каждый вид самостоятельных работ начисляется определенное количество баллов. Максимально возможное количество баллов, которые может получить студент, равно 100 баллам. Усвоение теоретического материала проверяется с помощью тестов. За каждый правильный ответ контрольного теста студент получает 1 балл:

$$60 \text{ вопросов} \times 1\text{балл} = 60\text{баллов.}$$

За каждую зачтенную контрольную работу студент получает 15 баллов:

$$15 \text{ баллов} \times 2 \text{ контр. работы} = 30 \text{ баллов.}$$

Дополнительно, активно работая на занятиях, выполняя творческие задания, выдаваемые преподавателем, студент может заработать еще 10 баллов.

Экзаменационная оценка (по усмотрению преподавателя) может быть выставлена на основании итогов БРС в соответствии со следующими критериями.

Количество набранных баллов	Экзаменационная оценка
60-75	Удовлетворительно
76-89	Хорошо
90-100	Отлично

Примечание. 30 баллов из указанной суммы баллов должны быть набраны в результате решения задач контрольных работ. Студенты очной формы обучения набирают эти баллы на практических занятиях, решая задачи, предложенные преподавателем.

3. Информационные ресурсы дисциплины

3.1. Библиографический список

Основной:

1. Волынская, И.А. Математика, ч.1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учеб.-метод. комплекс, учеб. пособие /И.А. Волынская. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
2. Потапенко, А.А. Интегральное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие /А.А. Потапенко. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006.
3. Гаврилов, В.Л. Математика, ч.1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: учеб.-метод. комплекс, учеб. пособие /В.Л. Гаврилов. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
4. Волынская, И.А. [и др.]. Учебно-методический комплекс (информационные ресурсы дисциплины; методические указания к выполнению практических занятий) /И.А.Волынская. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2007.

Дополнительный:

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учебное пособие для вузов: Т.I /Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985-2002.
6. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов: Т.I /В.Д.Черненко.- СПб.: Политехника, 2003
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие: /Г.С.Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1978-2001.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов: Ч. 1 /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. школа, 1999.

Средства обеспечения освоения дисциплины (ресурсы Internet)

9. http://www.mathelp.spb.ru/index1.htm
10. http://allmath.ru/higheralgebra.htm
11. http://alexlarin.narod.ru/kvm.html
12. http://matema.narod.ru/products.htm
13. http://www.ispu.ru/library/lessons/math/index.html

3.2. Опорный конспект лекций по дисциплине

Введение

В предлагаемом Вам опорном конспекте лекций по курсу математики в краткой и сжатой форме изложен теоретический материал, широко проиллюстрированный решенными примерами, необходимый к усвоению в течение первого курса обучения в СЗТУ. В каждом разделе конспекта указаны количество и номера задач, которые необходимо решить для осуществления текущего и итогового контроля.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Данный раздел включает две темы:

- **1.1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.**
- **1.2. Применение производной для исследования функции.**

По каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие его примеры. В рубрике “решение задач” дан подробный разбор типовых примеров.

После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить две задачи из контрольной работы № 3 в соответствии со своим вариантом.

1.1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими теоремами, формулами и правилами:

- **Теорема Ферма.**
- **Теорема о корнях производной.**
- **Теорема об отношении приращений двух функций.**
- **Формула конечных приращений.**
- **Приближение функции многочленом в окрестности данной точки.**
- **Примеры разложения функций по формуле Тейлора.**
- **Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.**

После изучения данной темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №1. При возникновениии вопросов следует обратиться к [1], глава 1, с.4-23 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы № 3 в соответствии со своим вариантом под № 101-110.

Теорема Ферма[*]

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (a,b) и в некоторой внутренней его точке $x = c$ достигает наибольшего (или наименьшего) значения, то в этой точке первая производная равна нулю, т.е. $f'(c) = 0$.

Поскольку производная функции в точке численно равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в соответствующей точке, то геометрический смысл теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна оси абсцисс (рис. 1.1).

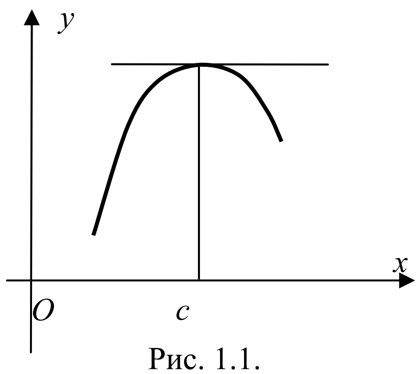


Рис. 1.1.

В теореме Ферма существенно, что c - внутренняя точка. Например, функция $f(x) = \sin x$ в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигает в граничной (не внутренней) точке $c = 0$ наименьшего значения, но ее производная в этой точке равна единице $(\cos 0 = 1)$.

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)[**]

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, дифференцируема в открытом промежутке (a,b) и принимает на его концах равные значения $f(a) = f(b)$, то внутри промежутка (a,b) существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.

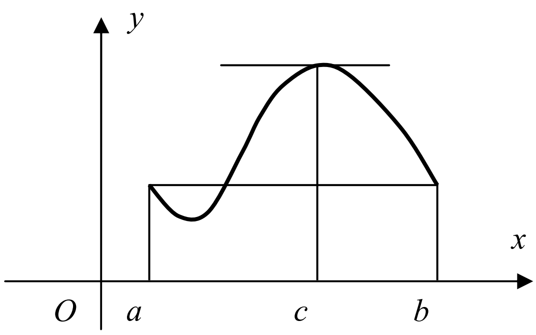


Рис. 1.2.

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси

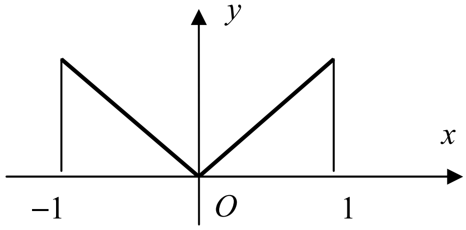


Рис. 1.3.

[*] Пьер Ферма (1601-1665) – французский математик,

[**] Мишель Ролль (1652-1719)-французский математик.

абсцисс (рис. 1.2). Если требование дифференцируемости нарушается хотя бы в одной точке (a,b), то производная функции может нигде не обратиться в нуль. Например, для функции $f(x)=|x|$ на промежутке [—1; 1] (рис. 1.3) выполнены все условия теоремы Ролля, кроме существования производной в точке $x=0$. Но при этом действительно в интервале (—1;1) нет такой точки, где производная равна нулю: $f'(x)=-1$, если $-1<x<0$ и $f'(x)=1$, если $0<x<1$, а при $x=0$ производная $f'(x)$, как уже отмечалось, не существует.

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)*

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на замкнутом промежутке $[a,b]$, дифференцируемы в открытом промежутке (a,b) и $\varphi'(x)\neq 0$ во всех точках промежутка (a,b). Тогда между точками a и b имеется по крайней мере одна точка c, в которой

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1.1}$$

Формулу (1.1) обычно называют **формулой Коши.**

Формула конечных приращений (формула Лагранжа)**

Формула конечных приращений (формула Лагранжа) является важным частным случаем формулы Коши.

Для того, чтобы ее вывести, положим в (5.1): $\varphi(x)=x.$ Тогда $\varphi(a)=a,\ \varphi(b)=b,\ \varphi'(x)=1$ и формула (5.1) принимает вид

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{1.2}$$

или

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \tag{1.3}$$

где $a<c<b$. Последняя формула называется **формулой конечных приращений, или формулой Лагранжа**. В соответствии с этой формулой, приращение функции на замкнутом интервале равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого интервала. Функция $f(x)$, входящая в формулу (1.3), должна быть, в соответствии с теоремой Коши, непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b).

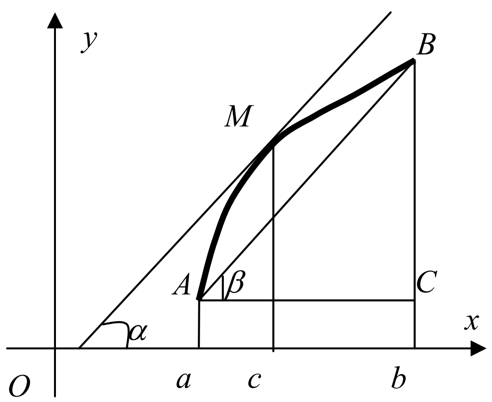


Рис. 1.4.

* Огюстен Коши (1789-1857)-французский математик,

** Жозеф-Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик и механик.

Формулу (1.3) часто записывают в другой форме. Вместо a и b будем писать соответственно x и $x+\Delta x$. Тогда

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c-x}{\Delta x}=\theta,$$

где θ - некоторое число, удовлетворяющее условию $0<\theta<1$. Отсюда $c=x+\theta\Delta x$, и формула (1.3) в новых обозначениях примет вид:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Геометрический смысл формулы Лагранжа ясен из рис. 1.4.

Пусть $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ - точки графика функции $y=f(x), AB$ - хорда, соединяющая точки A и B. Тогда отношение $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\beta$, где β - угол наклона хорды AB к оси Ox. Как известно, значение производной функции $f(x)$ в точке c равно тангенсу угла наклона α касательной к графику этой функции в точке $M(c,f(c)): f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$. Тогда формула (1.2) может быть записана в виде: $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), то между точками a и b имеется по крайней мере одна точка c, в которой касательная к графику данной функции параллельна хорде AB.

В качестве примера выпишем формулу Лагранжа для функции $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке [0,1] и найдем значение c.

Для этого вначале по правилу дифференцирования сложной функции найдем производную:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{(1+x)^2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Поэтому

$$f'(c)=-\frac{1}{1+c^2}.$$

Так как

$$f(a)=f(0)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}, \quad f(b)=f(1)=\operatorname{arctg}0=0, \quad b-a=1-0=1,$$

то формула конечных приращений (1.3) примет вид:

$$0-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{1+c^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{1+c^2}=\frac{\pi}{4},$$

$$1+c^2=\frac{4}{\pi}, \qquad\qquad c^2=\frac{4}{\pi}-1.$$

Отсюда

$$c=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

В теоремах Ферма, Ролля и Коши, а также в формуле Лагранжа речь идет о существовании некоторой "средней" точки $c\in(a;b)$, для которой выполняется то или иное равенство. Поэтому рассмотренную группу теорем можно объединить названием **теоремы о средних значениях**.

Приближение функции многочленом в окрестности данной точки (формула Тейлора)*

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, содержащем точку $x=a$. Предположим, что в этом промежутке она имеет все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Рассмотрим многочлен $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$, обладающий в точке a следующими свойствами:

1) значение многочлена равно значению данной функции;

2) значения всех производных многочлена до n-го порядка включительно равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$.

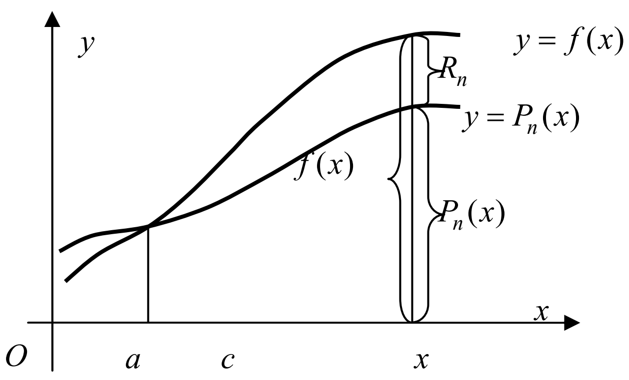


Рис. 1.5.

Этим условиям удовлетворяет так называемый **многочлен Тейлора для функции** $f(x)$:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a)^n. \qquad (1.4)$$

Здесь используется обозначение $n!$ (читается “эн-факториал”) для записи произведения всех целых чисел от 1 до n включительно: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. По определению $0!=1$. Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции и ее многочлена Тейлора: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ (см. рис 1.5). Тогда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, или, в развернутом виде:

* Брук Тейлор (1685-1731)-английский математик

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (1.5)$$

Слагаемое $R_n(x)$ в формуле (1.5) называется **остаточным членом**. Таким образом, формула (5.5) дает возможность заменить функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, определяемой значением остаточного члена $R_n(x)$.

Остаточный член в форме Лагранжа задается формулой:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (1.6)$$

В этом случае формула (1.5) примет вид:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (1.7)$$

Последнее выражение представляет собой **формулу Тейлора** $(n+1)$-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$.

В частности, при $n=0$ формула (1.7) примет вид: $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$. Это формула Лагранжа, которую иначе можно назвать формулой Тейлора 1-го порядка.

При $n=1$ получим формулу Тейлора 2-го порядка:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \quad (1.8)$$

Отбросив в этом выражении остаточный член, будем иметь:

$$f(a+\Delta x)-f(a)\approx f'(a)\Delta x, \text{ где } \Delta x=x-a,$$

или

$$\Delta f(a)\approx df(a).$$

Таким образом, получено приближенное представление приращения функции в данной точке $x=a$ ее дифференциалом в этой точке.

Рассмотрим примеры разложения некоторых функций по формуле Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (1.9)$$

Этот частный случай формулы Тейлора иногда называют формулой Маклорена* (точка c расположена между 0 и x).

а) Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$.

Для нее

* Колин Маклорен (1698-1746)- шотландский математик

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

так что

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Многочлен Тейлора для функции $f(x) = e^x$ при $a = 0$, или **многочлен Маклорена**, будет иметь вид:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Заменив рассмотренную функцию ее многочленом Маклорена, получим:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \qquad (1.10)$$

Ошибка этого приближенного равенства равна остаточному члену, который для рассматриваемой функции при $a = 0$ будет равен

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где c лежит между 0 и x.

Предположим, что функцию $f(x) = e^x$ мы рассматриваем не на всей числовой оси, а только на замкнутом интервале $-1 \le x \le 1$. Поскольку в этом случае $c \in (-1,1)$, то будем иметь следующую оценку $R_n(x)$:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Итак, $\left|R_n(x)\right| < \dfrac{3}{(n+1)!}$ для любого x из замкнутого интервала $\left[-1,1\right]$, откуда следует, что за абсолютную погрешность приближенного равенства (1.10) на интервале [—1,1] можно принять величину $\Delta = \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Пусть, например, мы хотим, чтобы абсолютная погрешность приближенного равенства (5.10) на интервале $\left[-1,1\right]$ не превосходила 0,00001. Определим, при каком значении n это условие выполнимо.
Нужное значение n найдем из условия

$$\Delta = \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}00001.$$

Вычислив последовательно: $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 3 \cdot 2 = 6$; $4! = 3! \cdot 4 = 24$; $5! = 4! \cdot 5 = 120$; $6! = 5! \cdot 6 = 720$; $7! = 6! \cdot 7 = 5040$; $8! = 7! \cdot 8 = 40320$; $9! = 8! \cdot 9 = 362830$, находим, что $\Delta < 0{,}00001$ при $n + 1 = 9$, или $n = 8$. Итак, с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,00001, имеем приближенную формулу

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^8}{8!}, \quad x\in[-1,1]$$

В частности, при $x=1$ находим

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{8!} \approx 2,71828.$$

б) Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x,$ которая имеет производную любого порядка, причем

$$f(x)=\sin x; \qquad f(0)=0;$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right); \qquad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f'''(0)=-1;$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(4)}(0)=0;$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n+1)}(c)=\sin\left(c+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя полученные значения в выражение (1.9), получим разложение функции $f(x)=\sin x$ по формуле Тейлора при $a=0$, или формуле Маклорена:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где n - любое нечетное число.

Поскольку $\left|\sin\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,$ то предел остаточного члена $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ при всех вещественных значениях x.

в) Разложение функции $f(x)=\cos x$ производится совершенно аналогично:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где n - любое четное число.

Здесь также $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ для всех вещественных x.

г) Функция $f(x)=\ln(1+x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x>-1$. Поэтому для нее формулу Маклорена можно написать для любого n при $x>-1$. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ldots,f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

то, следовательно,

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!.$$

и формула Маклорена примет вид:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}.$$

д) Рассмотрим функцию $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, для которой

$$f'(x)=\alpha(1-x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ldots,f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

и, следовательно,

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\quad f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ldots,$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n+1).$$

Поэтому формула Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя*

Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{x \to a} f(x). \tag{1.11}$$

Если $f(x)$ - элементарная функция и значение a принадлежит множеству ее определения, то для получения ответа следует перейти к пределу под знаком функции $f(x)$. С вычислительной точки зрения это означает подстановку в выражение для $f(x)$ вместо x предельного значения a. Однако формальное применение сформулированного правила и теорем о конечных пределах в некоторых случаях может привести к одному из следующих лишенных смысла символов

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

В таких ситуациях по получающимся выражениям нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о его значении в случае существования. Поэтому в подобных случаях говорят, что в точке a имеет место **неопределенность соответствующего типа**. Вычисление предела (1.11) называют тогда **раскрытием неопределенности.**

а) Вначале рассмотрим неопределенность типа $\frac{0}{0}$, то есть, исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к нулю при $x \to a$.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми и бесконечно малыми функциями в некоторой окрестности a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности, исключая может быть, саму точку a. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.12}$$

при условии, что существует предел, записанный в правой части этого равенства.

В формуле (1.12) обозначение a может использоваться как для числа, так и вместо одного из символов: $\infty, -\infty, +\infty$.

Аналогичная теорема имеет место и для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Итак, для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно сформулировать следующее правило.

* Гильом Лопиталь (1661-1704) – французский математик.

Правило Лопиталя.

Предел отношения двух бесконечно малых (или двух бесконечно больших) функций существует и равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad (1.13)$$

если выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности (кроме, может быть, самой точки a);

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ $\left(\text{или} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\right)$.

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ конечный или бесконечный.

Замечание. Если предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя применяется еще раз.

Замечание. Формула (1.13) справедлива только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный) существует, т.е. при выполнении условия 3 правила Лопиталя. Может случиться, что предел, стоящий слева, существует, в то время как предел, стоящий справа, не существует. Рассмотрим пример. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. Этот предел существует и равен 1. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Но отношение производных

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$$

при $x\to\infty$ не стремится ни к какому пределу, а колеблется между 0 и 2.

б) Неопределенности типа $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ вначале с помощью тождественных алгебраических преобразований следует привести к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. После этого можно непосредственно применять правило Лопиталя.

в) При раскрытии неопределенностей типа $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$, используется основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (в частности $e^{\ln b} = b$) и непрерывность показательной функции, в силу чего $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Решение задач.

Задача 1. Найти

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

Решение.

Подставив в выражение для заданной функции предельное значение аргумента $x=1$, получим: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty.$ Таким образом, имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$. Если учесть, что $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$, то можно перейти к вычислению $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$, что сводится к раскрытию неопределенности типа $\frac{0}{0}$ при помощи правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Задача 2. Найти

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Решение.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0,\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, то в данном случае имеем неопределенность типа $\infty-\infty.$ Приведем данное выражение к общему знаменателю

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}.$$

Можно убедиться, что для раскрытия получившейся неопределенности типа $\frac{0}{0}$ применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{\ln x\cdot 1+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}.$$

Вновь возникла неопределенность типа $\frac{0}{0}$, которую раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Задача 3. Найти

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Решение.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, то имеем неопределенность типа 1^∞. Найдем вначале предел логарифма заданной функции:

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

На этом этапе возникла неопределенность типа $\frac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)=\ln 1=0$. Чтобы ее раскрыть, необходимо дважды применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{tg}x)'}{(x)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

Теперь используем основное логарифмическое тождество и непрерывность показательной функции:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Вопросы для самопроверки по теме 1.1

1. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы удовлетворять условиям теоремы Ферма?
2. Почему теорема Ролля называется также теоремой о корнях производной?
3. Каким условиям должны удовлетворять функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, чтобы для них можно было записать формулу Коши?
4. Какая формула называется формулой конечных приращений (формулой Лагранжа)?
5. Как выглядит формула Тейлора $(n+1)$- го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ с остаточным членом в форме Лагранжа?
6. Каким образом из формулы Тейлора получить формулу Маклорена?
7. Как формулируется правило Лопиталя? В каком случае его применяют вновь?
8. Остаются ли справедливыми формулы Коши, Лагранжа и Тейлора не только при $a < b$, но и при $b < a$?

1.2. Применение производной для исследования функции

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Критерий постоянства функций. Признаки возрастания и убывания функции.**
- **Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума.**
- **Достаточное условие экстремума.**
- **Отыскание наименьших и наибольших значений функции на промежутке.**
- **Выпуклость и точки перегиба.**
- **Асимптоты графика функции.**
- **Общий план исследования функции.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №2. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [1], глава 2, с. 24-50 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы №3 в соответствии со своим вариантом под № 111-120.

Критерий постоянства функций. Признаки возрастания и убывания функций

Теорема. (Критерий постоянства функции).

Для того чтобы функция $f(x)$ была постоянна на некотором промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы равенство $f'(x)=0$ выполнялось во всех точках этого промежутка.

Сформулируем необходимое и достаточное условие возрастания и убывания функций.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ дифференцируема и возрастает на некотором промежутке X, то ее производная на этом промежутке неотрицательна, то есть, $f'(x)\geq 0$ для всех x, принадлежащих промежутку X. (Необходимый признак возрастания функции).

2) Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, причем $f'(x)>0$ для всех x, принадлежащих промежутку X, то данная функция на этом промежутке возрастает. (Достаточный признак возрастания функции).

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ дифференцируема и убывает на некотором промежутке X, то ее производная на этом промежутке неположительна, то есть, $f'(x)\leq 0$ для всех x, принадлежащих промежутку X. (Необходимый признак убывания функции).

2) Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, причем $f'(x)<0$ для всех x, принадлежащих промежутку X, то данная функция на этом промежутке убывает. (Достаточный признак убывания функции).

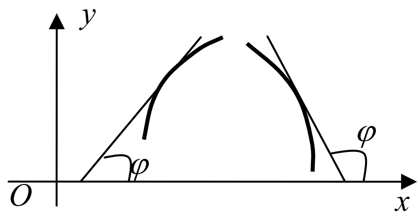


Рис. 1.6.

Обе эти теоремы имеют простое геометрическое истолкование. В любой точке промежутка возрастания функции $y=f(x)$ касательная к ее графику образует с осью Ox острый угол φ; на промежутке убывания функции угол φ - тупой (рис. 1.6). Иначе говоря, промежутку возрастания функции $f(x)$ соответствует случай $\mathrm{tg}\varphi = f'(x)>0$, а промежутку убывания $\mathrm{tg}\varphi = f'(x)<0$.

Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума

Если функция не является возрастающей или убывающей на всем своем множестве

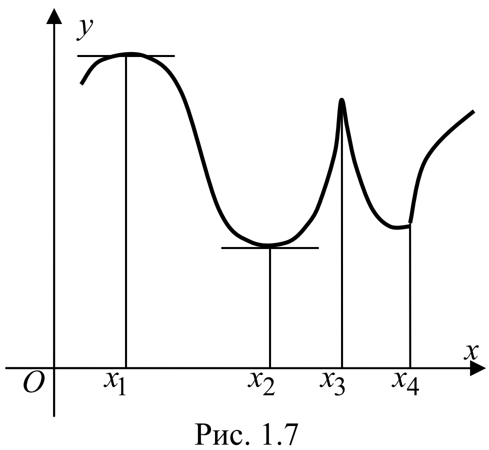


Рис. 1.7

определения, то множество определения этой функции может распадаться на промежутки ее возрастания и убывания. Общая граничная точка промежутка возрастания и убывания называется точкой экстремума или экстремальной точкой функции (точки x_1, x_2, x_3, x_4 на рис. 1.7)

Точки экстремума бывают двух типов:

а) **точки максимума функции** (точки x_1 и x_3 на рис. 1.7), где функция переходит от возрастания к убыванию (если перемещаться в направлении возрастания координаты x);

б**) точки минимума функции** (точки x_2 и x_4 на рис. 1.7), где функция переходит от убывания к возрастанию.

В точке максимума величина функции $f(x)$ больше, а в точке минимума - меньше, чем во всех соседних достаточно близких точках. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума (строгого) функции** $f(x)$, если существует окрестность X этой точки такая, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума (строгого) функции** $f(x)$, если существует окрестность X этой точки такая, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства (≤ или ≥), то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 нестрогий максимум (минимум).

Значения функции $f(x)$ в точках ее максимума и минимума называются **максимумом и минимумом этой функции** и обозначаются через $\max f(x)$ и $\min f(x)$, таким образом:

$f(x_0) = \max f(x)$ тогда и только тогда, если для всех x из окрестности X, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$;

$f(x_0) = \min f(x)$ тогда и только тогда, если для всех x из окрестности X, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$;

где X - достаточно малая окрестность точки x_0.

Максимумы и минимумы функции называются **экстремумами** или **экстремальными значениями** этой функции.

Теорема. (Необходимое условие гладкого экстремума).

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрически теорема истолковывается так: если в точке экстремума график функции имеет касательную и эта касательная не параллельна оси Oy

(как, например, в точке x_3 на рис. 1.7), то эта касательная непременно параллельна оси Ox.

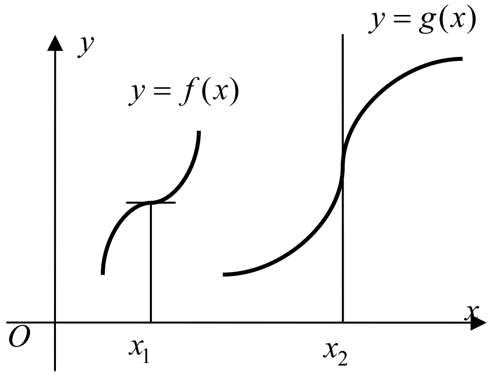


Рис. 1.8.

Итак, в точках **гладкого экстремума** функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = 0$ (точки x_1 и x_2 на рис. 1.7). Существуют, однако, и точки экстремума другого типа - так называемые точки **острого экстремума**, в которых функция $f(x)$ не является дифференцируемой. Здесь возможны два случая:

а) $f'(x) = \infty$, как в точке x_3 на рис. 1.7 (x_3-**точка возврата**);

б) $f'(x)$ не определена, как в точке x_4 на рис. 1.7 (x_4-**угловая точка**).

Определение. **Критическими точками** функции $f(x)$ называются точки, где: либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не существует, при условии, что в двух последних случаях функция непрерывна в соответствующей точке.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то эта точка является критической точкой функции.

Эта теорема выражает необходимое условие экстремума функции $f(x)$. Однако, обратная ей теорема не имеет места: не всякая критическая точка функции $f(x)$ является в то же время и ее экстремальной точкой.

Например, для функций, графики которых представлены на рис. 1.8, точки x_1 и x_2 будут критическими, так как $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = \infty$. Однако, ни одна из этих точек не является экстремальной для соответствующей функции.

Достаточное условие экстремума

Итак, функция $y = f(x)$ может иметь экстремумы только в критических точках, где либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не определена, причем в двух последних случаях функция $y = f(x)$ в соответствующей точке непрерывна.

Однако функция может и не иметь экстремума в критической точке. Поэтому для окончательного решения вопроса о наличии экстремума нужны некоторые дополнительные сведения о свойствах исследуемой функции в критической точке или ее окрестности. Иначе говоря, функция имеет в критической точке экстремум, если в этой точке выполняется **достаточное условие экстремума**. Каждая из следующих трех теорем представляет собой такое достаточное условие. При исследовании функции на экстремум можно пользоваться любой из них.

Теорема. (Достаточное условие экстремума, использующее производную 1-го порядка).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0).

а) Если в некоторой окрестности X критической точки $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то $f(x_0) = \max f(x)$.

б) Если же $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $f(x_0) = \min f(x)$.

в) Если в некоторой окрестности критической точки $f'(x)$ сохраняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

Другими словами, **достаточное условие** наличия экстремума в критической точке x_0 функции $f(x)$ состоит в перемене знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x_0. Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (-), то в точке x_0 будет максимум, если с (-) на (+) -то минимум функции. Если при прохождении через критическую точку производная не меняет знак, то в критической точке экстремума нет, и эта точка принадлежит либо промежутку убывания функции, либо промежутку возрастания, в зависимости от знака $f'(x)$.

Если функция в критической точке удовлетворяет некоторым более жестким условиям, чем непрерывность, то для решения вопроса о наличии экстремума в данной точке можно пользоваться достаточным условием экстремума, вытекающим из следующей теоремы.

Теорема. (Достаточное условие экстремума, использующее производную 2-го порядка).

Если в некоторой окрестности критической точки x_0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема, причем производная второго порядка функции в этой окрестности непрерывна, то в случае $f''(x_0) < 0$ имеем $f(x_0) = \max f(x)$, а в случае $f''(x_0) > 0$ имеем $f(x_0) = \min f(x)$.

Таким образом, если в критической точке x_0 будет выполняться:

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума функции $f(x)$, если же $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

Большинство функций, с которыми приходится иметь дело на практике, удовлетворяют условиям последней теоремы, в силу чего этот достаточный признак экстремума часто применяется на практике.

Рассмотренная теорема представляет собой простейший частный случай более общего утверждения, использующего понятие производных высших порядков. Приведем это утверждение в форме следующей теоремы.

Теорема. (Достаточное условие экстремума, использующее производные высших порядков).

Пусть в некоторой окрестности критической точки x_0 функция $f(x)$ дифференцируема n раз, n-я производная функции непрерывна в этой окрестности и $f'(x_0)=f''(x_0)=...f^{(n-1)}(x_0)=0$, в то время как $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда:

1) если n - **нечетное**, то функция $f(x)$ **не имеет** экстремума в точке x_0,

2) если n - **четное**, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **максимум,** если $f^{(n)}(x_0)<0$, и **минимум**, если $f^{(n)}(x_0)>0$.

Отыскание наименьших и наибольших значений функции на промежутке

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X (конечном или бесконечном). Если $X=[a,b]$ - замкнутый интервал, то среди значений функции на этом интервале обязательно существует и наименьшее m, и наибольшее M значения. Очевидно, что если наибольшее значение M достигается во внутренней точке $[a,b]$, то оно будет одним из максимумов; но оно может достигаться и в граничных точках интервала.

Следовательно, для отыскания наибольшего значения функции $f(x)$ на замкнутом интервале $[a,b]$ надо сравнить все ее максимумы на (a,b) и значения $f(a)$ и $f(b)$ и из всех этих чисел выбрать наибольшее. Аналогично, наименьшим значением $f(x)$ на $[a,b]$ будет наименьшее из всех минимумов функции и чисел $f(a)$ и $f(b)$.

Если промежуток X не является замкнутым интервалом, то на этом промежутке функция может не достигать наибольшего и наименьшего значений. Если эти значения все же существуют, то их часто можно найти, руководствуясь следующей теоремой.

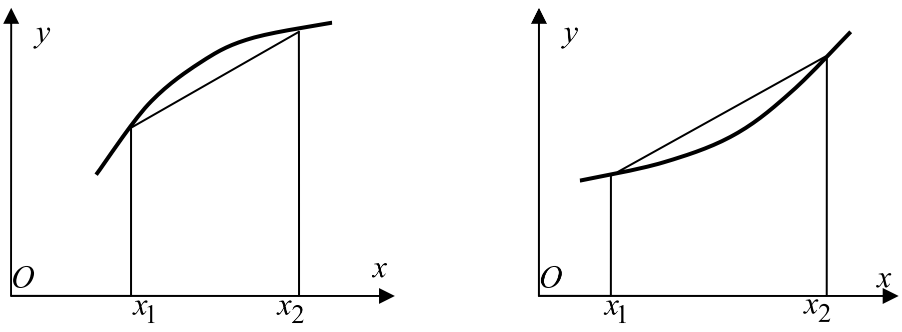
Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет на этом промежутке единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет наибольшим или наименьшим на X в зависимости от того, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

Выпуклость и точки перегиба

Важное понятие выпуклости кривой может быть введено несколькими способами. Легко показать, что приведенные ниже различные определения этого понятия эквивалентны друг другу, поэтому в каждом конкретном случае можно использовать наиболее удобное из них.

Определение. Кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$, называется **выпуклой вверх** на промежутке X, если любая дуга этой кривой с концами в точках, принадлежащих данному промежутку, расположена **не ниже** стягивающей ее **хорды** (рис. 1.9,а). Кривая **выпукла вниз** на промежутке X, если любая ее дуга с концами в точках, принадлежащих данному промежутку, расположена **не выше** стягивающей ее **хорды** (рис. 1.9,б).

Определение. Кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$,



а) выпуклость вверх Рис. 1.9. б) выпуклость вниз

называется **выпуклой вверх (выпуклой вниз)** на промежутке X,

если она целиком лежит **под касательной (над касательной),** проведенной к ней в любой точке этого промежутка (рис. 1.10)

Из рис. 1.10 видно, что если график функции $y = f(x)$ - выпуклый вверх на промежутке X, то $\Delta y < dy$ для всех x из промежутка X. Для кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$ и выпуклой вниз на промежутке X, можно записать: $\Delta y > dy$ для всех x из промежутка X, (в обоих этих случаях $\Delta x \neq 0$ настолько мало по модулю, что $x + \Delta x \in X$). Учитывая, что $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x)\Delta x$, предыдущее определение можно записать в несколько иной форме.

Определение. График функции $y = f(x)$ является кривой, **выпуклой вверх** на промежутке X, если в любой точке $x \in X$ выполняется условие:

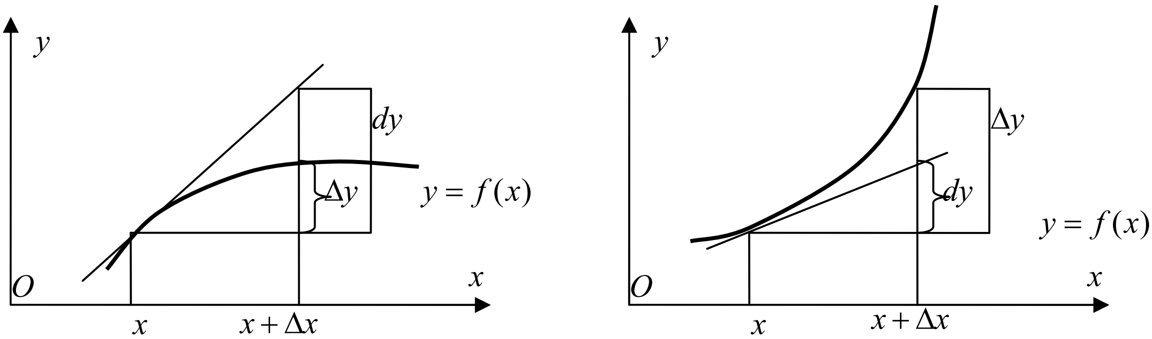
$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x < 0, \qquad (1.14)$$

и кривой, **выпуклой вниз** на промежутке X, если в любой точке $x \in X$ выполняется условие:

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x > 0, \qquad (1.15)$$

где $\Delta x \neq 0$ - произвольная достаточно малая по модулю величина.

Теорема. (**Достаточное условие выпуклости кривой вверх или вниз**). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X. Если $f''(x) < 0$ для всех x из промежутка X, то график функции на X - **выпуклый вверх**, если же $f''(x) > 0$ для всех x из промежутка X, то график - **выпуклый**



а) выпуклость вверх Рис. 1.10. б) выпуклость вниз

вниз.

График функции $y = f(x)$ может изменять характер на множестве определения данной функции. Общая граничная точка промежутков выпуклости вверх и выпуклости вниз графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этой функции (или графика функции).

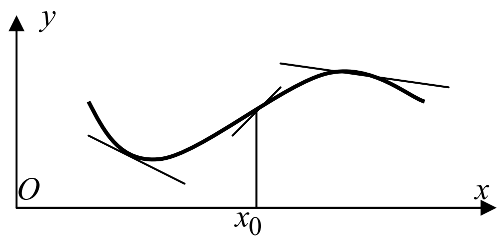


Рис. 1.11.

Геометрически это означает, что кривая лежит над касательной с одной стороны от точки перегиба и под касательной - с другой стороны (рис. 1.11).

В частности, на рис.1.11 левее точки перегиба x_0 $(x < x_0)$ кривая выпукла вниз (лежит выше касательной) правее точки перегиба $(x > x_0)$ кривая выпукла вверх (лежит ниже касательной).

Теперь можно сделать вывод, что если x_0 - точка перегиба функции $y = f(x)$, то выражение $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x,$ где $\Delta x = x - x_0$,
имеет противоположные знаки для любых двух точек x, достаточно близких к точке x_0, но лежащих по разные стороны от нее. Таким образом, можно дать и иное определение точки перегиба.

Определение. Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции $y = f(x)$, если для достаточно малых по модулю Δx выражение

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \qquad (1.16)$$

меняет свой знак одновременно с изменением знака Δx.

Теорема. Если производная $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то эта точка для функции $f(x)$ будет точкой перегиба.

Если $f'(x_0) = \max f'(x)$, то при переходе через x_0 производная функции $f'(x)$, то есть, $f''(x)$ изменяет знак с (+) на (-), в силу чего до точки x_0 кривая $y = f(x)$ выпукла вниз, а после этой точки - выпукла вверх. Если же $f'(x_0) = \min f'(x)$, то при переходе через x_0 производная $f''(x)$ изменяет знак с (-) на (+), в силу чего до точки x_0 кривая $y = f(x)$ выпукла вверх, а после этой точки - выпукла вниз.

Таким образом, для отыскания точек перегиба функции $f(x)$ нужно решить экстремальную задачу (задачу на отыскание экстремума) для функции $\varphi(x) = f'(x)$: если x_0 точка максимума производной $f'(x)$, то для функции $f(x)$ эта точка будет точкой перегиба, в которой выпуклость вниз переходит в выпуклость вверх, если же x_0 - точка минимума производной $f'(x)$, то для функции $f(x)$ это будет точка перегиба, в которой выпуклость вверх сменяется выпуклостью вниз.

Замечание. Только что сформулированная теорема дает достаточное, но не необходимое условие перегиба функции $f(x)$ в точке x_0. Это значит, что точка может быть точкой перегиба функции $f(x)$ и без того, чтобы быть экстремальной точкой для производной $f'(x)$, поэтому, отыскивая точки перегиба функции $f(x)$, нужно исследовать и те точки, в которых $f''(x)=\infty$ либо $f''(x)$ не существует.

Замечание. В некоторых учебниках принята несколько иная терминология. Так, иногда кривая, выпуклая вверх, называется просто выпуклой, а кривая, выпуклая вниз - вогнутой.

Асимптоты графика функции

В практических задачах часто представляет интерес исследование поведения функции и формы ее графика при неограниченном удалении его точек от начала координат. При этом неограниченно возрастают по абсолютной величине либо обе координаты точек графика, либо одна из них.

Может случиться, что когда точка $M(x, f(x))$ "стремится по графику в бесконечность", график функции $y=f\left(x\right)$ неограниченно приближается к некоторой прямой (рис. 1.12). В этом случае, расстояние от такой прямой, называемой **асимптотой**, до графика функции стремится к нулю.

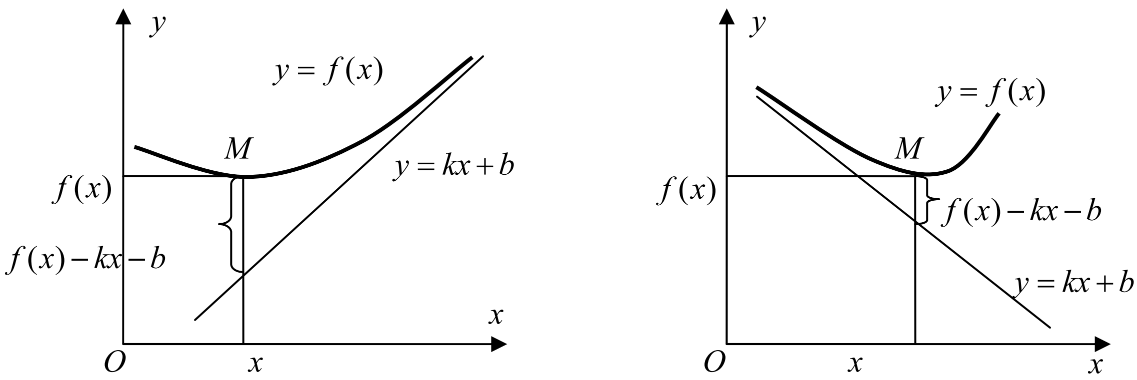
Можно выделить следующие типы асимптот.

а) Наклонные асимптоты.

Определение. Прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, называется **наклонной асимптотой** графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$), если

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0 \quad \left(\text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0\right). \tag{1.17}$$

На рис. 1.12 схематически изображены именно наклонные асимптоты. Если $k=0$, то уравнение $y=b$ задает **горизонтальную асимптоту**.



а) $x\to+\infty$ Рис. 1.12. б) $x\to-\infty$

Пусть график функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=kx+b$ при $x\to+\infty$. Тогда имеет место равенство (1.17), которое запишем в виде

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0,$$ откуда следует $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$ или

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0,$$ то

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{1.18}$$

Тогда из равенства (1.17) следует, что

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{1.19}$$

Итак, если график функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ имеет асимптоту $y=kx+b$, то справедливы соотношения (1.18) и (1.19). Обратно, если существуют конечные пределы (1.18) и (1.19), то из этих соотношений сразу получаем (1.17), то есть приходим к наличию наклонной асимптоты. Таким образом, чтобы выписать уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, сначала надо найти значение k по формуле (1.18), а затем вычислить b по формуле (1.19), в которую подставлено найденное значение k.

Если хотя бы один из пределов (1.18) или (1.19) бесконечен или не существует, то график функции $y=f(x)$ не имеет асимптоты. При $x\to-\infty$ нужно провести такие же действия, но пределы, аналогичные (1.18) и (1.19), вычисляются при $x\to-\infty$.

б) Вертикальные асимптоты. Пусть a - некоторое конечное число.

Определение. Прямая, заданная уравнением $x=a$, называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если выполняется какое-либо из трех условий:

$$1)\ \lim_{x\to a} f(x)=\infty,\quad 2)\ \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty,\quad 3)\ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\infty.$$

При этом во втором и третьем случаях поведение функции $y=f(x)$ соответственно при $x\geq a$ и $x\leq a$ может быть любым (функция может быть даже не определена на соответствующем промежутке).

Из последнего определения следует, что для отыскания вертикальных асимптот графика функции $y=f(x)$ нужно найти точки, вблизи которых данная функция неограниченно возрастает по модулю (в частности, точки бесконечного разрыва). Если a - такая точка, то уравнение $x=a$ задает вертикальную асимптоту графика функции $y=f(x)$.

Общий план исследования функций

Чтобы построить эскиз графика функции, нужно не только знать координаты некоторых точек, принадлежащих графику, но и представлять себе характер поведения данной функции на промежутках между известными точками. Результаты, изложенные выше, дают возможность определить наиболее характерные точки каждой кривой - экстремумы и точки перегиба. Кроме этого, на основе изучения первой и второй производных заданной функции можно получить информацию о промежутках монотонности и характере выпуклости графика функции.

Эскиз графика функции можно уточнить, найдя точки пересечения кривой с осями координат. Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox определяются из уравнения: $f(x) = 0$. Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Oy можно найти, положив $x = 0$, то есть, вычислив $f(0)$.

Некоторые характерные свойства графика можно установить без использования производных. В частности, таково свойство периодичности для тригонометрических функций. Кроме этого, если рассматриваемая функция $y = f(x)$ является четной $\left(f(-x) = f(x)\right)$, то ее график симметричен относительно оси Oy, а если нечетной $\left(f(-x) = -f(x)\right)$, то график симметричен относительно начала координат.

Чтобы достаточно подробно исследовать функцию и получить информацию, позволяющую построить математически грамотный эскиз ее графика, можно рекомендовать придерживаться следующего общего плана исследования.

1. Установить множество определения функции. При наличии точек разрыва найти в них односторонние пределы данной функции; определить, имеет ли график функции вертикальные асимптоты.
2. Найти наклонные асимптоты графика функции.
3. Отметить особенности графика функции, не связанные с производными, например симметрию, периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найдя первую производную функции, установить промежутки ее возрастания и убывания, определить экстремумы.
6. С помощью второй производной исследовать характер выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

Решение задач

Задача 1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции

$$y = f(x) = x - 2\text{arctg}x.$$

Решение. Производная данной функции

$$y' = f'(x) = (x - 2\text{arctg}x)' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

на всей числовой оси определена и конечна. Поэтому данная функция может иметь только такие критические точки, в которых $f'(x)=0$, то есть, точки $x_1=-1,\ x_2=1$. На промежутке возрастания функции: $f'(x)>0$, то есть $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}>0$. Это неравенство выполняется при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$. Соответственно, $f'(x)<0$ и функция $f(x)$ убывает при $x\in(-1,1)$.

При переходе через критическую точку $x_1=-1$ первая производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (-), значит, x_1 - точка максимума. Аналогично, точка $x_2=1$ - это точка минимума, потому что при переходе через нее первая производная $f'(x)$ меняет знак с (-) на (+).

Найдем экстремальные значения функции:

$$\max f(x)=f(-1)=-1-2\operatorname{arctg}(-1)=-1-2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1,$$

$$\min f(x)=f(1)=1-2\operatorname{arctg}1=1-2\cdot\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{2}.$$

Задача 2. Найти экстремумы функции, используя производную 2-го порядка

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2.$$

Решение. Первая производная данной функции $f'(x)=x^3-2x^2-3x$ на всей числовой оси определена и конечна. В этом случае критическими точками могут быть лишь те точки, в которых $f'(x)=0$. Определим эти точки из уравнения:

$$f'(x)=x^3-2x^2-3x=0.$$

Корни этого уравнения (в порядке возрастания): $x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=3.$ Находим вторую производную: $f''(x)=3x^2-4x-3$ и вычисляем ее значения в критических точках:

1) $f''(-1)=4>0,$ значит, $f(-1)=\min f(x)=\dfrac{17}{12};$

2) $f''(0)=-3<0,$ следовательно, $f(0)=\max f(x)=2;$

3) $f''(3)=12>0,$ откуда следует, $f(3)=\min f(x)=-\dfrac{37}{4}.$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x+3$ на замкнутом интервале $\left[-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

Решение. Первый этап - нахождение максимумов и минимумов данной функции на отрезке $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Производная функции $f'(x) = 3x^2 - 3$ существует и конечна на всей числовой оси. Поэтому критические точки определяются из уравнения $f'(x) = 0$, или $3(x^2 - 1) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Убедимся в наличии экстремумов в этих точках. Найдем вторую производную: $f''(x) = 6x$. Тогда $f''(x_1) = f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, значит, в точке $x_1 = -1$ заданная функция имеет максимум и

$$\max f(x) = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 3 = 5.$$

Аналогично, $f''(x_2) = f''(1) = 6 > 0$, следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция достигает минимума и $\min f(x) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$.

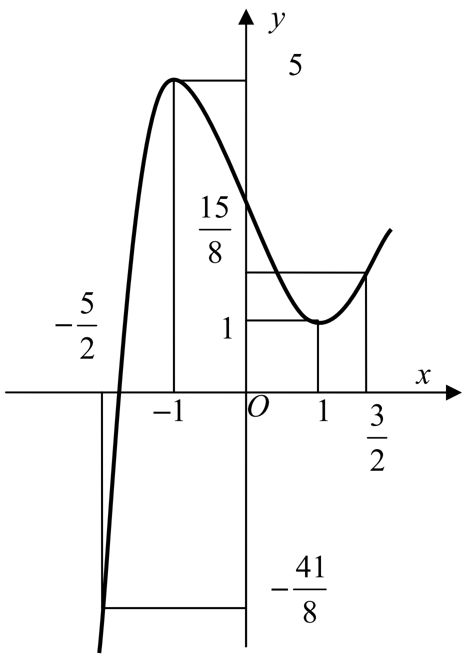


Рис. 1.13.

Второй этап - вычисление значений функций на концах замкнутого интервала:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 3 = -\frac{41}{8}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{8}.$$

В заключение сравним найденные значения функции:

$$\max f(x) = f(-1) = 5, \;\; \min f(x) = f(1) = 1, \;\; f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{41}{8}, \;\; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}.$$

Таким образом, наибольшего значения данная функция достигает в точке $x = -1$, при этом $f(-1) = 5$. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = -\frac{5}{2}$, и $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{41}{8}$. Примерный график рассматриваемой функции приведен на рис. 1.13.

Задача 4. Исследовать характер выпуклости и найти точки перегиба графика функции $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Найдем ее первую и вторую производные:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1 + x^2}, \quad f''(x) = \frac{4x}{(1 + x^2)^2}.$$

Вторая производная определена на всей числовой оси и нигде не обращается в бесконечность. Уравнение $f''(x) = 0$, или $\frac{4x}{(1 + x^2)^2} = 0$ имеет единственное решение: $x = 0$. При этом левее точки $x = 0$ (при $x < 0$) имеем: $f''(x) < 0$, то есть график функции обращен выпуклостью вверх. Правее точки

$x=0$ (при $x>0$) график функции обращен выпуклостью вниз, так как $f''(x)>0$. Следовательно, точка $x=0$ является точкой перегиба.

Задача 5. Найти асимптоты графика функции

$$y = x - 2\operatorname{arctg} x.$$

Решение. Функция $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ определена и непрерывна при всех x, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет.

Ищем уравнения невертикальных (наклонных) асимптот графика функции $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ в виде $y = kx + b$, где k и b находим по формулам (1.18) и (1.19)

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x - 2\operatorname{arctg} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{1+x^2}}{1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-2\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \begin{cases} -2\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } x\to+\infty \\ -2\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{при } x\to-\infty \end{cases} = \begin{cases} -\pi, & \text{при } x\to+\infty, \\ \pi, & \text{при } x\to-\infty. \end{cases}$$

Итак, функция $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ имеет две наклонные асимптоты: $y = x - \pi$ при $x\to+\infty$ и $y = x + \pi$ при $x\to-\infty$.

Задача 6. Исследовать функцию $y = e^{-x^2}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение.

1. Эта функция определена, непрерывна и положительна на всей числовой оси $X = (-\infty; +\infty)$, вертикальных асимптот не имеет.

2. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$, то очевидно, что $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = 0$, т.е. прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

3. Функция является четной, так как $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$; ее график симметричен относительно оси ординат.

4. С осью Oy график пересекается в точке (0; 1); с осью Ox график не пересекается, так как $e^{-x^2} \neq 0$ при всех x.

5. Найдем критические точки функции и исследуем их характер с помощью первой производной:

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}.$$

Производная обращается в ноль только в точке $x=0$; при $x>0$ $f'(x)<0$, т.е. при $x\in(0,+\infty)$ данная функция убывает; при $x\in(-\infty,0)$ данная функция возрастает, поскольку $f'(x)>0$ при $x<0$. Таким образом, в точке $x=0$ исследуемая функция имеет максимум: $\max f(x)=f(0)=1$.

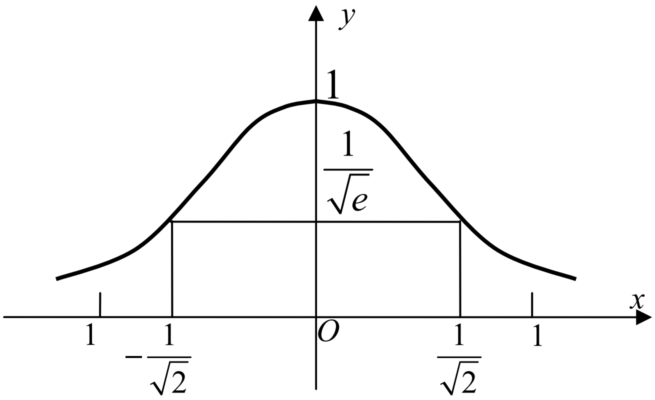


Рис. 1.14.

6. Найдем вторую производную:

$$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Вторая производная $f''(x)$ равна нулю при $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и при $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$. В промежутках $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ имеем $f''(x)>0$, значит график функции обращен выпуклостью вниз. В промежутке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ будем иметь $f''(x)<0$, и график функции обращен выпуклостью вверх. Точки $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба графика данной функции, причем $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. График функции схематически изображен на рис. 1.14. Это так называемая кривая Гаусса*

Вопросы для самопроверки по теме 1.2

1. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ была постоянной на некотором промежутке?
2. Каково достаточное условие возрастания (убывания) функции?
3. Что называется точкой экстремума функции?
4. Какое значение аргумента функции называется критической точкой?
5. Каково необходимое условие экстремума функции?
6. Каково достаточное условие экстремума: а) использующее производную 1-го порядка; б) использующее производную 2-го порядка?
7. Какая кривая называется выпуклой вверх (вниз)?

---

* Карл Гаусс(1777-1855)-немецкий математик.

8. Каким будет график функции $y = f(x)$ (выпуклым вверх или вниз) в зависимости от знака второй производной $f''(x)$?

9. Какие бывают типы асимптот графика функции?

10. По каким формулам находятся коэффициенты k и b в уравнении наклонной асимптоты $y = kx + b$?

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Данный раздел включает две темы:

2.1. Основные сведения о комплексных числах.

2.2. Основные сведения о рациональных функциях.

По каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие его примеры. В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров.

2.1. Основные сведения о комплексных числах

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Множество комплексных чисел.**
- **Арифметические действия с комплексными числами.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №3.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 1, с. 18-23 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Множество комплексных чисел

Все рассматриваемые до сих пор задачи решались на множестве вещественных чисел. Однако для решения многих задач требуется расширить множество вещественных чисел. Расширением множества вещественных чисел является **множество комплексных чисел**. Перейдем к его построению.

Рассмотрим множество всевозможных **упорядочных пар вещественных чисел** ($a; b$), где a – **первое** число, b – **второе** число. Две пары ($a; b$) и ($c; d$) - считаются **равными** тогда и только тогда, когда

$$a = c \text{ и } b = d. \qquad (2.1)$$

Введем для пар две операции: сложение и умножение.

Суммой двух пар ($a; b$) и ($c; d$) называется пара, у которой первое число равно $a + c$, а второе $b + d$, т.е.

$$(a;b)+(c;d)=(a+c;\ \ b+d). \tag{2.2}$$

Произведением двух пар (*a; b*) и (*c; d*) называется пара, у которой первое число равно *ac - bd,* а второе *ad + bc,* т.е.

$$(a;b)\cdot(c;d)=(ac-bd;\ \ ad+bc).. \tag{2.3}$$

Множество всевозможных пар вещественных чисел, для которых равенство определяется формулами (2.1), а операции сложения и умножения определяются по формулам (2.2) и (2.3), называется **множеством комплексных чисел**, а каждая пара этого множества **комплексным числом.**

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что операция сложения комплексных чисел обладает свойствами коммутативности (переместительности) и ассоциативности (сочетательности), т.е. если u,v,w - произвольные комплексные числа, то

$$u+v=v+u,$$

$$u+\left(v+w\right)=\left(u+v\right)+w.$$

При этом операция умножения комплексных чисел обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (распределительности), т.е.

$$u\cdot v+v\cdot u,$$

$$u\cdot\left(v\cdot w\right)=\left(u\cdot v\right)\cdot w,$$

$$\left(u+v\right)\cdot w=u\cdot w+v\cdot w.$$

Если на плоскости введена прямоугольная декартова система координат Oxy, то всякое комплексное число $\left(a;b\right)$ можно изобразить точкой на плоскости, положив $x=a, y=b$. Плоскость, изображающая множество комплексных чисел, называется **комплексной плоскостью**. Ясно, что при этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости. Так как всякое комплексное число вида $\left(a;0\right)$ изображается точкой оси Ox, то можно множество комплексных чисел вида $\left(a;0\right)$ отождествить с множеством вещественных чисел и, следовательно, рассматривать множество комплексных чисел как **расширение** множества вещественных чисел. Например, комплексные числа $\left(0;0\right)$ и $\left(2;0\right)$ - являются обычными вещественными числами 0 и 2, и вообще

$$\left(a;0\right)\equiv a\,. \tag{2.4}$$

Обозначим комплексное число (0; 1) буквой *i* и вычислим произведение комплексных чисел (*b*; 0) и (0; 1) согласно формуле (2.3)

$$b\cdot i=\left(b;0\right)\cdot\left(0;1\right)=\left(b\cdot 0-0\cdot 1;b\cdot 1+0\cdot 0\right)=\left(0;b\right). \tag{2.5}$$

В согласии с формулой (2.2) всякое комплексное число (*a;b*) можно представить в виде

$$(a;b)=(a;0)+(0;b). \tag{2.6}$$

Используя формулы (2.4) и (2.5), сможем записать равенство (2.6) в виде

$$(a;b)=a+bi.$$

Выражение $a+bi$ называется **алгебраической формой комплексного числа** $(a;b)$. Комплексное число i называется **мнимой единицей***,* число a - **вещественной частью комплексного числа,** а число b – **мнимой частью** этого числа. При этом используются обозначения $a = \mathrm{Re}(a+bi)$*,* $b = \mathrm{Im}(a+bi)$. Числа вида bi часто называются **чисто мнимыми числами.**

Вычислим, например, величины i^2, i^3, i^4.

$$i^2=i\cdot i=(0;1)\cdot(0;1)=(0\cdot 0-1\cdot 1;0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1;0)=-1,$$

$$i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i,$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1.$$

Заметим, что, используя равенство $i^2=-1$, часто чисто условно пишут, что $i=\sqrt{-1}$ и определяют комплексные числа как выражения вида

$$a+bi.$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел в алгебраической форме можно выполнять по обычным правилам алгебры многочленов, если учесть, что

$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1$ и, вообще, $i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,$ $i^{4n}=1$, где n - любое натуральное число.

Комплексное число $a-bi$ называется **сопряженным комплексному числу** $z=a+bi$ и обозначается символом $\overline{z}$. Очевидно, что

$$z+\overline{z}=2a,\quad z\cdot\overline{z}=a^2+b^2.$$

Арифметические действия с комплексными числами

Для комплексных чисел вводятся операции **вычитания и деления**, которые определяются как действия, обратные сложению и умножению.

Разностью u - v **комплексных чисел** $u = a+bi$ и $v = c+di$ называется такое комплексное число $z = x + iy$, которое в сумме с числом v дает число u, т.е.

$$z+v=u.$$

Отсюда для определения чисел x и y имеем

$$x=a-c,$$

$$y=b-d.$$

Частным $\dfrac{u}{v}$ **комплексных чисел** $u = a+bi$ и $v = c+di$ (при $v \neq 0$) называется такое комплексное число $z = x + yi$, которое при умножении на число v дает число u, т.е.

$$z \cdot v = u. \qquad (2.7)$$

Для определения числа z сначала обе части равенства (2.7) умножим на $\overline{v} = c - di$, а затем разделим на вещественное число $c^2 + d^2$. Будем последовательно иметь

$$z\left(c^2 + d^2\right) = ac + bd + i\left(bc - ad\right),$$

$$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i .$$

Введем на комплексной плоскости (рис.2.1) полярную систему координат $Or\varphi$, где r - расстояние произвольной точки от начала O, а φ - угол между радиус-вектором выбранной точки и положительным направлением оси Ox. Используя формулы связи между полярными и прямоугольными декартовыми координатами точки, сможем для любого комплексного числа $z = a + bi$ написать

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \qquad (2.8)$$

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (2.9)$$

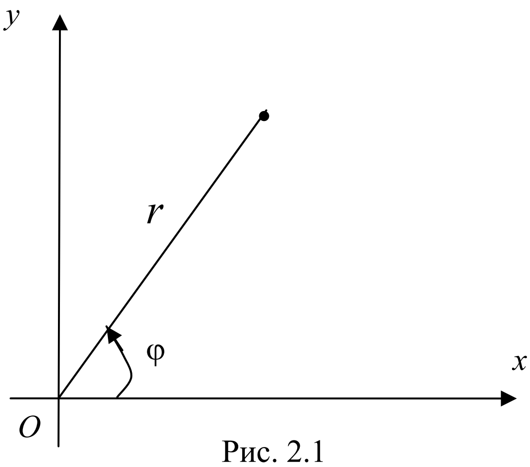


Рис. 2.1

Представление комплексного числа z в виде (2.9) называется **тригонометрической формой комплексного числа** z. Неотрицательное число r называют **модулем комплексного** числа z, а угол φ - **аргументом** этого числа. При этом используются обозначения

$$r = |z|, \quad \varphi = \mathrm{Arg} z.$$

Заметим, что каждое комплексное число имеет бесконечное множество значений аргумента, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π (число $z = 0$ имеет модуль, равный нулю, а аргумент для него не определяется). Среди всех значений аргумента выделяют так называемое **главное значение**, которое обозначают символом $\arg z$ и которое заключено в промежутке $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$.

Зная модуль и аргумент φ комплексного числа, можно по формулам (2.8) найти ее вещественную a и мнимую b части. Наоборот, зная вещественную и мнимую части комплексного числа, можно найти модуль этого числа по формуле

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

которая получена после возведения в квадрат каждой из частей равенств (2.8), сложения и извлечения квадратного корня. Аргумент φ при этом определяется с помощью формул

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

которые получаются из формул (2.8).

Покажем теперь, что тригонометрической формой комплексных чисел довольно удобно пользоваться при:

- умножении комплексных чисел,
- делении комплексных чисел,
- возведении комплексного числа в целую положительную степень,
- извлечении корня из комплексного числа.

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Перемножая их, получим

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \tag{2.10}$$

Таким образом, **модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент этого произведения равен сумме аргументов сомножителей**.

Используя определение частного двух комплексных чисел, нетрудно показать справедливость равенства

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right],$$

которое означает, **что модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя**.

Используя формулу (2.10), легко показать справедливость формулы для возведения комплексного числа в целую положительную степень n

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{2.11}$$

которая носит название **формулы Муавра.***

Комплексное число $w = R(\cos\Psi + i\sin\Psi)$ называют **корнем степени n из комплексного числа** $z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, если $w^n = z$; при этом пишут $w = \sqrt[n]{z}$.

Используя формулу Муавра и учитывая, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π, сможем написать

$$R^n = r, \ n\Psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

откуда следует

---

* Муавр Абрахам (1667-1754) – английский математик.

$$R=\sqrt[n]{r},\ \ \Psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Придавая k значения $0,1,2,\ldots,n-1$, получим n **различных главных значений аргумента** для $\sqrt[n]{z}$

$$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi+2\pi}{n},\ldots,\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}.$$

Остальным значениям k соответствуют значения Ψ, отличающиеся от одного из указанных значений на величину, кратную 2π.

Итак, $\sqrt[n]{z}$ имеет n **различных** значений, определяемых **формулой**

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1), \tag{2.12}$$

причем $\sqrt[n]{r}$ означает положительное значение корня степени n из положительного вещественного числа r.

Решение задач

Задача 1. Записать комплексное число $z=\dfrac{4-3i}{4+3i}$ в алгебраической форме.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, т.е. на число $4-3i$. Будем иметь

$$\frac{4-3i}{4+3i}=\frac{(4-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{16-24i-9}{16+9}=\frac{7-24i}{25}=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i.$$

Задача 2. Записать комплексное число $z=-2+2i$ в тригонометрической форме.

Решение. В соответствии с изложенным можем написать

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2},\quad \cos\varphi=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из двух последних формул следует, что $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, а тогда данное комплексное число в тригонометрической форме имеет вид

$$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Задача 3. Найти произведение чисел $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4}+i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)$ и $z_2=\sqrt{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, а $|z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$. Учитывая, что аргумент φ произведения $z_1 \cdot z_2$ равен сумме аргументов сомножителей, сможем написать $\varphi = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25}{8}\pi$, а тогда

$$z_1 \cdot z_2 = 4\left(\cos\frac{25}{8}\pi + i\sin\frac{25}{8}\pi\right) = 4\left[\cos\left(2\pi + \frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{9\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= 4\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

Задача 4. Вычислить по формуле Муавра $\left(\sqrt{3} + i\right)^3$.

Решение. Запишем сначала комплексное число $\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Тогда $\left(\sqrt{3} + i\right)^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 8(0 + i) = 8i$.

Задача 5. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$ из множества комплексных чисел.

Решение. Рассматривая число 1 как комплексное число $1 + 0i$, легко заметить, что его модуль равен 1, а главное значение аргумента равно 0. По формуле (2.12) имеем

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0,1,2)$$

или такие три значения

$$\cos 0 + i\sin 0,$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Упрощая последние выражения, получим окончательно

$$1, \qquad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 6. Решить уравнение $z^2 + 3z + 3 = 0$.

Решение. Используя формулу для решения квадратных уравнений, можем написать

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

Учитывая, что $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$, будем иметь $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Вопросы для самопроверки по теме 2.1

1. Что называется множеством комплексных чисел?
2. Что называется алгебраической формой комплексного числа z?
3. Что называется вещественной частью комплексного числа z?
4. Что называется мнимой частью комплексного числа z?
5. Какое комплексное число называется сопряженным комплексному числу $z = a + bi$?
6. Как определяется разность и частное двух комплексных чисел?
7. Что называется тригонометрической формой комплексного числа z?
8. Что называется модулем комплексного числа z?
9. Что называется главным значением аргумента комплексного числа z?
10. Чему равен модуль произведения двух комплексных чисел?
11. Чему равен аргумент произведения двух комплексных чисел?
12. Какой формулой надо воспользоваться чтобы возвести комплексное число в целую положительную степень n?
13. Сколько значений имеет корень степени n из комплексного числа z?
14. Напишите формулу Муавра.

2.2 Основные сведения о рациональных функциях

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Общие сведения о рациональных функциях.**
- **Простейшие дроби.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 1, с. 24-28 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Общие сведения о рациональных функциях

К **алгебраическим действиям** относятся: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с рациональным показателем.

Явными алгебраическими функциями называются функции, значения которых получаются в результате **конечного** числа алгебраических действий над аргументом и различными постоянными. Существует три типа таких функций:

1). **целая рациональная функция** (алгебраический многочлен или полином), т.е. функция вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ - любые вещественные числа (коэффициенты многочлена);

2). **дробная рациональная функция** – частное от деления двух целых рациональных функций;

3). **иррациональная функция** – так называется явная алгебраическая функция, для получения значений которой нужно проделать над аргументом и действие извлечения корня. Например, $y = \sqrt{2x} + 3$, $y = x^2 + 2\sqrt[3]{x}$.

Всякая дробная рациональная функция всегда может быть приведена к виду

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \tag{2.13}$$

где

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m,$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Рациональная функция (дробь) (2.13) называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. если $m < n$. Если $m \geq n$, то дробь называется **неправильной**.

Приведем без доказательств несколько свойств рациональных функций.

Теорема (Безу)*. При делении многочлена $P_n(x)$ $(n > 0)$ на разность x - c, где c - произвольное число, получается остаток, равный значению многочлена при $x = c$, т.е. при любом c многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + P_n(c),$$

где $P_{n-1}(x)$ - некоторый многочлен степени n - 1 (частное от деления $P_n(x)$ на разность x - c).

Следствие. Если c - корень многочлена $P_n(x)$, т.е. $P_n(c) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на разность $x - c$

$$P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x).$$

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n >$ 0 имеет, по крайней мере, один корень - вещественный или комплексный.

Следствие. Всякий многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

где $c_1, c_2, \cdots c_n$ - корни многочлена $P_n(x)$.

Может случиться, что среди чисел $c_1, c_2, \cdots c_n$ есть равные. Обозначим через $c_1, c_2, \cdots c_m$ **различные** корни многочлена $P_n(x)$, а через $k_1, k_2, \cdots k_m$ - кратность

---

* Безу Этьен (1730-1783) – французский математик

соответствующего корня. Тогда разложение многочлена $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0\left(x - c_1\right)^{k_1}(x - c_2)^{k_2}\cdots(x - c_m)^{k_m}. \qquad (2.14)$$

Ясно, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Если кратность некоторого корня равна единице, то соответствующий корень многочлена называется **простым**. Если кратность некоторого корня равна *k,* то считают, что многочлен $P_n(x)$ имеет *k* одинаковых корней. Имея это ввиду, можно утверждать, что многочлен степени *n* имеет ровно *n* корней (вещественных или комплексных).

Теорема. Если многочлен $P_n(x)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$ кратности *k,* то сопряженное число $a - ib$ есть корень той же кратности.

Пусть $a + ib$ и $a - ib$ - пара сопряженных комплексных корней многочлена $P_n(x)$. Вычислим произведение разностей $x - (a + ib)$ и $x - (a - ib)$:

$$\left[x - \left(a + ib\right)\right]\left[x - \left(a - ib\right)\right] = \left[\left(x - a\right) - ib\right]\left[\left(x - a\right) + ib\right] =$$

$$= \left(x - a\right)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Отсюда следует, что в разложении (2.14) всякое произведение двух линейных множителей, соответствующих паре сопряженных комплексных корней, можно записать в виде квадратного трехчлена вида $x^2 + px + q$ с вещественными коэффициентами, если положить $p = -2a, \quad q = a^2 + b^2.$ Это обстоятельство позволяет сделать важный для дальнейшего вывод.

Всякий многочлен степени *n* с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде произведения вещественных линейных и квадратичных (неразложимых на линейные вещественные множители) множителей:

$$P_n(x) = a_0\left(x - c_1\right)^{k_1}\cdots(x - c_r)^{k_r}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2 + p_sx + q_s\right)^{l_s},$$

(2.15)

где множители $\left(x - c_1\right)^{k_1}, \left(x - c_2\right)^{k_2}, \left(x - c_3\right)^{k_3}, \cdots, \left(x - c_r\right)^{k_r}$ соответствуют вещественным корням $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_r$ многочлена $P_n(x)$ кратности $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_r$, а множители $\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{l_1}, \left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{l_2}$, $\cdots, \left(x^2 + p_sx + q_s\right)^{l_s}$ - *s* парам комплексных сопряженных корней кратности соответственно $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_s$. Ясно, что имеет место равенство

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \cdots + 2l_s = n.$$

Представление многочлена $P_n(x)$ в виде (2.15) называется разложением **многочлена на простейшие множители.**

Простейшие дроби

Определение. Простейшими дробями соответственно **первого** и **второго типа** называются рациональные дроби

$$\frac{A}{(x-c)^k}, \quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^l},$$

где k и l - любые натуральные числа, а A, M, N, c, p, q- любые вещественные числа при условии, что $p^2 - 4q < 0$, т.е. квадратичный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней.

Теорема. Всякая **правильная** рациональная дробь с вещественными коэффициентами может быть представлена в виде суммы простейших дробей, так что каждому множителю вида $(x-c)^k$ в разложении знаменателя отвечает сумма k простейших дробей первого типа

$$\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-c)^k},$$

а каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^l$ - сумма из l простейших дробей второго типа

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l},$$

причем такое разложение единственно.

Основным методом разложения правильной рациональной дроби на простейшие является **метод неопределенных коэффициентов**. Он состоит в том, что по виду разложения знаменателя дроби на линейные и квадратичные множители, выписывают разложение данной дроби в виде суммы простейших дробей с буквенными неизвестными коэффициентами в числителях этих дробей. Затем полученное равенство освобождают от знаменателей умножением на знаменатель данной дроби, получая тождественное равенство двух многочленов: числителя данной дроби и многочлена с коэффициентами, содержащими неизвестные коэффициенты разложения. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получают систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов.

Пример. Разложить дробь

$$\frac{4x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

на простейшие.

Решение. Вначале выписываем разложение с неопределенными коэффициентами

$$\frac{4x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим тождество

$$4x^3+x^2+3=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2. \qquad (2.16)$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$x^3: A+C=4,$$

$$x^2: B-A-2C+D=1,$$

$$x^1: A+C-2D=0,$$

$$x^0: B-A+D=3.$$

Решив эту систему, найдем

$$A=3,\ \ B=4,\ \ C=1,\ \ D=2.$$

Таким образом, сможем написать искомое разложение

$$\frac{4x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{x+2}{x^2+1}.$$

Кроме метода неопределенных коэффициентов можно применять так называемый **метод частных значений**, который использует то обстоятельство, что равенство многочленов, получающихся после освобождения от знаменателей в разложении дроби на простейшие с буквенными коэффициентами, представляет собою тождество и, следовательно, удовлетворяется при любом значении x. Поэтому, давая x специальным образом подобранные значения (вещественные или комплексные), можно получать линейные уравнения для определения искомых коэффициентов.

Так, если в предыдущем примере, в равенстве (2.16) положить $x=1$, то сразу находим

$$2B=8,$$

откуда следует

$$B=4.$$

Полагая $x=i$, при котором обращаются в нуль первое и второе слагаемые в правой части (4), получаем

$$2-4i=\left(Ci+D\right)\left(i-1\right)^2=\left(Ci+D\right)\left(-2i\right)=2C-2Di.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, будем иметь

$$2C=2,\ \ -2Di=-4i,\ \text{т.е.}\ \ C=1,\ \ D=2\ .$$

Для определения коэффициента A положим $x=0$, тогда получим

$$3=-A+B+D.$$

Так как $B=4$, а $D=2$, то $A=3.$

Получили те же самые значения искомых коэффициентов. Вообще, при разложении правильной дроби на простейшие следует иметь в виду, что такое разложение единственно и поэтому совершенно безразлично, каким путем оно достигается. Комбинируя в случае надобности различные приемы определения коэффициентов разложения, можно значительно упростить вычисления.

В заключение заметим, что всякую **неправильную дробь** путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Решение задач

Задача 1. Разложить рациональную дробь

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}$$

на простейшие.

Решение. Данная дробь правильная и для представления ее в виде суммы простейших дробей вначале представим знаменатель в виде $x(x-2)(x+2)$, а затем выписываем разложение с неопределенными коэффициентами

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим тождество

$$9x^2-2x-8=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2) \qquad (2.17)$$

или в таком виде

$$9x^2-2x-8=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$x^2:\ \ A+B+C=9,$$

$$x^1:\ \ 2B-2C=-2,$$

$$x^0:\ \ -4A=-8.$$

Из последнего уравнения следует, что $A=2$, и тогда первые два уравнения принимают вид $B+C=7$, $B-C=-1$, отсюда следует, что $B=3$, а $C=4$.

Таким образом, сможем написать искомое разложение

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}.$$

Применим теперь для решения этого примера **метод частных значений**.

Так, если в рассмотренном примере, в равенстве (6.17) положить $x=2$, то сразу находим

$$8B=24,$$

откуда следует

$$B=3.$$

Полагая последовательно $x=0$ и $x=-2$, получаем соответственно $-8=-4A,\ 32=8C$, откуда следует $A=2,\ C=4$.

Получили те же самые значения искомых коэффициентов.

Задача 2. Представить дробную рациональную функцию

$$R(x)=\frac{2x^5-7x^4+10x^3-6x^2+4x+3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

в виде суммы многочлена и простейших дробей.

Решение. Данная рациональная дробь **неправильная**, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. Поэтому сначала представим $R(x)$ в виде суммы многочлена и правильной дроби, для чего найдем **частное** и **остаток** от деления многочлена

$$2x^5-7x^4+10x^3-6x^2+4x+3$$

на многочлен

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

Выполняя это деление, будем иметь

$$\begin{array}{r|l}
2x^5-7x^4+10x^3-6x^2+4x+3 & x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^5-4x^4+4x^3\quad -4x^2+2x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^4+6x^3\quad -2x^2+2x+3 & \\
-\ \underline{-3x^4+6x^3\quad -6x^2+6x-3} & \\
4x^2-4x+6 &
\end{array}$$

Следовательно, можем написать

$$R(x)=2x-3+\frac{4x^2-4x+6}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}. \tag{2.18}$$

Для того чтобы представить **правильную** рациональную дробь, стоящую в правой части равенства (2.18), в виде суммы простейших дробей, следует найти все корни знаменателя.

Нетрудно заметить, что $x_1=1$ является корнем знаменателя, тогда разделив знаменатель

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1$$

на $x-1$, получим

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3+2x^2-2x+1 & x-1 \\
\underline{-\,x^4-x^3} & x^3-x^2+x-1 \\
\quad -x^3+2x^2 & \\
\quad \underline{-\,-x^3+x^2} & \\
\qquad x^2-2x & \\
\qquad \underline{-\,x^2-x} & \\
\qquad\quad -x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-\,-x+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отсюда следует, что имеет место равенство

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)(x^3-x^2+x-1) \qquad (2.19)$$

Легко заметить, что для второго множителя в правой части (2.19) справедливо равенство

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)\,. \qquad (2.20)$$

Из изложенного следует, что правильную рациональную дробь, стоящую в правой части равенства (2.18) сможем записать в виде

$$\frac{4x^2-4x+6}{(x-1)^2(x^2+1)}. \qquad (2.21)$$

Для представления этой дроби в виде суммы простейших дробей воспользуемся **методом неопределенных коэффициентов**, для чего по виду знаменателя выпишем для нее разложение в виде суммы соответствующих простейших дробей с неизвестными буквенными коэффициентами в числителях этих дробей. Будем иметь

$$\frac{4x^2-4x+6}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведя к общему знаменателю в правой части равенства, сможем написать тождество

$$4x^2-4x+6=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2. \qquad (2.22)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$x^3: A+C=0,$$

$$x^2: B-A-2C+D=4,$$

$$x^1: A+C-2D=-4,$$

$$x^0: B-A+D=6.$$

Решив эту систему, найдем

$$A=-1,\ \ B=3,\ \ C=1,\ \ D=2.$$

Таким образом, сможем написать искомое разложение

$$R(x)=2x-3+\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x+2}{x^2+1}.$$

Если для представления дроби в виде суммы простейших дробей воспользоваться **методом частных значений**, то, положив $x=1$ в равенстве (2.22), сразу находим $2B=6,$ т.е. $B=3$.

Полагая $x=i$, заметим, что первое и второе слагаемые обращаются в нуль и тогда получаем

$$2-4i=(Ci+D)(-2i)=2C-2Di.$$

Приравняв вещественные и мнимые части, будем иметь $2C=2,-2D=-4,$ т.е. $C=1,$ а $D=2$. Для определения коэффициента A, положив $x=0$ в тождестве (2.22), получим

$$6=-A+B+D.$$

Так как $B=3$, а $D=2$, то $A=-1$, т.е. получили те же самые значения искомых коэффициентов.

Вообще, при разложении правильной дроби на простейшие, следует иметь в виду, что такое разложение единственно и поэтому совершенно безразлично, каким путем оно достигается. Комбинируя в случае надобности различные приемы определения коэффициентов разложения, можно значительно упростить вычисления.

Вопросы для самопроверки по теме 2.2

1. Какие действия называются алгебраическими?
2. Какие функции называются явными алгебраическими?
3. Какая функция называется целой алгебраической функцией?
4. Какая функция называется дробной рациональной функцией?
5. Какая дробная рациональная функция называется правильной?
6. Какая дробная рациональная функция называется неправильной?
7. Сформулируйте теорему Безу.
8. Сформулируйте основную теорему алгебры.
9. Какой корень многочлена называется простым?
10. Является ли число $a-bi$ простым корнем многочлена $P_n(x)$, если известно, что число $a+bi$ является простым корнем многочлена $P_n(x)$?
11. Сформулируйте определение простейших дробей первого и второго типа.
12. Сформулируйте теорему о представлении правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами в виде суммы простейших дробей первого и второго типа.

13. Что нужно делать, чтобы разложить правильную рациональную дробь на простейшие с помощью метода неопределенных коэффициентов?

14. Что нужно делать, чтобы разложить правильную рациональную дробь на простейшие с помощью метода частных значений?

15. Можно ли при определении коэффициентов разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби комбинировать метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений?

16. Что нужно делать, чтобы представить неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби?

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Данный раздел включает в себя пять тем:

3.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод непосредственного интегрирования.

3.2. Методы вычисления неопределенных интегралов.

3.3. Интегрирование рациональных, иррациональных и

тригонометрических функций.

3.4. Определенный интеграл, его свойства и приложения.

3.5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций.

В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров. После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить три задачи из контрольной работы № 3 и две задачи из контрольной работы № 4 в соответствии со своим вариантом.

3.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод непосредственного интегрирования.

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Первообразная и неопределенный интеграл.**
- **Свойства неопределенного интеграла.**
- **Таблица основных интегралов и метод непосредственного интегрирования.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №4.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 1, с. 4-9 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Первообразная и неопределенный интеграл

В разделе “Дифференциальное исчисление функций одной переменной” было введено понятие производной функции и были получены правила ее нахождения. Теперь мы переходим к решению обратной задачи, а именно: известна функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой $F'(x)$ совпадает с $f(x)$. С точки зрения механики это означает, что по известной скорости $v(t)$ движения материальной точки по прямой требуется найти закон ее движения $S(t)$, учитывая, что $S'(t) = v(t)$.

Исходным понятием в интегральном исчислении является понятие первообразной.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка функция $f(x)$ является производной для функции $F(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси.

Задача о нахождении первообразной для данной функции имеет не единственное решение. Так, например, для функции $\cos x$ первообразными будут функции $\sin x,\ \sin x + 5,\ \sin x - \sqrt{3}$, и вообще любая функция вида $\sin x + C$, где C - произвольное число. Структура множества всех первообразных для данной функции $f(x)$ определяется следующей теоремой.

Теорема. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то любая первообразная для $f(x)$ на этом промежутке может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C - некоторая постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Здесь функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, произведение $f(x)dx$ - **подынтегральным выражением**, а переменная x - **переменной интегрирования**. Итак, если функция $F(x)$ - одна из первообразных для $f(x)$, то по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (3.1)$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла (3.1) называют **интегрированием функции** $f(x)$ (взятием интеграла).

Пример. Пусть $f(x) = \cos x$, тогда легко видеть, что

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Приведем без доказательства следующую **теорему существования неопределенного интеграла**.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, то на этом промежутке она интегрируема, т.е. имеет первообразную и, следовательно, неопределенный интеграл.

В частности, из этой теоремы следует, что всякая элементарная функция в своей области определения имеет неопределенный интеграл.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (3.2)$$

Справедливость этого свойства следует непосредственно из определения неопределенного интеграла, если под словами “производная неопределенного интеграла” понимать производную от любой первообразной для функции $f(x)$.

Свойство 2. Постоянный множитель k подынтегральной функции можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Убедимся, что равны производные обеих частей равенства (3.3). В согласии со свойством 1 сможем написать

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x). \qquad (3.4)$$

Если продифференцировать выражение, стоящее в правой части равенства (3.3), то, учитывая, что постоянный множитель можно выносить за знак производной и используя равенство (2), сможем написать

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x). \qquad (3.5)$$

Из совпадения правых частей равенств (7.4) и (7.5) следует справедливость равенства (3.3).

Свойство 3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Убедимся, что производные обеих частей равенства (3.6) равны, положив для простоты $n = 2$. В согласии со свойством 1 будем иметь

$$\left(\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x). \qquad (3.7)$$

Продифференцируем выражение, стоящее в правой части равенства (3.6), потом воспользуемся тем, что производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных, а затем используем равенство (3.2):

$$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x). \qquad (3.8)$$

Из совпадения правых частей равенств (3.7) и (3.8) следует справедливость равенств (3.6).

Примечание. Из справедливости свойств 2 и 3 следует справедливость **свойства линейности неопределенного интеграла относительно подынтегральной функции**: неопределенный интеграл от линейной комбинации конечного числа интегрируемых функций равен соответствующей (т.е. с теми же коэффициентами) линейной комбинации неопределенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)\right]dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \cdots + k_n\int f_n(x)dx,$$

где $k_1, k_2, \cdots, k_n$ - постоянные.

Свойство 4. ***(инвариантность формул интегрирования).*** Всякая формула интегрирования справедлива независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или любой допустимой непрерывно дифференцируемой функцией независимой переменной, т.е. если справедливо равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (3.9)$$

то справедливо равенство

$$\int f(u)du = F(u) + C, \qquad (3.10)$$

где $u = u(x)$ - любая допустимая непрерывно дифференцируемая функция аргумента x.

Доказательство. Запишем равенство (3.10) в виде

$$\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C \qquad (3.11)$$

и убедимся, что производные левой и правой частей равенства (3.11) равны. Согласно свойству 1 можем написать

$$\left(\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx\right)' = f\left[u(x)\right]u'(x). \qquad (3.12)$$

Теперь продифференцируем правую часть равенства (3.11), используя правило дифференцирования сложной функции

$$\left(F\left[u(x)\right] + C\right)' = F'\left[u(x)\right]u'(x). \qquad (3.13)$$

Из справедливости равенства (3.9) следует $F'(x) = f(x)$ и, следовательно, $F'[u(x)] = f[u(x)]$, а тогда равенство (3.13) можно записать в виде

$$\left(F[u(x)] + C\right)' = f[u(x)]u'(x). \qquad (3.14)$$

Из совпадения правых частей равенств (3.12) и (3.14) следует справедливость равенства (3.11), а значит и (3.10).

Пример. Используя справедливость равенства

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

найти $\mathrm{Y} = \int \sin^3 x \cos x dx$.

Запишем сначала вычисляемый интеграл в виде

$$\mathrm{Y} = \int \sin^3 x d(\sin x),$$

а затем, используя данное равенство и свойство 4, сможем написать

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Таблица основных интегралов и метод непосредственного интегрирования

Вначале следует заметить, что не существует общих правил вычисления неопределенных интегралов (подобных вычислению производных) и сам процесс интегрирования требует изобретательности и хорошего знания предыдущего материала.

Техника вычисления неопределенных интегралов опирается на использование нескольких основных формул, которые получаются обращением формул дифференцирования основных элементарных функций. Эти формулы сводятся в таблицу, которую называют **таблицей основных интегралов**. Основная трудность при интегрировании состоит в приведении подынтегрального выражения к виду, позволяющему использовать таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$,

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$

4. $\int e^x dx = e^x + C,$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C,$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C,$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C,$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \text{arctg} \dfrac{x}{a} + C,$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C,$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) + C.$

Приведенные формулы справедливы при тех значениях x, при которых определены подынтегральные функции.

Метод непосредственного интегрирования состоит в тождественном преобразовании подынтегральной функции, в использовании свойств неопределенных интегралов и таблицы основных интегралов. Рассмотрим несколько примеров.

Примеры: 1. Вычислить $\int (x + \cos x) dx.$

Решение.

$$\int (x + \cos x) dx = \int x dx + \int \cos x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 + \sin x + C_2 = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$$

Здесь и ниже при отыскании суммы интегралов обычно сразу пишут одну произвольную постоянную $C = C_1 + C_2$.

2. Вычислить $\int \dfrac{1 + 4xe^x}{x} dx.$

Решение.

$$\int \frac{1 + 4xe^x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 4e^x \right) dx = \int \frac{dx}{x} + 4\int e^x dx = \ln|x| + 4e^x + C.$$

3. Вычислить $\int \left(1 + x^2\right)^2 dx.$

Решение.

$$\int \left(1 + x^2\right)^2 dx = \int \left(1 + 2x^2 + x^4\right) dx = \int dx + 2\int x^2 dx + \int x^4 dx = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Решение задач

Непосредственное интегрирование

Задача 1. Вычислить $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx$.

Решение. Так как $\frac{x^3+4x+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx + \int\frac{dx}{x},$$

используем формулы 1 и 2 таблицы интегралов, получим:

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx + \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C.$$

Задача 2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

Решение. Заменим единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и, применив формулы 7 и 8 таблицы основных интегралов, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.$$

Задача 3. Вычислить $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Так как $\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, а $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, то $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$. Подставим последнюю формулу в интеграл: $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$ Здесь использованы формулы 1 и 7 таблицы основных интегралов.

Задача 4. Вычислить $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

Решение. Интегралы вида $\int \sin^2 mxdx$ и $\int\cos^2 mxdx$, где m - вещественное число, вычисляются при помощи тождеств: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Тогда

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

При использовании **метода непосредственного интегрирования** часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

1. $d(x+b)=dx,\ b-$число
2. $\frac{1}{k}d(kx)=dx, k\neq 0,$ число
3. $kdx=d(kx+b), k\neq 0,$ число;
4. $\cos xdx=d(\sin x)$
5. $-\sin xdx=d(\cos x)$
6. $\frac{1}{\cos^2 x}dx=d(\text{tg}x)$
7. $-\frac{1}{\sin^2 x}dx=d(\text{ctg}x)$
8. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)$
9. $\frac{1}{1+x^2}dx=d(\text{arctg}x)$
10. $\frac{1}{x}dx=d(\ln x), \quad x>0.$

Вообще $f'(x)dx=d(f(x)),$ эта формула очень часто используется для вычисления интегралов.

Задача 5. Вычислить $\int\frac{dx}{x+3}$.

Решение. Так как $dx=d(x+3),$ то $\int\frac{dx}{x+3}=\int\frac{d(x+3)}{x+3};$ используя свойство «инвариантности» формул интегрирования (так как $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$ тогда и $\int\frac{d(f(u))}{f(u)}=\ln|f(u)|+C$), получим: $\int\frac{dx}{x+3}=\int\frac{d\left(x+3\right)}{x+3}=\ln|x+3|+C.$

Задача 6. Вычислить $\int\frac{x}{x+3}dx$.

Решение. Прибавляя и вычитая 3 в числителе подынтегральной функции, получим

$$\int\frac{x}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)-3}{x+3}dx=\int\frac{x+3}{x+3}dx-3\int\frac{dx}{x+3}=\int dx-3\int\frac{d(x+3)}{x+3}=x-3\ln|x+3|+C.$$

Мы использовали формулу 1 таблицы основных интегралов и результаты решения примера 5.

Задача 7. Вычислить $\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}xdx$.

Решение. Этот интеграл можно привести к табличному (формула 1), преобразовав подынтегральное выражение:

$$\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}xdx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}2xdx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}d\left(1+x^2\right).$$

Теперь в качестве переменной интегрирования мы имеем выражение $(1+x^2)$ и относительно этой переменной получается интеграл от степенной функции (также используем свойство «инвариантности» формул интегрирования. Следовательно,

$$\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Задача 8. Вычислить $\int\frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\sin^2 x}$.

Решение. Используем формулу: $d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx.$ Тогда интеграл преобразуется: $\int\frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\sin^2 x}=-\int\operatorname{ctg}^{-5}x\,d(\operatorname{ctg}x).$ В качестве переменной интегрирования имеем выражение $\operatorname{ctg}x$, применяем формулу 1 для интеграла от степенной функции и свойство «инвариантности» формул интегрирования.

Тогда $\int\frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\sin^2 x}=-\int\operatorname{ctg}^{-5}x\,d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{(\operatorname{ctg}x)^{-4}}{-4}+C=\frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x}+C.$

Задача 9. Вычислить $\int x^2e^{-x^3}dx$.

Решение. Умножим и разделим подынтегральное выражение на (-3) и постоянный множитель $\left(-\frac{1}{3}\right)$ вынесем за знак интеграла, тогда

$$\int x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int(-3)x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3).$$

Теперь в качестве переменной интегрирования имеем выражение $\left(-x^3\right)$ и относительно этой переменной получаем интеграл от показательной функции (также используем свойство «инвариантности» формул интегрирования). Следовательно,

$$\int x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3)=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$$

Полезно запомнить следующий результат: интеграл от дроби, числитель которой есть производная знаменателя, равен натуральному логарифму модуля знаменателя:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{d(f(x))}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$$

Задача 10. Вычислить $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Решение. Так как $(\sin x)'=\cos x$, то $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$

Задача 11. Вычислить $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+9}dx$.

Решение. В этом примере $d(x^2-7x+9)=(2x-7)dx$. Поэтому $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+9}dx=\ln|x^2-7x+9|+C.$

Задача 12. Вычислить $\int \frac{\sin x}{3\cos x+2}dx$.

Решение. Так как $d(3\cos x+2)=-3\sin x dx$, то, умножив и разделив исходный интеграл одновременно на (-3), получим:

$$\int \frac{\sin x}{3\cos x+2}dx=-\frac{1}{3}\int \frac{(-3)\sin x}{3\cos x+2}dx=-\frac{1}{3}\int \frac{d(3\cos x+2)}{3\cos x+2}=-\frac{1}{3}\ln\left|3\cos x+2\right|+C.$$

Задача 13. Вычислить $\int \frac{dx}{2x^2-4x+8}$.

Решение. Выделим сначала полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$2x^2-4x+8=2(x^2-2x+4)=2(x^2-2\cdot 1\cdot x+1+3)=2\left((x-1)^2+3\right).$$

Тогда исходный интеграл преобразуется $\int \frac{dx}{2x^2-4x+8}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+3}$. Так как $dx=d(x-1),$ то можно записать: $\int \frac{dx}{2x^2-4x+8}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+3}$. Используя формулу 10 таблицы интегралов и свойство «инвариантности» формул интегрирования, получим:

$$\int \frac{dx}{2x^2-4x+8}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Вопросы для самопроверки по теме 3.1

1. Что такое первообразная функции для данной функции?
2. Что такое неопределенный интеграл от данной функции?
3. Сформулируйте теорему о существовании неопределенного интеграла.
4. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
5. Выпишите по памяти таблицу основных интегралов.
6. Докажите свойство инвариантности формул интегрирования.
7. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

3.2. Методы вычисления неопределенных интегралов

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Метод подстановки при вычислении неопределенных интегралов.**

- **Метод интегрирования по частям при вычислении неопределенных интегралов.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №5. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 1, с. 13-17 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить две задачи в соответствии со своим вариантом из № 121-140.

Метод подстановки при вычислении неопределенных интегралов

Сущность **метода подстановки (замены переменной)** состоит в том, что с помощью специальным образом подобранной замены переменной интегрирования данное подынтегральное выражение преобразуется к другому подынтегральному выражению, которое является более простым в смысле интегрирования.

Пусть $x=\varphi(t)$ - строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке изменения t. Если на соответствующем промежутке изменения x функция $f(x)$ непрерывна, то будем иметь

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \qquad (3.15)$$

После интегрирования по переменной t следует в полученном результате перейти от переменной t к переменной x при помощи зависимости $x=\varphi(t)$.

Заметим, что при использовании метода замены переменной иногда удобней вводить подстановки вида $t=\psi(x)$ или $\varphi(t)=\psi(x)$.

Примеры:

1. Считая, что $x\geq 0$, вычислить интеграл

$$\int\frac{3x-2}{(x+1)^3}dx.$$

Сделаем замену переменной по формуле $x=t-1$. Тогда $dx=dt$ и, следовательно,

$$\int\frac{3x-2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{3(t-1)-2}{t^3}dt=\int\frac{3t-5}{t^3}dt=\int\left(\frac{3}{t^2}-\frac{5}{t^3}\right)dt=3\int t^{-2}dt-5\int t^{-3}dt=3\frac{t^{-1}}{-1}-5\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{3}{t}+\frac{5}{2t^2}+C,$$

где C - произвольная постоянная. Возвращаясь к переменной x, будем иметь окончательно

$$\int\frac{3x-2}{(x+1)^3}dx=-\frac{3}{x+1}+\frac{5}{2(x+1)^2}+C.$$

2. Вычислить интеграл

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx.$$

Этот интеграл существует при всех x, так как подынтегральная функция непрерывна на всей оси. Введем подстановку $\sqrt[4]{e^x+1}=t,$ тогда $t^4=e^x+1$, $4t^3dt=e^xdx$ и $e^x=t^4-1$. Перейдем к новой переменной

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx=\int\frac{e^xe^xdx}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\int\frac{\left(t^4-1\right)4t^3}{t}dt=4\int t^2\left(t^4-1\right)dt=4\int\left(t^6-t^2\right)dt=4\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Возвратившись к старой переменной, получим

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx=\frac{4}{7}\left(e^x+1\right)^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}\left(e^x+1\right)^{\frac{3}{4}}+C.$$

Метод интегрирования по частям при вычислении неопределенных интегралов

Этот метод является обращением правила дифференцирования произведения двух функций.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на некотором промежутке. Ясно, что

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Произведение uv является первообразной для суммы $u'v + uv'$, следовательно, по определению неопределенного интеграла можем написать

$$\int (u'v + uv')dx = uv + C,$$

где C - произвольная постоянная. Последнее равенство равносильно равенству

$$\int u'vdx + \int uv'dx = uv + C,$$

или

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx, \tag{3.16}$$

где постоянная C не выписывается явно, так как неопределенный интеграл неявным образом уже содержит произвольную постоянную. Равенство (3.16) обычно записывают в виде

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3.17}$$

Формула (3.16) (или (3.17)) называется **формулой интегрирования по частям**. Она позволяет свести вычисление интеграла $\int uv'dx$ к вычислению интеграла $\int vu'dx$. Метод интегрирования по частям применяется тогда, когда подынтегральное выражение предложенного интеграла представляется в виде произведения udv, причем функции $u(x)$ и $v(x)$ выбираются так, чтобы интегрирование выражения vdu было проще интегрирования выражения udv. Следует отметить, что при интегрировании по частям приходится по дифференциалу $dv(x)$ находить функцию $v(x)$. При этом, так как достаточно найти только одну какую-нибудь первообразную, то произвольную постоянную обычно опускают.

Примеры:

1. Вычислить

$$\int (x+2)e^x dx.$$

Здесь разумно положить $u = x+2, \quad dv = e^x dx,$ тогда находим, что $du = dx, \; v = e^x$. Применяя формулу (3.16), получим

$$\int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = xe^x + e^x + C.$$

2. Вычислить $\int x^5 \ln x dx.$

В данном примере целесообразно положить $u = \ln x, \; dv = x^5 dx,$ тогда $du = \frac{1}{x}dx, \; v = \frac{x^6}{6}$. Применяя формулу (3.16), будем иметь

$$\int x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\frac{1}{x}dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\left(\ln x - \frac{1}{6}\right) + C.$$

Решение задач

Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Метод интегрирования по частям

Напомним суть метода подстановки в неопределенном интеграле: пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку, положив $x = \varphi(t)$, следовательно, $dx = d[\varphi(t)] = \varphi'(t)dt$. Тогда для исходного интеграла имеем $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)] = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Задача 1. Вычислить $\int \sqrt{1-3x}dx$ при $x < 0$.

Решение. Введем новую переменную $t = 1-3x;$ продифференцируем левую и правую части, тогда $dt = (-3)dx$, откуда $dx = -\frac{dt}{3}$. Заменяя переменную интегрирования в данном интеграле, получим $\int\sqrt{1-3x}dx=\int\sqrt{t}\left(-\frac{dt}{3}\right)=-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt.$

Для переменной t получили табличный интеграл:

$$-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{9}t\sqrt{t}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим: $\int\sqrt{1-3x}dx=-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}+C.$

Задача 2. Вычислить $\int\sin(4x+2)dx$.

Решение. Сделаем замену $t=4x+2,$ найдем дифференциал левой и правой частей $dt=4dx;$ $dx=\frac{dt}{4}$. Подставим в интеграл $\int\sin(4x+2)dx=\frac{1}{4}\int\sin tdt.$ Но интеграл $\int\sin tdt=-\cos t+C$ (табличный интеграл), поэтому

$$\int\sin(4x+2)dx=\frac{1}{4}\int\sin tdt=\frac{1}{4}(-\cos t)+C=-\frac{1}{4}\cos(4x+2)+C.$$

Задача 3. Вычислить $\int x\sqrt{x-3}dx$ при $x>3$.

Решение. Введем подстановку $t=\sqrt{x-3}$. Возведем обе части в квадрат, получим $t^2=x-3$, $x=t^2+3$, продифференцируем левую и правую части, тогда $dx=2tdt$. Подставив в интеграл, получим:

$$\int x\sqrt{x-3}dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt=2\int(t^2+3)t^2dt=2\int(t^4+3t^2)dt=$$

$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\frac{t^5}{5}+6\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим:

$$\int x\sqrt{x-3}dx=\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Задача 4. Вычислить $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$.

Решение. Введем подстановку $t=\sqrt{1+\sin^2 x}$, а затем возведем обе части в квадрат, тогда $t^2=1+\sin^2 x$. Продифференцируем обе части: $2tdt=2\sin x\cos xdx$, с учетом, что $\sin 2x=2\sin x\cos x,$ получим $2tdt=\sin 2xdx$. Перейдем к новой переменной в интеграле, получим $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx=\int\frac{2tdt}{t}=2\int dt=2t+C.$

Возвращаясь к старой переменной, имеем:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx=2\sqrt{1+\sin^2 x}+C.$$

Задача 5. Вычислить $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.

Решение. Введем подстановку $t = e^x$. Продифференцировав обе части, получим: $dt = e^x dx$. Тогда подставляя в интеграл, будем иметь

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{e^x}{2} + C.$$

Задача 6. Вычислить $\int \frac{\ln \mathrm{tg} x}{\sin x \cos x} dx$.

Решение. Введем подстановку $t = \ln \mathrm{tg} x$, продифференцируем обе части, получим $dt = \frac{1}{\mathrm{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} dx;$ сделаем упрощения: $dt = \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} dx$, после сокращения имеем: $dt = \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$ Подставим в исходный интеграл, получим

$$\int \frac{\ln \mathrm{tg} x}{\sin x \cos x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln \mathrm{tg} x)^2}{2} + C.$$

Рассмотрим теперь метод интегрирования по частям.

Задача 7. Вычислить $\int (2x+1)e^{3x} dx$.

Решение. Пусть $\left[\begin{array}{l} u = 2x+1, \quad \text{тогда} \quad du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx; v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x} 3dx = \frac{1}{3}\int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$.

Следовательно, согласно формуле интегрирования по частям: $\left(\int u dv = uv - \int v du\right)$, имеем

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Задача 8. Вычислить $\int \ln x dx$ при $x > 0$.

Решение. Пусть $\left[\begin{array}{ll} u = \ln x, \quad \text{тогда} & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx; & v = x \end{array}\right]$ поэтому

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Задача 9. Вычислить $\int x^2 \cos x dx$.

Решение. Пусть $\begin{bmatrix} u = x^2; & du = 2xdx \\ dv = \cos xdx; v = \int \cos xdx = \sin x \end{bmatrix}$, тогда $\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - 2\int x \sin xdx$. Для вычисления интеграла $\int x \sin xdx$ снова применим метод интегрирования по частям: $\begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin xdx; v = \int \sin xdx = -\cos x \end{bmatrix}$, поэтому

$$\int x \sin xdx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C_1.$$

Окончательно получим:

$$\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Задача 10. Вычислить $\int e^{\sqrt{x}} dx$ при $x \ge 0$.

Решение. Сначала введем подстановку $t = \sqrt{x}$ или $x = t^2$; продифференцируем обе части, получим $dx = 2tdt$, подставим в исходный интеграл, получим: $\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2tdt = 2\int te^t dt.$ Последний интеграл находим с помощью метода интегрирования по частям: Пусть $\begin{bmatrix} u = t; & du = dt \\ dv = e^t dt; v = \int e^t dt = e^t \end{bmatrix}$, тогда, подставляя в интеграл, имеем $2\int te^t dt = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2\left(te^t - e^t\right) + C.$ Окончательно получим: $\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C.$

Вопросы для самопроверки по теме 3.2

1. Какова цель замены переменной в неопределенном интеграле?
2. Сформулируйте условия, при которых справедливо равенство $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$
3. В чем заключается сущность метода интегрирования по частям при вычислении неопределенного интеграла?
4. Выведите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
5. Дан интеграл $\int P_n(x)e^x dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени «n». Какой метод интегрирования нужно применить для вычисления этого интеграла?

3.3. Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций

При изучении данной темы Вам предстоит познакомиться со следующими вопросами:

- **Интегрирование рациональных функций**
- **Интегрирование рациональных выражений от тригонометрических функций и некоторых иррациональных выражений**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 1, стр. 28-36 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Интегрирование рациональных функций

Так как всякую неправильную рациональную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы **многочлена** и **правильной** рациональной дроби, то интегрирование неправильных рациональных дробей сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Но интегрирование многочлена проводится элементарно, а теорема о разложимости правильной рациональной дроби на простейшие дроби позволяет свести ее интегрирование к интегрированию простейших дробей. Перейдем к рассмотрению интегралов от простейших дробей.

Интегралы от простейших дробей первого типа вычисляются просто. Действительно, при $k=1$ имеем

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

при $k = 2,3, \ldots$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C\ .$$

Прежде чем переходить к интегрированию простейших дробей второго типа, преобразуем квадратичный трехчлен x^2+px+q, стоящий в знаменателе простейшей дроби второго типа, к сумме квадратов

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где введено обозначение $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Введя замену переменной по формуле $t=x+\frac{p}{2}$, сможем написать

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}. \qquad (3.18)$$

В случае $k=1$ имеем

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Вернувшись к старой переменной, получим требуемый результат.

Если $k=2,3,4,...$ то первый интеграл в правой части равенства (3.18) вычисляется просто, ибо

$$\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Для вычисления второго интеграла, стоящего в правой части равенства (3.18), введем обозначение

$$J_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Можно показать, что имеет место формула

$$J_k=\frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\cdot J_{k-1}. \qquad (3.19)$$

Эта формула позволяет находить (без интегрирования) интеграл J_k если известно выражение для интеграла J_{k-1}. Такого типа формулы называются **рекуррентными**. Например, зная, что

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

находим по формуле (3.19) (положив $k=2$)

$$J_2=\frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Используя полученное выражение для J_2, по той же формуле (3.19) можем найти J_3, затем J_4 и т.д. вплоть до нужного значения k. В конце следует возвратиться от переменной t к переменной x.

Пример 1. Вычислить

$$\int\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}dx.$$

Подынтегральная функция - правильная рациональная дробь (в числителе стоит многочлен второй степени, а в знаменателе - третьей). Простыми корнями знаменателя являются числа 0, -2, 2, так что сам знаменатель $x^3 - 4x$ может быть разложен на множители

$$x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2).$$

Подставив эти числа в числитель дроби, убедимся, что они не являются корнями числителя и, следовательно, дробь несократима. Будем искать разложение подынтегральной функции в виде

$$\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2},$$

где A, B, C - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Освобождаясь от знаменателя, будем иметь

$$9x^2 - 2x - 8 = A\left(x^2 - 4\right) + Bx(x+2) + Cx(x-2),$$

или

$$9x^2 - 2x - 8 = (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A + B + C = 9, \\ 2B - 2C = -2, \\ -4A = -8. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$A = 2, \;\; B = 3, \;\; C = 4.$$

Итак,

$$\int \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}\right)dx = 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C,$$

где C - произвольная постоянная.

При разложении правильной рациональной дроби на простейшие, могут быть применены различные искусственные приемы.

Пример 2. Вычислить при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x^2\left(1 + x^2\right)}.$$

В данном случае для разложения подынтегральной функции на простейшие сначала добавим и отнимем в числителе x^2, а затем поделим почленно на знаменатель. Получим

$$\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}x + C,$$

где С - произвольная постоянная.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{x\left(1+x\right)}$ при $x>0$.

Решение. В данном случае для разложения подынтегральной функции на простейшие сначала добавим и отнимем в числителе x, а затем почленно поделим на знаменатель. Получим:

$$\int \frac{dx}{x\left(1+x\right)} = \int \frac{\left(1+x\right)-x}{x\left(1+x\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{dx}{1+x} = \ln x - \ln\left(x+1\right)+C.$$

Рассмотрим теперь некоторые случаи нахождения интегралов от тригонометрических функций. Известно, что вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (где R - знак рациональной функции) осуществляется с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$$

Интегрирование рациональных выражений от тригонометрических функций и некоторых иррациональных выражений

Под **рациональным выражением от тригонометрических функций** понимается выражение, в котором тригонометрические функции входят рационально, т.е. над ними выполняется только конечное число арифметических действий.

Так как

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

то, не умаляя общности, можно ограничиться рассмотрением рациональных выражений от $\sin x$ и $\cos x$, которые символически записываются в виде $R(\sin x,\ \cos x)$, где R означает **рациональную** функцию от двух аргументов. Для вычисления интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ введем подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется **универсальной** и которая позволяет выразить $\sin x$, $\cos x$ и dx рационально через переменную t.

Действительно, используя подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, можем написать

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \tag{3.20}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{3.21}$$

Далее из равенства $x = 2\operatorname{arctg} t$, которое следует из подстановки, получим после дифференцирования

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt. \qquad (3.22)$$

Выполняя подстановку, сможем написать

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ - рациональная функция переменной *t*. Для интегрирования рациональной функции $R_1(t)$ следует использовать изложенные выше приемы.

Пример 1. Вычислить

$$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}.$$

Полагая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и используя равенства (3.20), (3.21), (3.22), получим

$$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2-2t+1-t^2} = -\int \frac{dt}{t-1} = -\ln|t-1| + C = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| + C.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ иногда приводит к интегралам от громоздких алгебраических выражений и с этой точки зрения не всегда бывает наилучший. Например, в случае интеграла вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, т.е. интеграла от рационального выражения, содержащего только **четные** степени тригонометрических функций, целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Действительно, при такой подстановке

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad (3.23)$$

и, следовательно, получаем интеграл от рациональной функции переменной *t*.

Пример 2. Вычислить

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

Применив подстановку $t = \operatorname{tg} x$ и используя формулы (3.23), получим

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{\frac{1}{1+t^2}+4\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg} 2t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + C.$$

Для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x)\cos x dx$ и $\int R(\cos x)\sin x dx$ разумно применить соответственно подстановки $\sin x = t$ и $\cos x = t$.

Иррациональные алгебраические выражения в общем случае не интегрируются в конечном виде. Однако некоторые иррациональные выражения допускают интегрирование в конечном виде. Рассмотрим, например, интегрирование выражений, рационально зависящих от дробно-линейной функции $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d$ - произвольные вещественные числа) в рациональных степенях $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},...,\dfrac{m_k}{n_k}$, т.е.

$$\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ ...,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right]dx,$$

где R означает **рациональную** функцию от своих аргументов. В этом случае разумно ввести подстановку

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^p,$$

где p - общее наименьшее кратное чисел $n_1,n_2,...,n_k$.

Пример 3. Вычислить при $x>0$

$$\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}.$$

Здесь общим наименьшим кратным чисел 2 и 3 является число 6, поэтому применяем подстановку $x=t^6$, считая $t>0$. Ясно, что $dx=6t^5dt$ и, следовательно, сможем написать

$$\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt.$$

Для вычисления последнего интеграла сначала добавим и отнимем в числителе единицу, воспользуемся тождеством $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$, а затем почленно поделим числитель на знаменатель. Получим

$$\int\frac{t^3}{t+1}dt=\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь к старой переменной, будем иметь окончательно

$$\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}=6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right]+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

Решение задач

Задача 1. Вычислить $\int\frac{x^4}{x^3+1}dx$.

Решение. Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь (в числителе многочлен четвертой степени, а в знаменателе – третьей), поэтому вначале выделим ее целую часть. Разделим числитель на знаменатель, получаем

$$\begin{array}{r|l} x^4 & \underline{x^3+1} \\ -\underline{x^4+x} & x \\ -x & \end{array}$$

Имеем $\dfrac{x^4}{x^3+1} = x - \dfrac{x}{x^3+1}$.

Таким образом $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+1}dx = \int\left(x - \frac{x}{x^3+1}\right)dx = \int xdx - \int\frac{x}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} - \int\frac{x}{x^3+1}dx$.

Перейдем теперь к разложению правильной рациональной дроби на простейшие. Используя формулу суммы кубов: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, получим: $\left(x^3+1\right)=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$. Тогда разложение дроби $\dfrac{x}{x^3+1}$ следует искать в виде

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

где неизвестные коэффициенты A, B, C подлежат определению. Освобождаясь от знаменателей, получим:

$$x=A\left(x^2-x+1\right)+(x+1)(Bx+C),\quad x=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C=x^2(A+B)+x(-A+B+C)+A+C.$$

В полученном тождестве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

$$\begin{array}{l} \text{Ï ðè } x^2: 0 = A+B \\ \text{Ï ðè } x^1: 1 = -A+B+C \\ \text{Ï ðè } x^0: 0 = A+C \end{array} \quad \text{èëè} \quad \begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=1, \\ A+C=0. \end{cases}$$

Мы получили систему трех уравнений относительно коэффициентов A, B, C. Решая ее, находим $A=-\dfrac{1}{3}; B=\dfrac{1}{3}; C=\dfrac{1}{3}.$ Таким образом, имеем

$$\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx.$

Рассмотрим интеграл $\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx.$ Чтобы использовать правило: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C,$ преобразуем выражение в числителе подынтегральной функции:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

В последнем интеграле $\int \frac{dx}{x^2-x+1}dx$ выделим полный квадрат в знаменателе, получим $x^2-x+1 = \left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$

Тогда интеграл примет вид $\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

(использовали: $dx = d\left(x-\frac{1}{2}\right)$). Тогда на основании формулы 10 таблицы основных интегралов и свойства «инвариантности» формул интегрирования, получим

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

Тогда будем иметь:

$$\int \frac{x}{x^3+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Окончательно:

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 2. Вычислить $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Введем подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ тогда $x=2\operatorname{arctg}t,$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставим в интеграл, получим:

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\left(1+t^2\right)2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+3t^2+2t+1-t^2\right)}=\int\frac{2dt}{2t^2+2t+4}=\int\frac{2dt}{2\left(t^2+t+2\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Задача 3. Вычислить $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение. Применим подстановку $\operatorname{tg}x=t,$ тогда $x=\operatorname{arctg}t.$ Используя введенную подстановку, можем написать

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Используя последние равенства, будем иметь:

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{2t^2+1}=\int\frac{dt}{2\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t+C.$$

Возвращаясь к старой переменной будем иметь:

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

Задача 4. Вычислить $\int\sin^5 x\cos^4 xdx$.

Решение. Сначала от $\sin^5 x$ отделим один множитель $\sin x,$ а оставшийся $\sin^4 x$ представим как $\left(1-\cos^2 x\right)^2$, тогда интеграл примет вид:

$$\int\sin^5 x\cos^4 xdx=\int\sin^4 x\cos^4 x\sin xdx=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^4 x\sin xdx.$$

Теперь введем подстановку: $\cos x = t$; тогда $-\sin x dx = dt$. Подставляя в интеграл, получим:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^4 x \sin x dx = -\int \left(1-t^2\right)^2 t^4 dt =$$

$$= -\int \left(1-2t^2+t^4\right) t^4 dt = -\int \left(t^4-2t^6+t^8\right) dt = -\frac{t^5}{5}+\frac{2}{7}t^7-\frac{t^9}{9}+C =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x + C.$$

Задача 5. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение. Вспомним тригонометрические формулы: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, тогда

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\sin x \cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x, \text{ а } \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Тогда получим:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Задача 6. Вычислить $\int \cos 4x \cos 5x dx$.

Решение. Используя формулу $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos\left(m-n\right)x\right]$, получим

$$\int \cos 4x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 9x + \cos x\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos 9x dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{9}\int \cos 9x d\left(9x\right) + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{18}\sin 9x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых типов интегралов, содержащих иррациональные функции.

Задача 7. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Решение. Данный интеграл относится к интегралам типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, который можно найти если выделить полный квадрат под радикалом и ввести подстановку. Выделим полный квадрат:

$$4x^2+2x+1 = 4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right).$$

Сделаем подстановку $x+\frac{1}{4}=t;$ тогда $dx=dt$. Переходя к новой переменной, будем иметь

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{4}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

Задача 8. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

Решение. Данный интеграл можно вычислить путем подстановки. Заметим, что в знаменателе подынтегральной функции стоит сумма $x+2$ соответственно в степенях $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ - число 6. Поэтому полагаем $x+2=t^6$, откуда следует $x=t^6-2; dx=6t^5dt$. Тогда $(x+2)^{\frac{2}{3}}=\left(t^6\right)^{\frac{2}{3}}=t^4;$ $(x+2)^{\frac{1}{2}}=\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}=t^3;$ $t=\sqrt[6]{x+2}.$

Подставим в исходный интеграл, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}=\int\frac{6t^5}{t^4-t^3}dt=6\int\frac{t^2}{t-1}dt.$$

Добавим и вычтем в числителе 1. Получим:

$$6\int\frac{t^2}{t-1}dt=6\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}dt=6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt\ .$$

После того, как t^2-1 в числителе разложили на множители $\left(t^2-1=(t-1)(t+1)\right)$, почленно поделим на знаменатель $t-1$. Имеем

$$6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt=6\int(t+1)dt+6\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=6\int tdt+6\int dt+6\int\frac{d(t-1)}{t-1}=6\frac{t^2}{2}+6t+6\ln|t-1|+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, будем иметь

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}=3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C.$$

Вопросы для самопроверки по теме 3.3

1. Какие виды простейших рациональных дробей Вы знаете?
2. Как интегрируются простейшие рациональные дроби?
3. Изложите метод нахождения интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R - рациональная функция. Приведите примеры.
4. Какова цель применения универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$?
5. Изложите метод нахождения интеграла вида $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right)dx$, где R - рациональная функция. Приведите примеры.
6. Как находятся интегралы $\int R(\sin x)\cos x dx; \int R(\cos x)\sin x dx$? Приведите примеры.
7. Какой метод применяется при нахождении интеграла от дробно-линейной функции? Приведите примеры.

3.4. Определенный интеграл, его свойства и приложения

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Определение определенного интеграла.**
- **Основные свойства определенного интеграла.**
- **Формула Ньютона-Лейбница.**
- **Формула замены переменной в определенном интеграле.**
- **Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.**
- **Вычисление площади плоской фигуры.**
- **Вычисление объема тела вращения.**
- **Вычисление длины дуги кривой.**
- **Вычисление площади поверхности вращения.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тесты №6 и №7. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 2, с. 40-54 и 62-67 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить две задачи в соответствии со своим вариантом из № 141-150 и из № 161-170.

Определение определенного интеграла

Прежде чем дать определение определенного интеграла, рассмотрим одну задачу (**определение площади криволинейной трапеции**), которая естественным образом приведет к понятию определенного интеграла.

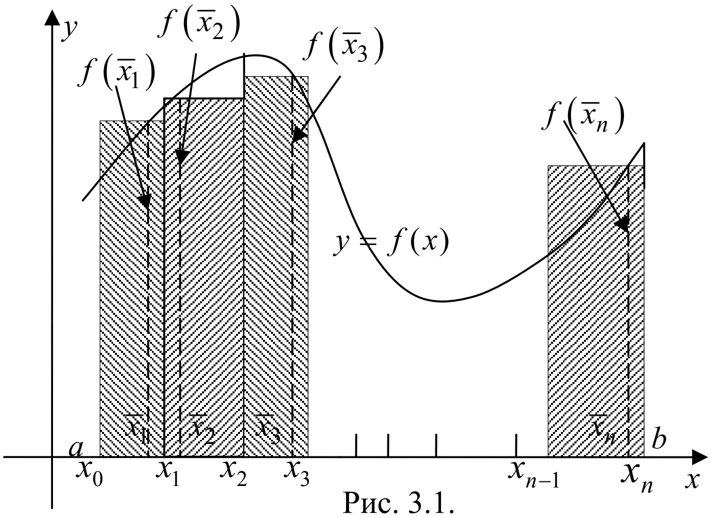


Рис. 3.1.

Пусть на промежутке $[a,\ b]$ дана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$ (рис. 3.1). Такая фигура называется **криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции** $f(x)$. Требуется найти площадь S этой трапеции. Для этого разобьем промежуток $[a,b]$ произвольным образом точками $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n$ на n частей, считая $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, и проведем через них вертикальные прямые $x = x_{k-1}$ $(k = 1,2,\cdots,n,n+1)$. Тогда рассматриваемая криволинейная трапеция разобьется на n частичных трапеций, построенных на частичных промежутках $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,\cdots,n-1,n)$. Выберем на каждом из частичных промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ по произвольной точке $\bar{x}_k$, вычислим значения $f(\bar{x}_k)$ функции $f(x)$ в этих точках и введем обозначения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Легко видеть, что каждое из произведений $f(\bar{x}_1)\Delta x_1$, $f(\bar{x}_2)\Delta x_2$, $f(\bar{x}_3)\Delta x_3, \cdots, f(\bar{x}_n)\Delta x_n$, равно площади прямоугольника, опирающегося соответственно на частичные промежутки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ и имеющего высоты $f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), f(\bar{x}_3), \cdots, f(\bar{x}_n)$. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$$

равна площади ступенчатой (заштрихованной) фигуры, составленной из указанных прямоугольников. При неограниченном увеличении числа точек дробления промежутка $[a,b]$ на частичные промежутки и притом так, чтобы длина самого большого частичного промежутка стремилась к нулю, естественно считать, что величина S_n будет стремиться к S независимо от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на частичные промежутки и от выбора точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_n$, так что

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right) \Delta x_k. \qquad (3.24)$$

Итак, искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу (3.24).

Решение многих практических задач (определение массы стержня переменной плотности, определение работы силы при прямолинейном движении точки и др.) сводится к вычислению пределов вида (3.24). Это обусловило введение понятия **определенного интеграла** - одного из фундаментальных понятий математики. Перейдем к его определению, отвлекаясь от конкретного содержания задачи.

Пусть на конечном замкнутом промежутке $\left[a, b\right]$, где $a < b$ определена ограниченная функция $f\left(x\right)$. Проделаем пять операций:

1) разобьем промежуток $\left[a, b\right]$ произвольным образом на n частей точками $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{n-1}, x_n$, следующими друг за другом так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (для удобства записи точки a и b обозначены соответственно через x_0 и x_n) и введем обозначения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $\left(k = 1, 2, \cdots, n-1, n\right)$. Назовем **рангом (шагом) дробления** число $\lambda = \max\limits_{k} \left\{\Delta x_k\right\}$;

2) в каждом частичном промежутке $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ $\left(k = 1, 2, \cdots, n-1, n\right)$ выберем произвольно по точке $\overline{x}_k$;

3) вычислим значения $f\left(\overline{x}_1\right), f\left(\overline{x}_2\right), f\left(\overline{x}_3\right), ..., f\left(\overline{x}_n\right)$ функции $f\left(x\right)$ в выбранных точках;

4) составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right) \Delta x_k,$$

называемую **интегральной суммой (суммой Римана)** функции $f\left(x\right)$ на промежутке $\left[a, b\right]$, отвечающей данному разбиению промежутка $\left[a, b\right]$ на n частей и данному выбору точек $\overline{x}_k$;

5) вычислим предел (при этом число частичных промежутков неограниченно возрастает)

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k\right) \Delta x_k. \qquad (3.25)$$

Если существует конечный предел (3.25), который не зависит ни от способа разбиения промежутка [a, b] на части, ни от выбора промежуточных точек $\overline{x}_k$, то он называется **определенным интегралом от функции $f\left(x\right)$ на промежутке** [a, b] и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3.26)$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k .$$

В обозначении определенного интеграла (3.26) приняты следующие наименования: $f(x)$ - **подынтегральная функция,** $f(x)dx$ **-подынтегральное выражение,** x **- переменная интегрирования,** a **- нижний предел интегрирования,** b **- верхний предел интегрирования.** Промежуток $[a,b]$ называется **промежутком интегрирования**. Если для функции $f(x)$ существует интеграл по промежутку $[a,b]$, то ее называют **интегрируемой на этом промежутке**.

В определении интеграла (3.26) предполагалось, что $a < b$. Снимем это ограничение, положив по определению

если $b < a$, то $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$,

если $b = a$, то $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **кусочно-непрерывной на некотором промежутке**, если она непрерывна на этом промежутке за исключением конечного числа отдельных точек, каждая из которых является точкой разрыва первого рода.

Геометрически кусочно-непрерывная функция изображается линией, состоящей из конечного числа непрерывных участков. Очевидно, что непрерывная функция является частным случаем кусочно-непрерывной функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на промежутке $[a,b]$, то она на нем интегрируема.

Из изложенного следует, что формула (3.24), дающая выражение для площади S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком неотрицательной непрерывной функции $f(x)$, может быть записана в виде

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

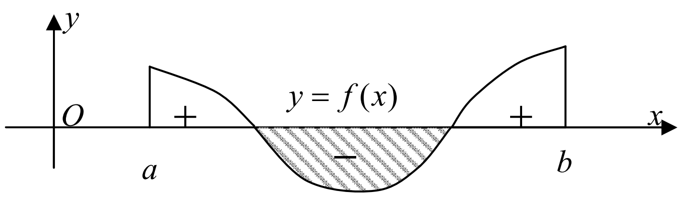


Рис. 3.2

В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла** от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на промежутке

$[a,b]$. Чтобы дать геометрическую интерпретацию определенному интегралу от непрерывной функции, принимающей положительные и отрицательные значения, достаточно площадям криволинейных трапеций, ограничиваемых графиком функции, приписывать знак, а именно: положительными считать площади тех трапеций, которые расположены над осью Ox, а отрицательными - под осью Ox (рис. 3.2)

Геометрический смысл определенного интеграла теперь можно сформулировать следующим образом: определенный интеграл от непрерывной функции равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиком этой функции, осью абсцисс, а так же прямыми $x=a$ и $x=b$, причем площади трапеций, расположенных над осью абсцисс, берутся со знаком +, а площади трапеций, расположенных под осью абсцисс - со знаком $-$.

Основные свойства определенного интеграла

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$ и c - некоторая постоянная, то функция $cf(x)$ также интегрируема на $[a,b]$, причем

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{3.27}$$

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$, то их сумма $f_1(x)+f_2(x)$ также интегрируема на $[a,b]$, причем

$$\int_a^b \left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Заметим, что свойства 1 и 2 выражают **свойство линейности определенного интеграла относительно подынтегральной функции:** определенный интеграл от линейной комбинации конечного числа интегрируемых функций равен соответствующей (т.е. с теми же коэффициентами) линейной комбинации определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)\right]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx+\cdots+c_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

Свойство 3. (Аддитивность относительно промежутка интегрирования).

Если функция $f(x)$ интегрируема в наибольшем по длине промежутке, определяемом любыми числами *a, b, c,* то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 4. Если $a < b$ и на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема, причем всюду в $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x)\ge 0$ $\left(f(x)\le 0\right)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \leq 0\right). \tag{3.28}$$

Свойство 5. Если $a < b$ и на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, причем всюду в $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{3.29}$$

Свойство 6. Если $a < b$ и на промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема, причем всюду в $[a,b]$ выполняется неравенство

$$m \leq f(x) \leq M, \tag{3.30}$$

где m и M - некоторые постоянные, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{3.31}$$

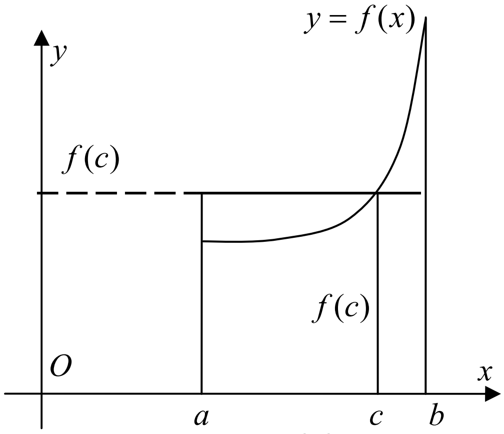


Рис. 3.3

Свойство 7. (Теорема о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то в этом промежутке найдется хотя бы одна такая точка c, что будет иметь место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{3.32}$$

Теорема о среднем в случае неотрицательной функции $f(x)$ имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, равна площади прямоугольника с основанием длины $b-a$ и высотой длины $f(c)$ (рис. 3.3).

Свойство 8. Изменение значений функции $f(x)$ в любом конечном числе точек промежутка интегрирования не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла.

В заключение сделаем еще одно замечание: определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \cdots.$$

Формула Ньютона-Лейбница*

Рассмотрим основной способ вычисления определенного интеграла, основанный на связи определенного интеграла от данной функции с ее неопределенным интегралом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$. Возьмем произвольное значение $x \in [a,b]$ и рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^x f(t)dt\,, \tag{3.33}$$

где переменная интегрирования обозначена через t, чтобы не путать ее с выбранным значением x. Очевидно, что величина интеграла (3.33) зависит от выбранного значения x, т.е. является функцией x. Обозначив эту функцию через $F(x)$, будем иметь

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Функцию $F(x)$ называют **определенным интегралом с переменным верхним пределом**.

Теорема. (Барроу).**

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т.е.

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)\,.$$

Доказательство. Вычислим производную функции $F(x)$, исходя из определения производной. Для этого зафиксируем произвольное значение x из $[a,b]$, дадим ему некоторое приращение Δx и найдем соответствующее ему приращение функции $\Delta F(x)$, используя свойство аддитивности определенного интеграла относительно промежутка интегрирования,

---

* Ньютон Исаак (1643-1727) – английский физик и математик,
Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – немецкий математик, физик, философ.

** Барроу Исаак (1776-1862) – английский математик.

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta F(x)=f(c)\Delta x,$$

где c - некоторая точка между x и $x+\Delta x$. Из последнего равенства следует

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(c).$$

Замечая, что при $\Delta x\to 0$ точка c стремится к точке x, и учитывая непрерывность функции $f(x)$, получим окончательно

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{c\to x} f(c)=f(x).$$

Эту теорему можно сформулировать иначе: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из ее первообразных на этом промежутке. Отсюда следует, что

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C.$$

Теорема (основная теорема интегрального исчисления). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и $\Phi(x)$ - ее любая первообразная на этом промежутке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{3.34}$$

Эта формула называется **формулой Ньютона-Лейбница.**

Доказательство. Каждая из функций $\Phi(x)$ и $\int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и, следовательно, они различаются друг от друга на некоторую постоянную C_1, так что $\int_a^x f(t)\,dt=\Phi(x)+C_1$.

Для определения C_1 положим в этом равенстве $x=a$; тогда получим $C_1=-\Phi(a)$. Используя это, предыдущее равенство запишем в виде

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Phi(x)+C_1=\Phi(x)-\Phi(a).$$

Положив теперь $x=b$, и возвращаясь к прежнему обозначению переменной интегрирования, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Примечание. Для краткости записи часто употребляют обозначение (знак двойной подстановки)

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b .$$

Учитывая это, формулу Ньютона-Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b . \qquad (3.35)$$

Примеры: 1. Вычислить

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Функция $\frac{x^3}{3}$ является первообразной для x^2 на промежутке [0,1]. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Функция $-\cos x$ является первообразной для $\sin x$ на промежутке $[0,\pi]$ и, следовательно, по формуле (3.35)

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

3. Вычислить

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Функция $\operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ на промежутке $[-1,1]$ и, следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Одним из эффективных методов вычисления определенных интегралов является **метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)**. Приведем формулу замены переменной в определенном интеграле.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, причем промежуток $[\alpha,\beta]$ отображается функцией $\varphi(t)$ в промежуток $[a,b]$, так что $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt. \qquad (3.36)$$

Эта формула называется **формулой замены переменной интегрирования (подстановки) в определенном интеграле.**

Пример 1. Вычислить при $x \ge 0$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Сделаем подстановку $x=t^2$, считая $t \ge 0$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x=0$ имеем $t=0$, при $x=4$ имеем $t=2$. Таким образом, имеем

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t}.$$

Добавим и вычтем в числителе 1, получим:

$$2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= \left(t\Big|_0^2 - \ln(1+t)\Big|_0^2\right) = 2\left(2-\ln 3\right) = 4-\ln 9.$$

Пример 2. Вычислить

$$\int_0^2 e^{x^2}x\,dx.$$

Чтобы упростить подынтегральное выражение, положим $x^2=t$, т.е. сделаем замену переменной $x=\sqrt{t}$, считая $t \ge 0$; при этом $2xdx=dt$, т.е. $xdx=\frac{1}{2}dt$. С помощью формулы $x^2=t$ найдем новые пределы интегрирования: при $x=0$ имеем $t=0$, при $x=2$ имеем $t=4$. Используя формулу (3.36), получим

$$\int_0^2 e^{x^2}x\,dx = \int_0^4 e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right).$$

В заключение заметим, что подбор удачной подстановки бывает не так очевиден, как в простейших случаях. Все зависит от навыка и изобретательности того, кто выполняет интегрирование, ибо общих правил отыскания удачных подстановок не существует.

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Одним из основных методов вычисления определенных интегралов является **метод интегрирования по частям**. Приведем формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на промежутке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (3.37)$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.**

Примечание. Часто равенство (3.37) записывается в виде

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

В этом случае следует иметь в виду, что в обоих определенных интегралах интегрирование производится по переменной x, а не v и u, как это формально следует из формы записи интегралов.

Пример. Вычислить

$$\int_1^2 x\ln xdx.$$

Полагаем $u = \ln x,\ dv = xdx;$ тогда $du = \frac{1}{x}dx,\ v = \frac{x^2}{2}$, следовательно, по формуле (3.37) имеем

$$\int_1^2 x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

Вычисление площади плоской фигуры в прямоугольных координатах.

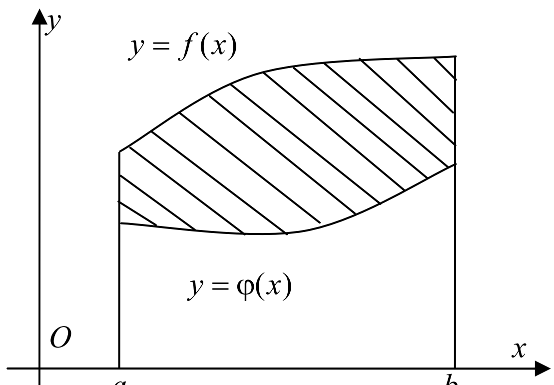


Рис. 3.4

Ранее было показано, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции $f(x)$, осью Ox и вертикальными прямыми $x = a,\ x = b\ (a < b)$ определяется формулой

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Если фигура ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, а снизу графиком функции $y=\varphi(x)$ (рис. 3.4), то ее площадь S находится по формуле

$$S=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx, \qquad (3.38)$$

так как она представляет собой разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиком функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Формула (3.38) справедлива при любом расположении кривых $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ относительно оси Ox (естественно, при сохранении условия $f(x)\geq\varphi(x)$). Вычисление площади более сложной фигуры может быть выполнено при помощи формулы (3.38) путем предварительного разбиения фигуры на соответствующие части и суммирования их площадей.

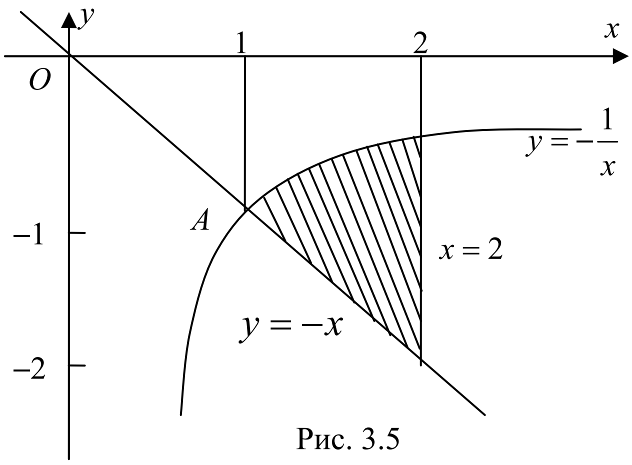


Рис. 3.5

Пример. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной гиперболой $y=-\frac{1}{x}$ и прямыми $y=-x,\ x=2$.

Сделаем сначала чертеж, на котором изобразим данные линии (рис. 3.5).

Из чертежа видно, что данная фигура ограничена сверху линией $y=-\frac{1}{x}$, а снизу - линией $y=-x$. Найдем сначала абсциссу точки A - точки пересечения указанных линий. Имеем в точке A $-\frac{1}{x}=-x$, откуда $x^2=1$ и, следовательно, $x=1$, так как точка A имеет положительную абсциссу. В согласии с формулой (3.38) можем написать

$$S=\int_1^2\left[-\frac{1}{x}-(-x)\right]dx=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

Вычисление объема тела вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f\left(x\right)$ и прямыми $x=a;x=b$

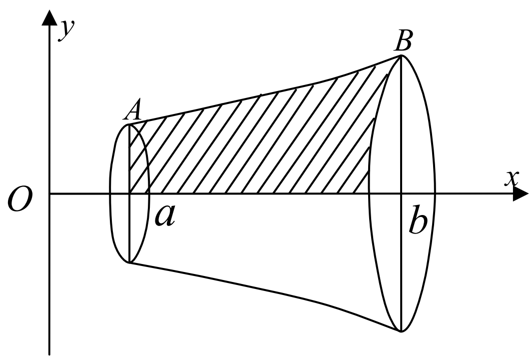


Рис. 3.6

(рис. 3.6), тогда объем тела вращения определяется по формуле (3.39):

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (3.39)$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \mathrm{tg}x$ от $x = 0$ до $x = \pi/3$ (рис. 3.7).

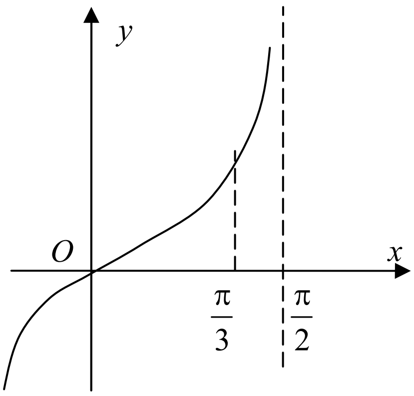


Рис. 3.7

Решение. Объем тела $V = \pi\int_0^{\pi/3} y^2dx = \pi\int_0^{\pi/3} \mathrm{tg}^2xdx$. Представим подинтегральную функцию tg^2x в виде $\mathrm{tg}^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, тогда объем $V = \pi\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx.$ Разделим почленно числитель на знаменатель в подынтегральном выражении:

$$V = \pi\int_0^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \pi\left(\mathrm{tg}x - x\right)\Big|_0^{\pi/3} = \pi\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \pi\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}.$$

Вычисление длины дуги кривой

Если плоская дуга AB задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t);\, y = \psi(t)\,(\alpha \le t \le \beta), \qquad (3.40)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные частные производные, не обращающиеся в нуль одновременно, тогда формула для вычисления длины дуги имеет вид:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}dt \quad . \qquad (3.41)$$

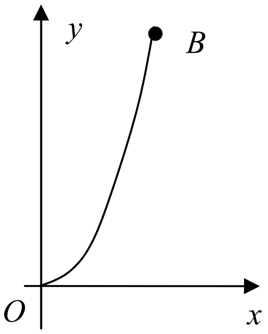


Рис. 3.8

Если же дуга задана в явном виде $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, то длина дуги будет вычисляться по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx\,. \qquad (3.42)$$

Рассмотрим теперь вычисление дуги плоской кривой, которая задана в полярных координатах с помощью уравнения $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ - непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta]$, а начальная и конечная точки имеют полярные углы α и β

соответственно.

Формула для вычисления длины дуги в полярных координатах имеет вид

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\varphi. \qquad (3.43)$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $B\left(8;\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$ (рис.3.8)

Решение. Так как $y'=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{3/2}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}=\sqrt{x}$, то $\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{1+x}$. Поэтому

$$l=\int_0^8\sqrt{1+x}\,dx=\int_0^8\sqrt{x+1}\,d(x+1)=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^8=\frac{2}{3}(27-1)=17\frac{1}{3}.$$

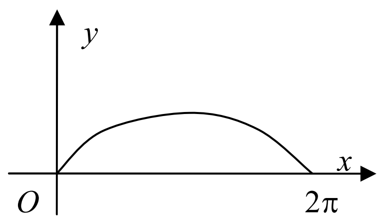


Рис. 3 .9

Пример 2. Вычислим длину одной арки циклоиды $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ (рис. 3.9).

Решение. Найдем производные x'_t и y'_t.

$$x'_t=1-\cos t;\ \ y'_t=\sin t.$$

Найдем

$$\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t=$$
$$=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t=2-2\cos t=2(1-\cos t).$$

Применим тригонометрическую формулу $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$. Следовательно, $\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2=2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}$. А корень из этого выражения будет равен:

$$\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}=\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}=2\sin\frac{t}{2}.$$

Тогда длина дуги одной арки циклоиды

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2\cdot 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=$$
$$=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4(\cos\pi-\cos 0)=-4(-1-1)=8.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$.

Решение. Найдем производную $\rho'_{\varphi} = ae^{\varphi}$. Тогда длина дуги

$$l = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{a^2 e^{2\varphi} + a^2 e^{2\varphi}}\, d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{2a^2 e^{2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{\varphi_0} e^{\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2} e^{\varphi} \Big|_0^{\varphi_0} = a\sqrt{2}\left(e^{\varphi_0} - e^0\right) = a\sqrt{2}\left(e^{\varphi_0} - 1\right).$$

Вычисление площади поверхности вращения

Пусть на плоскости дана дуга AB (рис. 3.6), уравнение которой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, причем функция $f(x)$ неотрицательна на $[a,b]$ и имеет непрерывную производную. Тогда площадь Q поверхности, получающейся при вращении дуги AB вокруг оси Ox (рис. 6) может быть вычислена по формуле

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx. \tag{3.44}$$

Решение задач

Задача 1. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Решение. Введем подстановку $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t dt = 8\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot 2\sqrt{1 - \sin^2 x}\cos t dt = 16\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt.$$

Используя формулу двойного угла: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, продолжим решение

$$16\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt.$$

Известно, что $\sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2}$. Тогда подставляя в последний интеграл, окончательно получим

$$4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

Задача 2. Вычислить $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Решение. Положим $\sqrt{e^x-1}=t$, тогда $e^x-1=t^2$; $e^x=t^2+1$ и, следовательно, $x=\ln\left(t^2+1\right)$, $dx=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x=0$ имеем $t=0$, при $x=\ln 2$ имеем $t=1$. Тогда

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt.$$

Добавим и вычтем 1 в числителе последнего интеграла, получим

$$2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int_0^1\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=2\left(\int_0^1 dt-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right)=2\left(t\Big|_0^1-\operatorname{arctg}t\Big|_0^1\right)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

Задача 3. Вычислить $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x dx$.

Решение. Данный интеграл можно вычислить с помощью метода интегрирования по частям, положив $\left[\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg}x, du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=xdx; v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right]$. Тогда в соответствии с формулой (3.37) будем иметь:

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg}x dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Для вычисления последнего интеграла сначала добавим и отнимем в числителе по единице, затем произведем почленное деление

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}.$$

В результате имеем:

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg}x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}.$$

Задача 4. Вычислить $\int_0^{\pi} e^x\sin x dx$.

Решение. Данный интеграл берется по частям дважды. Пусть $\left[\begin{array}{c} u=\sin x, du=\cos x dx \\ dv=e^x dx; v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right]$. Тогда в соответствии с формулой (3.37) получим:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = -\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

(так как $\sin 0 = 0$ и $\sin \pi = 0$).

К последнему интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $\left[\begin{array}{l} u = \cos x, du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right]$, следовательно,

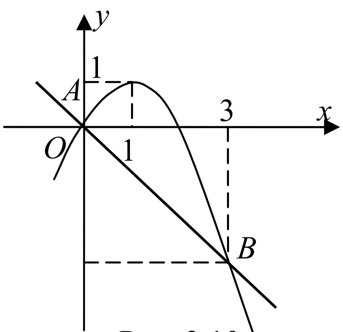


Рис. 3.10

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx =$$

$$= e^{\pi}(-1) - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

Подставим в исходный интеграл, получим:

$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$, откуда

$$2\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = e^{\pi} + 1; \qquad \text{или} \qquad \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

Задача 5. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.

Решение. Методом выделения полных квадратов приведем уравнение параболы к виду $y - 1 = -(x-1)^2$, отсюда видно, что парабола симметрична относительно прямой $x = 1$, ветвями направлена вниз и вершина ее лежит в точке $(1;1)$ (рис. 3.10).

Найдем абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения A и B: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$; $-x = 2x - x^2$; $3x = x^2$; $x^2 - 3x = 0$; $x(x-3) = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 3$. Теперь по формуле (3.38) вычисляем

$$S = \int_0^3 \left(\left(2x - x^2\right) - (-x)\right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{2} \text{ кв. ед.}$$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$ в первом квадранте (рис. 3.11).

Решение. Из условия следует, что уравнение дуги OA имеет вид $y = x^{3/2}$; тогда $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; (y')^2 = \frac{9}{4}x.$

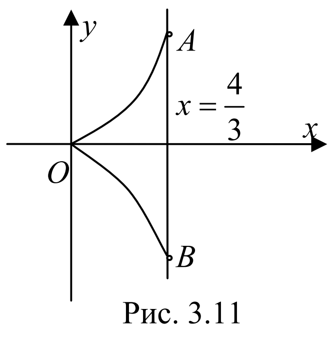


Рис. 3.11

Длина дуги кривой в этом случае вычисляется по формуле: $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx$,

тогда длина дуги $l_{OA}=\int\limits_0^{4/3}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$. Чтобы взять данный интеграл, представим дифференциал dx в виде $dx=\frac{4}{9}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)$, тогда

$$l_{OA}=\int\limits_0^{4/3}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{4}{9}\int\limits_0^{4/3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}x\right).$$

Используя свойство инвариантности формул интегрирования и табличный интеграл от степенной функции $\left(\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C\right)$, получим

$$l_{OA}=\frac{4}{9}\int\limits_0^{4/3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^{4/3}=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{4/3}=\frac{8}{27}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{56}{27},$$

Задача 7. Вычислить длину астроиды $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$, при $t\in[0,2\pi)$ (рис. 3.12).

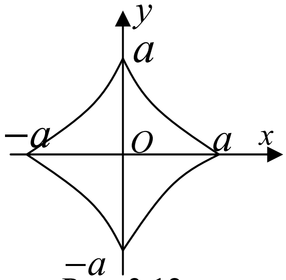


Рис. 3.12

Решение. Дуга задана параметрическими уравнениями, в этом случае длина дуги определяется по формуле: $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$. В данном примере кривая симметрична относительно обеих координатных осей, поэтому вычисляем сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте: ясно, что $\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\cdot\sin t;$ $\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t;$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=9a^2\cos^4 t\sin^2 t;$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9a^2\sin^4 t\cos^2 t$. Для четвертой части длины дуги l (в первом квадранте) параметр t изменяется от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$. Подставляя это в формулу (3.41) длины дуги, получаем:

$$\frac{l}{4} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d\left(\sin t\right) = 3a \left.\frac{\left(\sin t\right)^2}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

Вся длина дуги $l = 4\frac{3a}{2} = 6a$.

Задача 8. Найти длину кардиоиды $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$ при $\varphi \in \left[0, 2\pi\right)$.

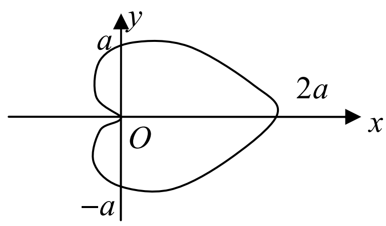


Рис. 3.13

Решение. Кардиоида $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$ задана в полярных координатах и изображена на рис. 3.13. Она симметрична относительно оси Ox. Найдем половину длины кардиоиды (т.е. будем считать, что угол φ изменяется от 0 до π) по формуле (3.43): $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$. Вычислим производную $\rho' = a\left(-\sin\varphi\right)$. Подставим в формулу длины дуги, получим:

$$l = \int_0^\pi \sqrt{a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2 + a^2\left(-\sin\varphi\right)^2} d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi} d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\varphi} d\varphi.$$

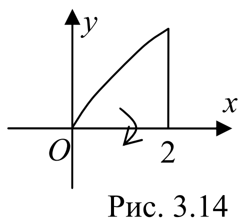


Рис. 3.14

В последнем интеграле используем формулу: $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. Тогда $\sqrt{1+\cos\varphi} = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. Подставив это в формулу длины дуги кардиоиды, получим:

$$l = a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\varphi} d\varphi = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 2a \cdot 2\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a \sin\left.\frac{\varphi}{2}\right|_0^\pi = 4a$$

Таким образом, длина дуги всей кардиоиды равна $8a$.

Задача 9. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 6x$, прямой $x = 2$ и осью Ox (рис. 3.14).

Решение. Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox, находится по формуле (3.39). В нашем случае имеем

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^2 6xdx = \pi\cdot 6\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\pi x^2\Big|_0^2 = 3\pi\cdot 4 = 12\pi .$$

Задача 10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$ и прямыми $y = 1, y = 6$ (рис. 3.15).

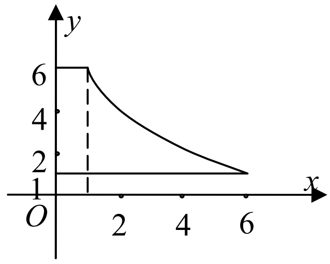


Рис. 3.15

Решение. Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, вычисляется по формуле $V_y = \pi\int_c^d x^2dy$.

Из уравнения кривой $xy = 6$ находим $x = \dfrac{6}{y}$; $x^2 = \dfrac{36}{y^2}$.

Тогда получаем

$$V_y = \pi\int_1^6 \frac{36}{y^2}dy = 36\pi\int_1^6 y^{-2}dy = 36\pi\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^6 = \frac{-36\pi}{y}\Big|_1^6 = \frac{-36\pi}{6} + 36\pi = 30\pi .$$

Задача 11. Вычислить площадь шарового пояса, получаемого вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$ между точками с абсциссами $x = -1, x = 1$ (рис. 3.16).

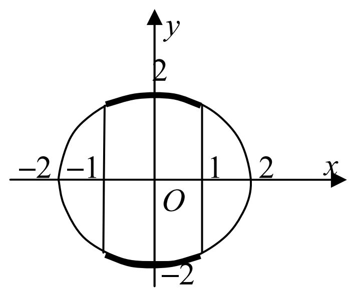


Рис.3.16

Решение. Площадь поверхности S в этом случае находится по формуле (3.44)

$$S = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx .$$

Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$ найдем (для верхней полуокружности) $y = \sqrt{4 - x^2}$, а тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{4-x^2}.$$

Найдем произведение

$$y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = 2 .$$

Тогда площадь поверхности $S = 2\pi\int_{-1}^1 2dx = 4\pi\int_{-1}^1 dx = 4\pi x\Big|_{-1}^1 = 8\pi.$

Вопросы для самопроверки по теме 3.4

1. Что называется определенным интегралом от данной функции?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла от неотрицательной непрерывной функции?
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о среднем, какой ее геометрический смысл?
5. Сформулируйте теорему Барроу, докажите ее.
6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница, приведите примеры.
7. Докажите основную теорему интегрального исчисления.
8. Как пересчитываются пределы интегрирования при вычислении определенных интегралов методом замены переменной?
9. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?
10. Какие приложения определенного интеграла Вы знаете?
11. Как вычислить площадь плоской фигуры в декартовых координатах?

3.5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Несобственные интегралы с бесконечными пределами.**
- **Несобственный интеграл от неограниченной функции.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №8. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 2, с. 57-61 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить задачу в соответствии со своим вариантом из № 151-160.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

При определении определенного интеграла предполагалось, **что промежуток интегрирования конечен и функция на этом промежутке ограничена.** Однако, исходя из теоретических и практических соображений, целесообразно обобщить понятие определенного интеграла на случай, когда указанные ограничения не выполняются.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$. Выберем произвольное число A из промежутка $[a,+\infty)$. Так как функция $f(x)$

непрерывна на промежутке $[a, A]$, то существует интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$, который зависит от выбранного значения *A*.

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ **по промежутку** $[a, +\infty)$ называется предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$$

и обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \tag{3.45}$$

Несобственный интеграл называется **сходящимся**, если указанный предел конечен, и **расходящимся**, если он равен бесконечности или не существует.

Факт сходимости интеграла записывается в виде неравенства

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty.$$

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, a]$ определяется аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx.$$

Наконец, несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется с помощью следующего равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$$

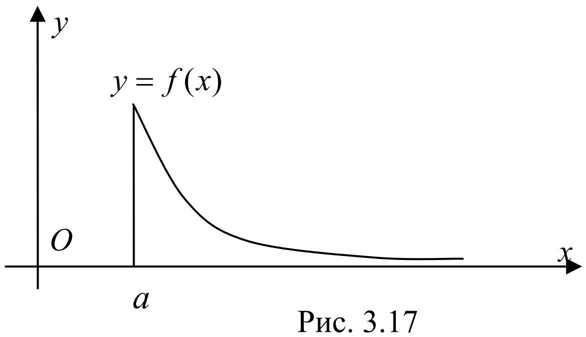


Рис. 3.17

где *a* - произвольное число.

Интеграл в левой части равенства считается **сходящимся**, если сходятся оба интеграла в правой части; если хотя бы один из этих интегралов расходится, то **расходится** и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Можно показать, что сходимость интеграла и его значение не зависят от выбора числа *a*.

Ниже рассматриваются несобственные интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, так как теория несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ аналогична.

С геометрической точки зрения несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ можно интерпретировать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ и простирающейся в бесконечность (рис. 3.17).

Если интеграл сходится, то этой трапеции приписывается конечная площадь, равная значению интеграла.

На несобственный интеграл может быть распространена формула Ньютона-Лейбница. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\left[F(A)-F(a)\right] = F(+\infty)-F(a),$$

где положено $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Пример. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Часто бывает достаточно лишь ответить на вопрос: сходится или расходится данный интеграл. Для этой цели существуют несколько признаков.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то он называется **неабсолютно (или условно) сходящимся.**

Теорема. *(*Признак сходимости*)*. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если он абсолютно сходится.

Теорема. Если на промежутке $[a,+\infty)$ функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, неотрицательны и $\varphi(x)\le f(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

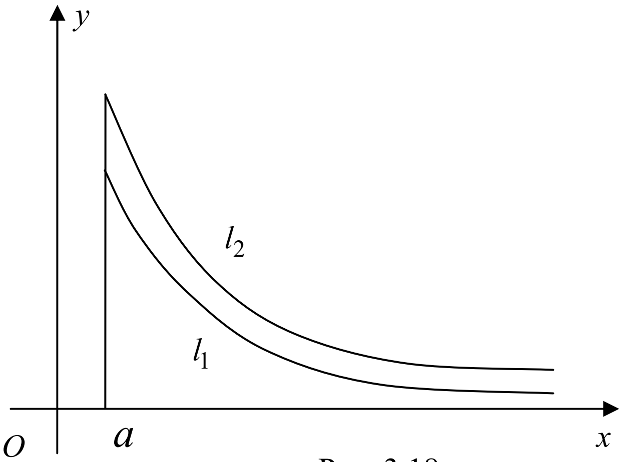


Рис. 3.18

Дадим данной теореме геометрическую иллюстрацию. Пусть l_1 и l_2 означают графики функций соответственно $\varphi(x)$ и $f(x)$ (рис. 3.18).

Так как $\varphi(x)\le f(x)$, то кривая l_1 расположена не выше кривой l_2. Очевидно, что если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то кривая l_2 ограничивает конечную площадь, тогда и кривая l_1 ограничивает конечную площадь, т.е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится. С другой стороны, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то криволинейная трапеция, ограниченная кривой l_1 не имеет конечной площади, а тогда и подавно криволинейная трапеция, ограниченная кривой l_2, не имеет конечной площади, а это и значит, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

Решение. Так как при всех рассматриваемых x выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2},$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится (см. пример выше), то данный интеграл сходится и притом абсолютно.

Несобственный интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, а в точке b неограничена, т.е. в этой точке она имеет бесконечный разрыв:

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty .$$

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ **по промежутку** $[a,b)$ называется предел

$$\lim_{A\to b-0} \int_a^A f(x)dx$$

и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to b-0} \int_a^A f(x)dx.$$

Несобственный интеграл называется **сходящимся**, если указанный предел конечен, и **расходящимся**, если он не существует или равен бесконечности.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(a,b]$, когда функция имеет бесконечный разрыв в точке a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to a+0} \int_A^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечные разрывы на обоих концах промежутка (a,b), то несобственный интеграл от нее определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где c - произвольная точка промежутка (a,b). Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ считается **сходящимся**, если сходятся оба несобственных интеграла в правой части. Выбор точки c в этом случае не имеет значения.

Теория несобственных интегралов по бесконечному промежутку аналогична теории несобственных интегралов от неограниченных функций.

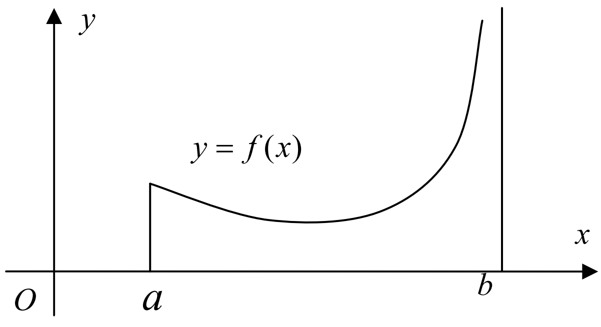


Рис. 3.19

С геометрической точки зрения несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции, неограниченной в точке b, можно интерпретировать как площадь криволинейной трапеции с верхней границей, простирающейся в бесконечность (рис. 3.19). Если интеграл сходится, то этой трапеции приписывается конечная площадь.

На несобственный интеграл от неограниченной функции распространяется формула Ньтона-Лейбница. Так, если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке $\left[a,b\right)$ (в точке b функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв), то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to b-0}\int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to b-0}\left[F(A)-F(a)\right] = F(b-0)-F(a),$$

где $F(b-0) = \lim\limits_{A\to b-0} F(A).$

Понятие абсолютной сходимости для несобственного интеграла от неограниченной функции определяется точно так же, как и для несобственного интеграла по бесконечному промежутку.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости интегралов по бесконечному промежутку.

Решение задач

Задача 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение. По определению (3.45) несобственный интеграл с бесконечным пределом равен

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx = -\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^b = -\left(0-1\right) = 1,$$

следовательно, интеграл сходится и равен 1.

Задача 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ или установить его расходимость.

Решение. По определению несобственный интеграл с бесконечным пределом равен

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\ln|\ln x|\Big\|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b-\ln\ln a\right) = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Задача 3. Используя признак сравнения, установить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$.

Решение. При $x \geq 1$ $x^2\left(1+3^x\right) \geq x^2$, следовательно $\dfrac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2} = 1$ (сходится) (см. задачу 1). Следовательно, на основании признака сравнения сходится и данный несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$ (и его значение меньше 1).

Задача 4. Используя признак сходимости, установить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^3} dx.$

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1,$ то $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right| \leq \dfrac{1}{x^3}$. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^3} dx.$ По определению этот интеграл равен:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{(-2)}\right)\Bigg|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x^2}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

интеграл сходится. Следовательно, на основании признак сравнения сходится и данный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^3} dx.$

Задача 5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ или установить его расходимость.

Решение. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна при $0 < x \leq 1$ и имеет единственный бесконечный разрыв в точке $x = 0.$ Поэтому, используя определения несобственного интеграла от неограниченной функции, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A\to 0+} \int\limits_A^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_A^1 = \lim_{A\to 0+}\left(2 - 2\sqrt{A}\right) = 2,$$

значит интеграл сходится и равен 2.

Задача 6. Используя признак сходимости, установить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^3 \dfrac{2+\cos x}{(x-1)^2} dx.$

Решение. Функция $\frac{2+\cos x}{(x-1)^2}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$. $2+\cos x \geq 1$ при любом значении x, поэтому $\frac{2+\cos x}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$. Исследуем несобственный интеграл

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{A\to 1+0}\int_A^3 (x-1)^{-2}d(x-1) = \lim_{A\to 1+0}\left.\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right|_A^3 = -\lim_{A\to 1+0}\left.\frac{1}{x-1}\right|_A^3 = -\lim_{A\to 1+0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{A-1}\right) = \infty,$$ с

ледовательно, интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходится, тогда по признаку сравнения и данный интеграл $\int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx$ расходится.

Вопросы для самопроверки по теме 3.5

1) Что называется несобственным интегралом по бесконечному промежутку?
2) Сформулируйте признак сравнения.
3) Что называется несобственным интегралом от неограниченных функций по конечному промежутку?
4) .Являются ли интегралы $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ и $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ несобственными?

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Данный раздел включает три темы:

- **4.1. Функции нескольких переменных.**
- **4.2. Дифференцирование функций нескольких переменных.**
- **4.3. Некоторые приложения частных производных.**

По каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие его примеры. В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров.

После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить три задачи из контрольной работы № 4 в соответствии со своим вариантом.

4.1. Функции нескольких переменных

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Евклидово n -мерное пространство.**
- **Окрестности. Области.**
- **Функции нескольких переменных.**
- **Предел функции нескольких переменных.**
- **Непрерывность функции нескольких переменных.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №9. При возникновениии вопросов следует обратиться к [3], глава 1, с. 3-11 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Евклидово n -мерное пространство

При изучении функций одной переменной было использовано взаимно-однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек числовой оси, что позволяло отождествить понятия «точка x на числовой оси» и «вещественное число x». При введении прямоугольной системы координат на плоскости и в пространстве устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством упорядоченных пар чисел и множеством точек плоскости, между множеством упорядоченных троек чисел и множеством точек трехмерного пространства. Это дает нам право говорить о паре чисел (x, y) - как о точке плоскости и о тройке чисел (x, y, z) - как о точке пространства.

По аналогии с предыдущим введем следующие определения.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных систем n вещественных чисел вида $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется n **-мерным пространством** (или **пространством n измерений**), а каждая система n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - **точкой этого пространства**.

Иногда это пространство называют **арифметическим или координатным** n -мерным пространством.

Точку n -мерного пространства будем обозначать одной буквой, например, $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ будем называть **координатами точки**.

Точку $O(0, 0, ..., 0)$ назовем **нулевой точкой** пространства.

Расстояние между двумя точками $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ n -мерного пространства определим с помощью формулы

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2}. \quad (4.1)$$

При $n=1,2,3$ пространство n измерений превращается соответственно в прямую, плоскость и обычное трехмерное пространство, а из равенства (4.1) при этих условиях получаются хорошо известные формулы для расстояний между двумя точками на прямой, плоскости и в трехмерном пространстве.

Определение. Пространство n измерений, в котором расстояние между двумя точками определено формулой (4.1), называется n- **мерным евклидовым пространством** и обозначается символом E^n.

Окрестности. Области

Пусть дана некоторая фиксированная точка $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathrm{E}^n$ и некоторое положительное число ε.

Определение. Множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства E^n, удаленных от точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ меньше чем на ε, называется ε- **окрестностью точки** M_0 и обозначается $R_\varepsilon(M_0)$.

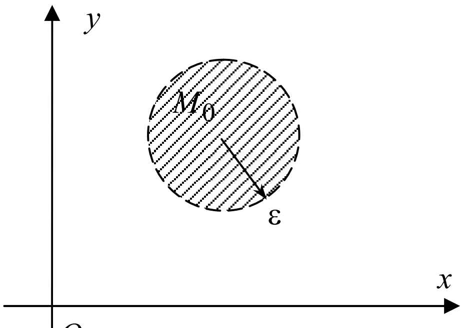


Рис. 4.1.

Таким образом, $M \in R_\varepsilon(M_0)$, если $\rho(M_0, M) < \varepsilon$.

При $n=1$, т.е. в случае прямой, имеем $M_0 = x_1^0 = x_0$, $M = x_1 = x$ и данное определение совпадает с введенным ранее для функции одной переменной: $R_\varepsilon(x_0)$ - множество точек прямой, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \varepsilon$, то есть открытый промежуток длины 2ε с серединой в точке x_0.

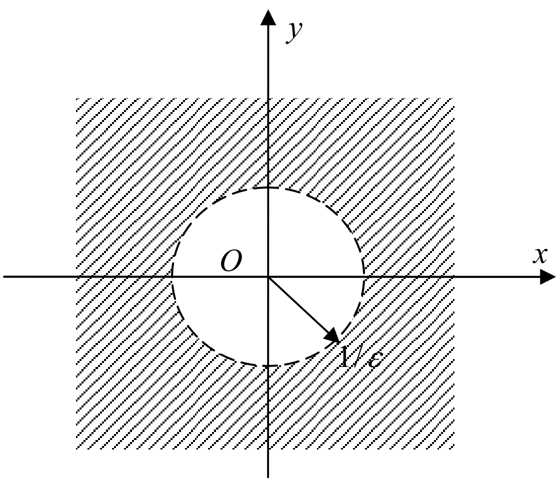


Рис. 4.2.

При $n=2$, т.е. в случае плоскости, имеем $M_0(x_1^0, x_2^0) = M_0(x_0, y_0)$, $M(x_1, x_2) = M(x, y)$, ε - окрестность точки $M_0(x_0, y_0) \in \mathrm{E}^2$ представляет множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

Геометрически - это множество точек, лежащих внутри окружности радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ (открытый круг) (рис. 4.1).

Для точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ трехмерного пространства $R_\varepsilon(M_0)$ - это множество точек пространства, лежащих внутри сферы радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (открытый шар).

По аналогии, множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ n - мерного пространства E^n, для которых $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, называют n - **мерным открытым шаром** с радиусом ε и центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Для n - мерного пространства $R_\varepsilon(M_0)$ - открытый шар.

Множество точек $M \in \mathrm{E}^n$, для которых $\rho(M_0, M) \le \varepsilon$, называют n - **мерным замкнутым шаром** (иногда просто шаром) с радиусом ε и центром в точке M_0.

Точки пространства E^n, определяемые упорядоченным набором n вещественных чисел, называют **конечными точками** этого пространства. Кроме конечных точек в E^n введем **бесконечную точку**, обозначив ее M_∞ или ∞. Эту точку введем с помощью определения ее ε - окрестности.

Определение. Множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства E^n, удаленных от нулевой точки $0(0, 0, ..., 0)$ более чем на $\frac{1}{\varepsilon}$, называется ε - **окрестностью точки** M_∞ и обозначается $R_\varepsilon(M_\infty)$.

Точка $M \in R_\varepsilon(M_\infty)$, если $\rho(0, M) > 1/\varepsilon$. На прямой, то есть при $n = 1$, $R_\varepsilon(\infty)$ - множество точек x, для которых $|x| > 1/\varepsilon$, и мы приходим к определению ε - окрестности точки ∞ на оси Ox.

На плоскости $(n = 2)$ условие $\rho(0, M) > \frac{1}{\varepsilon}$ принимает вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} > \frac{1}{\varepsilon} \text{ или } x^2 + y^2 > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

то есть ε - окрестностью бесконечной точки на плоскости будет множество точек, лежащих вне окружности радиуса $1/\varepsilon$ с центром в начале координат (рис.4.2).

В пространстве ($n = 3$)$R_\varepsilon(M_\infty)$ - множество точек пространства, лежащих вне сферы радиуса ε с центром в точке 0(0,0,0).

Понятие $R_\varepsilon(M)$ для $M \in \mathrm{E}^n$ используем при введении других определений.

Определение. Точка $M \in \mathrm{E}^n$ называется **внутренней точкой** множества $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$, если она принадлежит множеству E вместе с некоторой своей ε - окрестностью.

Из определения следует, что, если M - внутренняя точка множества Е, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $R_\varepsilon(M) \subset \mathrm{E}$.

Определение. Точка $M \in \mathrm{E}^n$ называется **граничной точкой** множества $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$, если любая ε - окрестность точки M содержит как точки принадлежащие, так и точки не принадлежащие Е.

Сама граничная точка может принадлежать или не принадлежать множеству Е.

Определение. Множество $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$ называется **открытым**, если все его точки являются внутренними.

Определение. Множество $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои внутренние и граничные точки; множество всех граничных точек множества $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$ называется его **границей** и обозначается $\partial \mathrm{E}$.

Определение. Множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства E^n, координаты которых заданы как непрерывные функции параметра $t: x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t), t \in T \subset R,$ называется **непрерывной кривой** в пространстве E^n.

Определение. Множество $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$ называется **связным**, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

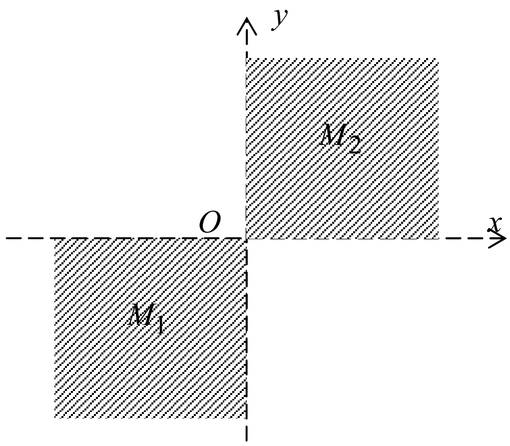


Рис. 4.3

Определение. Окрестностью точки $M_0 \in \mathrm{E}^n$ называется любое открытое связное множество точек E^n, содержащее саму точку M_0.

Часто между $R_\varepsilon(M_0)$ и $R(M_0)$ не делают различия, так как если существует $R_\varepsilon(M_0)$, то она и является $R(M_0)$, если же существует $R(M_0)$, то всегда можно подобрать такое ε, что $R_\varepsilon(M_0) \subset R(M_0)$.

Определение. Множество $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$ называется **ограниченным**, если существует n - мерный шар $R_r(0)$ радиуса r с центром в нулевой точке 0(0,0,...,0) такой, что $\mathrm{E} \subset R_r(0)$. В противном случае множество Е называется **неограниченным.**

Определение. Множество $D \subset \mathrm{E}^n$ называется **открытой областью**, если оно а) открытое и б) связное.

Определение. Замкнутой областью $\bar{D} \subset \mathrm{E}^n$ называется множество, которое получается в результате присоединения к открытой области D всей ее границы: $\bar{D} = D \cup \partial D.$

Замечание. Часто применяют и более общий термин - **область**, понимая под этим и открытую, и замкнутую области, а также множество, получающееся в результате присоединения к открытой области части ее границы.

Приведем несколько примеров.

1. Рассмотрим множество E точек плоскости $M(x,y) \in \mathrm{E}^2$, координаты которых удовлетворяют условию $x/y > 0$. Точки этого множества заполняют первый и третий квадранты плоскости Oxy, исключая оси координат (рис. 4.3). Это неограниченное открытое множество. Областью множество E не будет, так как оно не является связным; действительно, точки M_1 и M_2 нельзя соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей E (начало координат множеству E не принадлежит).

2. Пусть множество E - множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Это ограниченная замкнутая область в пространстве E^3.

Функции нескольких переменных

Пусть E - некоторое подмножество n - мерного пространства: $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$.

Определение. Если в силу некоторого закона каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{E}$ поставлено в соответствие определенное число u, то говорят, что на множестве E задана функция

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

точки M n-мерного пространства или функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

При этом множество E называют **множеством (областью) определения** функции $u = f(M)$.

В случае $n=1$ данное определение совпадает с определением числовой функции одной переменной $f(x)$. При $n=2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x,y)$, в случае $n=3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ - также $f(x,y,z)$.

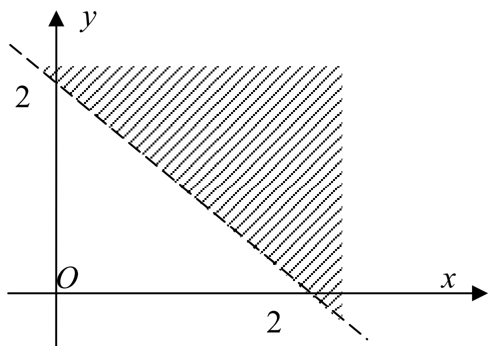


Рис. 4.4

Основной способ задания функций двух и более переменных - аналитический, то есть с помощью формул. Если нет каких-либо дополнительных условий, то областью определения функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ считается множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, для координат которых формула имеет смысл.

Пример. Рассмотрим формулу $z = \ln(x + y - 2)$. Она имеет смысл при $x + y - 2 > 0$ или $y > 2 - x$. Каждой точке $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют данному условию, формула ставит в соответствие определенное вещественное число z, то есть определяет z как функцию двух переменных x и y. Область определения функции есть множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > 2 - x$. Это все точки плоскости, которые лежат выше прямой $x + y = 2$ (рис. 4.4).

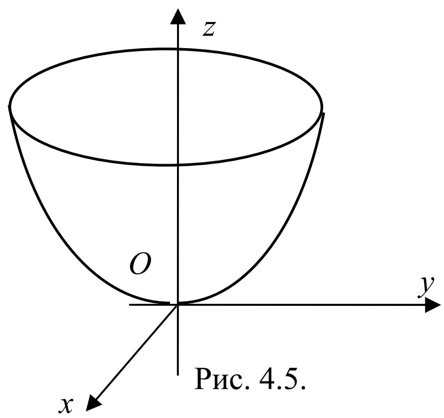


Рис. 4.5.

Функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет простую геометрическую интерпретацию. Каждую пару значений переменных x и y из области определения функции вместе с соответствующим значением z можно рассматривать как декартовы координаты некоторой точки $\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$ трехмерного пространства. Когда точка с координатами x и y пробегает все множество определения функции на плоскости Oxy, соответствующая ей точка $\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$ в пространстве будет описывать обычно некоторую поверхность. Эта поверхность и будет геометрическим образом (графиком) функции $z = f(x, y)$.

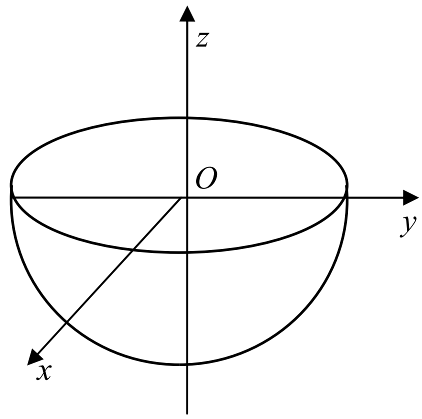


Рис. 4.6

Примеры.

1. Для функции $z = x^2 + y^2$ область определения - вся плоскость Oxy, график функции - параболоид вращения (рис. 4.5).

2. Функция $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \le 1$. Графиком ее является нижняя полусфера с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 4.6). Для наглядного геометрического изображения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ кроме трех координатных осей переменных x, y, z потребовалась бы еще четвертая ось для переменной u, что не может быть осуществлено в пределах трехмерного пространства.

Предел функции нескольких переменных

Рассматривая функцию n переменных как функцию точки n-мерного пространства, можно дать определение предела функции нескольких переменных аналогично тому, как это было дано для функции одной переменной.

Пусть функция $f(M)$, где $M \in \mathrm{E}^n$, определена в некоторой окрестности конечной или бесконечной точки $M_0 \in \mathrm{E}^n$, причем, если M_0 - конечная точка, то в самой этой точке функция может быть и не определена.

Определение. Если для любого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $M \in R_\delta(M_0) \subset \mathrm{E}^n$ $(M \neq M_0$, если M_0 - конечная точка) следует условие $f(M) \in R_\varepsilon(A) \subset \mathrm{E}^1$, то A **называется пределом функции** $f(M)$ **в точке** M_0 (или при M, стремящейся к M_0). При этом пишут

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{или} \quad f(M) \to A \quad \text{при} \quad M \to M_0.$$

Если A - число, то предел функции называется конечным, если же A равно $\pm\infty$ или ∞, то предел называется **бесконечным** или **несобственным**.

Для предела функции нескольких переменных справедливы теоремы, аналогичные по формулировкам и доказательствам соответствующим теоремам о пределах функции одного аргумента. Ограничимся формулировкой теоремы о конечных пределах.

Теорема. Если при $M \to M_0$ функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ стремятся каждая к конечному пределу, то

$$\lim_{M \to M_0} cf_1(M) = c \lim_{M \to M_0} f_1(M) \qquad (c = \text{const}),$$

$$\lim_{M \to M_0} [f_1(M) + f_2(M)] = \lim_{M \to M_0} f_1(M) + \lim_{M \to M_0} f_2(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} [f_1(M) \cdot f_2(M)] = \lim_{M \to M_0} f_1(M) \cdot \lim_{M \to M_0} f_2(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f_1(M)}{f_2(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)} \qquad (\lim_{M \to M_0} f_2(M) \neq 0).$$

Определение. Функция $u = f(M)$ называется **бесконечно малой в точке** M_0 (или при $M \to M_0$), если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = 0.$$

Как и для функции одной переменной, если функция $f(M)$ имеет в точке M_0 конечный предел A, то ее можно представить в виде

$$f(M) = A + \varphi(M),$$

где $\varphi(M)$ - бесконечно малая при $M \to M_0$.

Сравнение бесконечно малых функций нескольких переменных производится так же, как для бесконечно малых функций одной переменной.

Непрерывность функции нескольких переменных

Для функции нескольких переменных (как и для функции одной переменной) с понятием предела тесно связано понятие непрерывности. Пусть функция $f(M)$, где $M \in \mathrm{E}^n$, определена в некоторой окрестности конечной точки $M_0 \in \mathrm{E}^n$, включая и саму эту точку. Символом $f(M_0)$ обозначается значение функции $f(M)$ в точке M_0.

Определение. Функция $f(M)$ называется **непрерывной в точке** M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0), \tag{4.2}$$

причем точка M стремится к точке M_0 произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Равенство (4.2) означает, что предел функции $f(M)$ в точке M_0 существует, конечен и его величина совпадает со значением функции в этой точке.

Рассмотрим разность $f(M) - f(M_0)$. Назовем ее **полным приращением функции** $u = f(M)$ в точке M_0 и обозначим

$$\Delta u = f(M) - f(M_0). \tag{4.3}$$

Пусть $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Обозначим

$$x_1 - x_1^0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_2^0 = \Delta x_2, ..., x_n - x_n^0 = \Delta x_n. \tag{4.4}$$

Используя эти обозначения, получим для полного приращения функции Δu, соответствующего приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, следующее выражение:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0). \tag{4.5}$$

Очевидно, что

$$(M \to M_0) \Leftrightarrow (\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_n \to 0). \tag{4.6}$$

Теорема. Для того чтобы функция $u = f(M)$ была непрерывна в точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы полное приращение функции Δu стремилось к нулю при стремлении к нулю вызвавших его приращений аргументов.

Эта теорема позволяет дать другое определение непрерывности функции в точке, равносильное приведенному.

Определение. Функция $f(M)$ называется **непрерывной в точке** M_0, если в этой точке ее полное приращение стремится к нулю при стремлении к нулю приращений аргументов, вызвавших это приращение.

Следуя этому определению, можно сказать, что $f(M)$ непрерывна в некоторой точке, если малые изменения координат (приращений аргументов) вызывают сколь угодно малое изменение значений самой функции.

Определение. Функция $u = f(M)$, где $M \in \mathrm{E}^n$, называется **непрерывной в области** $D \subset \mathrm{E}^n$, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если в какой-то точке M функция $f(M)$ не является непрерывной, то говорят, что функция в этой точке терпит разрыв.

Точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и так далее.

Пример. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{1}{x + 2y - 2}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy кроме точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x + 2y - 2 = 0.$ Это уравнение прямой. Каждая точка прямой есть точка разрыва; все они образуют линию разрыва.

Непрерывные функции нескольких переменных обладают, по существу, теми же свойствами, что и непрерывные функции одной переменной. Сформулируем теорему о непрерывных функциях.

Теорема. Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ непрерывны в точке M_0, то в этой точке непрерывны и функции

$$cf_1(M) \quad (c = \text{const}), \quad f_1(M) + f_2(M), \quad f_1(M) \cdot f_2(M), \quad \frac{f_1(M)}{f_2(M)}$$

(последняя при условии, что $f_2(M_0) \neq 0$).

Ограниченная замкнутая область для функции нескольких переменных служит аналогом замкнутого промежутка для функции одной переменной.

Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то в этой области она ограничена; среди ее значений есть наибольшее и наименьшее; она принимает все значения от наименьшего до наибольшего.

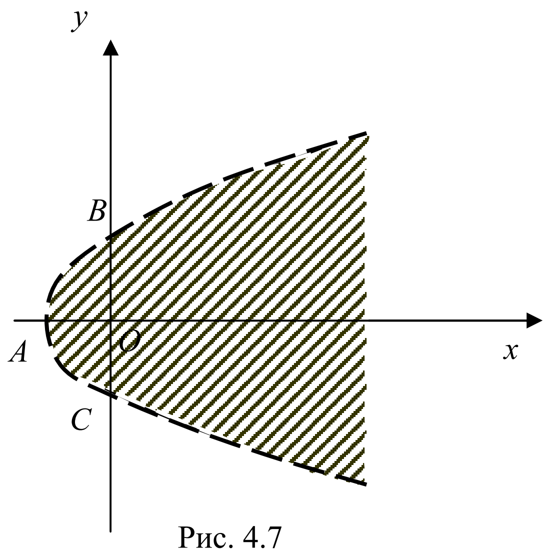


Рис. 4.7

Решение задач

Задача 1. Найти значение функции $U(A)=f(x,y,z)=\dfrac{2xy-z}{x^2+3y^2+z^2}$ в точке $A(1,0,-2)$.

Решение. Подставляя в выражение функции $x=1,\ \ y=0,\ \ z=-2,$ получим

$$U(A)=f(1,0,-2)=\frac{2\cdot 1\cdot 0-(-2)}{1^2+3\cdot 0^2+(-2)^2}=\frac{2}{5}.$$

Задача 2. Найти $f(-y,x),$ если $f(x,y)=x^2+y^2-3y.$

Решение. Выражение $f(-y,x)$ получим, заменяя x на $-y$ и y на x:

$$f(-y,x)=(-y)^2+x^2-3x=x^2+y^2-3x.$$

Задача 3. Найти и изобразить на рисунке область определения функции $z=\ln\left(1+x-y^2\right).$

Решение. Логарифм определен только при положительных значениях его аргумента, поэтому область определения функции D определяется неравенством $1+x-y^2>0$ или $y^2<x+1.$

Уравнение границы области $y^2=x+1.$ Это уравнение параболы, вершина которой находится в точке $A(-1,0)$, а ветви направлены в положительную сторону оси Ox. Ось Oy парабола пересекает в точках $B(0,1)$ и $C(0,-1)$.

Парабола делит плоскость на две части – внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Для точек одной из частей выполняется неравенство $y^2<x+1$, а для другой $y^2>x+1$.

Чтобы определить, какая часть является областью D, т.е. где выполняется условие $y^2<x+1$, нужно проверить выполнение этого условия для какой-нибудь одной точки, не лежащей на параболе.

Возьмем для простоты точку $O(0,0)$. Она лежит “внутри” параболы. Для нее удовлетворяется нужное условие $0<1\cdot 0+1$. Следовательно, точка $O(0,0)$ принадлежит области определения D и вся область состоит из внутренних “точек” параболы (заштрихована). Сама парабола (рис. 4.7)в область D не входит (изображена пунктиром).

Задача 4. Найти область определения функции $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x}.$ Определить, будет ли она ограниченным, замкнутым, односвязным множеством.

Решение. Корень квадратный определен только для неотрицательных значений аргумента. Следовательно, для координат точек области определения функции должны выполняться условия: $9-x^2-y^2 \geq 0$ и $x \geq 0$ или $x^2+y^2 \leq 9$ и $x \geq 0$.

Первое неравенство выполняется для точек, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 3, и точек, лежащих внутри окружности. Второе неравенство верно для точек оси Oy и точек, лежащих в правой полуплоскости.

Одновременно условия выполняются в точках правого полукруга и на его границах (правая часть полуокружности и отрезок Oy). Очевидно, что множество точек определения функции – ограниченное, замкнутое и односвязное (ограниченная замкнутая область).

Задача 5. Найти точки разрыва функции $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

Решение. Данная функция может иметь разрывы только в точках, где знаменатель равен нулю. Уравнение $(x-1)^2+(y+2)^2=0$ имеет одно решение $x=1,\ \ y=-2.$ Точка $(1,-2)$ - точка разрыва функции.

Задача 6. Исследовать на непрерывность функцию $z=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y\right)\left(x+2y\right)}$.

Решение. Эта функция может иметь разрывы только в точках, где знаменатель обращается в нуль. Решая уравнение $\left(x^2-y\right)\left(x+2y\right)=0$ относительно y, получаем $y=x^2$ и $y=\dfrac{-x}{2}.$ Следовательно, точками разрыва будут точки параболы $y=x^2$ и точки прямой $y=-\dfrac{1}{2}x.$ Функция имеет две линии разрыва.

Вопросы для самопроверки по теме 4.1

1. Дайте определение n -мерного евклидова пространства.
2. Дайте определение ε-окрестности точки. Приведите примеры ε-окрестности точки на плоскости и в пространстве.
3. Дайте определение внутренней и граничной точки множества.
4. Дайте определение открытой и замкнутой области.
5. Приведите примеры ограниченной замкнутой области на плоскости и в пространстве.
6. Дайте определение функции n переменных.
7. Дайте определение предела функции $f(M)$ в точке M_0. Когда предел называется конечным?
8. Дайте определение непрерывности функции в точке.

9. Вспомните свойства непрерывных функций одной переменной. Сформулируйте эти свойства для функций нескольких переменных.

4.2. Дифференцирование функций нескольких переменных

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Частные производные.**
- **Дифференцируемость функций нескольких переменных.**
- **Полный дифференциал.**
- **Дифференцирование сложной функции одной переменной. Полная производная.**
- **Дифференцирование сложной функции нескольких переменной. Инвариантность формы полного дифференциала.**
- **Дифференцирование неявных функций.**
- **Частные производные высших порядков.**
- **Полные дифференциалы высших порядков.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №10. При возникновениии вопросов следует обратиться к [3], глава 2, с.13-31 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить две задачи в соответствии со своим вариантом из № 171-180 и 181-190.

Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Будем считать, что она определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Придадим аргументу y постоянное значение $y = y_0$. Тогда функция $z = f(x, y_0)$ будет функцией одного переменного x. Зададим фиксированному значению x произвольное приращение Δx, но такое, чтобы $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in R(M_0)$. При этом функция получит приращение

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

которое называется **частным приращением** по переменной x в точке M_0.

Определение. Если при $\Delta x \to 0$ отношение $\Delta_x z / \Delta x$ стремится к конечному или бесконечному пределу, то этот предел называется **частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке** $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, f'_x(x_0, y_0) \text{ или } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}.$$

Итак, по определению,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение и частная производная функции $f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные называются **конечными или бесконечными** в зависимости от того, конечен (равен числу) или бесконечен соответствующий предел.

Значение частной производной зависит от точки $M(x, y)$, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, есть функция точки $M(x, y)$, то есть является функцией двух переменных x и y. Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются одним из следующих символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ или } f'_x(x, y), f'_y(x, y);\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ или } z'_x, z'_y.$$

Все, сказанное о частных производных функции двух переменных, с надлежащими изменениями распространяется и на функции любого числа переменных.

Так как при отыскании частных производных функций нескольких переменных все переменные, кроме той, по которой производится дифференцирование, считаются постоянными (фиксированными), то правила и формулы дифференцирования функций одной переменной остаются в силе и при отыскании частных производных функций нескольких переменных.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^3 y^2 - 3x^2 + 7y.$$

Решение. Заданная функция есть функция двух переменных x и y. При дифференцировании по x, то есть при нахождении z'_x, полагаем, что $y = \text{const}$. Поэтому

$$z'_x = (x^3 y^2 - 3x^2 + 7y)'_x = 3x^2 y^2 - 6x + 0 = 3x^2 y^2 - 6x.$$

Аналогично

$$z'_y = (x^3 y^2 - 3x^2 + 7y)'_y = 2x^3 y - 0 + 7 = 2x^3 y + 7.$$

Пример 2. Найти частную производную функции $u = \ln(x^2 + 2y\sqrt{z})$ по переменной z в точке $A(-1; 1; 4)$.

Решение. При дифференцировании по переменной z, считая $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\ln(x^2 + 2y\sqrt{z}))'_z = \frac{1}{x^2 + 2y\sqrt{z}}(x^2 + 2y\sqrt{z})'_z = \frac{1}{x^2 + 2y\sqrt{z}} \cdot 2y\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{y}{x^2\sqrt{z} + 2yz}.$$

Теперь находим значение частной производной в точке $A(-1;1;4)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = \frac{1}{(-1)^2\sqrt{4} + 2\cdot 1\cdot 4} = \frac{1}{10}.$$

Выясним **геометрический смысл частных производных функции двух переменных**.

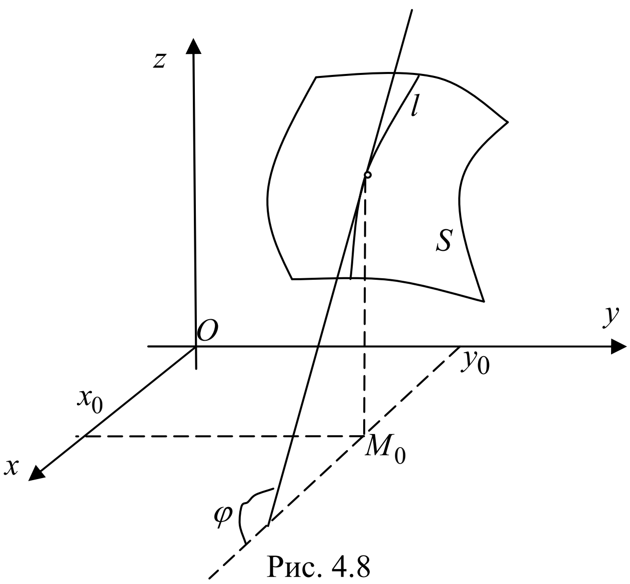


Рис. 4.8

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D и ее геометрическим образом служит поверхность S (рис. 4.8).

Возьмем точку $M_0(x_0, y_0) \in D$. При $y = y_0$ функция $z = f(x, y_0)$ будет функцией одной переменной x. Графиком этой функции будет кривая l, полученная при пересечении поверхности S плоскостью $y = y_0$.

Если при $x = x_0$ существует касательная к кривой l (лежащая в плоскости $y = y_0$), то тангенс угла φ наклона этой касательной (к оси Ox) и будет численно равен значению $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке M_0. В этом и заключается геометрический смысл частной производной по переменной y.

Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной по переменной y.

Дифференцируемость функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Зададим в этой точке произвольные приращения аргументам $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, но такие, чтобы точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y) \in R(M)$. При этом функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(M_1) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ **называется дифференцируемой в точке** $M(x, y)$, если ее полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{4.7}$$

где A и B не зависят от Δx и Δy, а $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0.$

Необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то в этой точке существуют конечные частные производные по переменным x и y, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B. \tag{4.8}$$

Заметим, что A и B не зависят от Δx и Δy, но зависят от x и y, то есть выбора точки $M(x, y)$.

В случае функции одной переменной $y = f(x)$ представимость приращения функции Δy в виде суммы $f(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, обеспечивается одним фактом существования конечной производной $f'(x)$ в рассматриваемой точке x. Если же мы имеем дело с функцией двух (или большего числа переменных), то только существование конечных частных производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ уже недостаточно для того, чтобы полное приращение Δz можно было представить в точке $M(x, y)$ в виде (4.7), то есть чтобы функция была дифференцируема в точке $M(x, y)$.

Достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных дает следующая теорема.

Теорема. Если в точке $M(x, y)$ функция $z = f(x, y)$ обладает непрерывными частными производными $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

Для функции двух (и более) переменных, как и для функции одной переменной, имеет место теорема о непрерывности дифференцируемой функции.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из (4.7) следует, что $\lim\limits_{M_1 \to M} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$ а это и означает непрерывность функции в точке $M(x, y)$.

В заключение отметим, что изложение велось для функции двух переменных только для краткости записей. Все сказанное без существенных изменений распространяется на функции любого конечного числа переменных.

Так, функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x, y, z)$, если ее полное приращение Δu можно представить в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z, \tag{4.9}$$

где A, B, C не зависят от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, а $\alpha \to 0, \beta \to 0, \gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0.$

Необходимое условие дифференцируемости в точке функции любого числа переменных – существование конечных частных производных, достаточное – существование непрерывных частных производных в этой точке.

Полный дифференциал

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то есть выполняется условие (4.7). С учетом (4.8) полное приращение функции можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{4.10}$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ - частные производные в точке $M(x, y)$ и $\alpha \to 0,\ \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$

Определение. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то ее **полным дифференциалом** в этой точке называется выражение

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,$$

которое обозначают dz или $df(x, y)$.

Как и для функции одной переменной, если x и y независимые переменные, то принимается по определению, что $\Delta x \equiv dx, \quad \Delta y \equiv dy,$ и принято записывать

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4.11}$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = y^2\sqrt{2 - x^2}$ в точке $M_0(1; 2)$.

Решение. Найдем сначала выражение для полного дифференциала в точке $M(x, y)$ по формуле (4.11). Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{-xy^2}{\sqrt{2-x^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\sqrt{2-x^2},$$

то

$$dz = -\frac{xy^2}{\sqrt{2-x^2}}dx + 2y\sqrt{2-x^2}dy.$$

В точке M_0 имеем

$$dz\Big|_{M_0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} dy = -\frac{1\cdot 2^2}{\sqrt{2-1^2}}dx + 2\cdot 2\sqrt{2-1^2}dy = -4dx + 4dy.$$

При рассмотрении полного дифференциала необходимо обратить внимание на следующее.

1. Из определения следует, что полный дифференциал (в дальнейшем - просто дифференциал) представляет собой ту часть приращения функции, которая пропорциональна приращениям аргументов (линейна относительно Δx и Δy).

2. Разность между приращением и дифференциалом функции

$$\Delta z - dz = \alpha\Delta x + \beta\Delta y \tag{4.12}$$

есть бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (расстоянием между исходной точкой $M(x, y)$ и смещенной точкой $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$) при $\rho \to 0$.

На основании этого дифференциал называют **главной** (линейной) частью приращения функции.

Дифференциал имеет более простую зависимость от приращения аргументов по сравнению с приращением функции и сколь угодно мало от него отличается при достаточно малых значениях ρ. Это дает возможность заменять приращение функции ее дифференциалом при приближенных вычислениях.

Все сказанное о дифференциале функции двух переменных легко обобщается на случай трех и более переменных. Так, например, формула (4.11) для дифференциала функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ примет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{4.13}$$

Дифференцирование сложной функции одной переменной. Полная производная

Определение. Функция нескольких переменных называется **сложной**, если сами аргументы - функции одной или нескольких переменных.

Пусть, например, $z = f(x, y)$ - функция от переменных x и y, где

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

- функции аргумента t. Тогда сложная функция z от t может быть записана так:

$$z = f[x(t), y(t)]$$

и продифференцирована как функция одной переменной.

Если функция $z = f\left(x, y\right)$ дифференцируемая в точке $M\left(x, y\right)$, а функции $x = x\left(t\right)$ и $y = y\left(t\right)$ дифференцируемы при соответствующем значении t, то имеет место формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (4.14)$$

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = xe^{y}$, где $x = t^{2} + 1$, а $y = \operatorname{arctg} t$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{y}, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^{2}}.$$

Подставляя найденные выражения в (4.14), получаем

$$\frac{dz}{dt} = e^{y} \cdot 2t + xe^{y}\frac{1}{1+t^{2}} = e^{y}\left(2t + \frac{x}{1+t^{2}}\right) = e^{\operatorname{arctg} t}(2t+1).$$

Аналогично рассмотренному выше решается вопрос о производной $\frac{du}{dt}$, когда функция u задается как дифференцируемая функция любого числа переменных, каждая из которых, в свою очередь, есть дифференцируемая функция переменной t.

Так, если $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (4.15)$$

Рассмотрим случай, когда независимая переменная t явно входит в выражение функции. Пусть $u = f(x, y, z, t)$,
где по-прежнему $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Распространяя формулу (4.15) на случай функции четырех аргументов x, y, z, t, запишем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (4.16)$$

Производную $\frac{du}{dt}$ в формуле (4.16) называют **полной производной**, в отличие от частной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Пример. Найти частную производную $\frac{\partial u}{\partial t}$, и полную производную $\frac{du}{dt}$ функции $u = x^2 + y^2 z^2 + t^2$, где $x = \sin t, y = \cos t, z = e^t$.

Решение. Найдем сначала частную производную $\frac{\partial u}{\partial t}$, считая x, y и z постоянными: $\frac{\partial u}{\partial t} = 2t$.

Так как функция u зависит от t как непосредственно, так и через x, y, z, то для вычисления полной производной воспользуемся формулой (4.16).

Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2y^2 z;$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t; \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t; \quad \frac{dz}{dt} = e^t.$$

Подставляя в формулу (4.16), получаем

$$\frac{du}{dt} = 2x\cos t + 2yz^2(-\sin t) + 2y^2 z e^t + 2t$$

или

$$\frac{du}{dt} = 2\sin t\cos t + 2\cos t e^{2t}(-\sin t) + 2\cos^2 t e^{2t} + 2t = \sin 2t - e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos^2 t + 2t.$$

Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы полного дифференциала

Пусть $z = f(x, y)$ и

$$x = x(s,t), \qquad y = y(s,t),$$

то есть являются функциями двух переменных s и t.

Тогда функция

$$z = f(x, y) = f[x(s,t), y(s,t)]$$

будет сложной функцией от s и t.

Если одной из переменных, скажем, t, придается какое-либо постоянное значение, то z становится функцией (сложной) только переменной s, и ее производная по этой переменной (в данном случае, частная производная) вычисляется по формуле (4.14), но с заменой всех простых производных частными

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}. \tag{4.17}$$

Так же вычисляется частная производная $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (4.18)$$

С помощью аналогичных рассуждений легко получить формулы для сложных функций произвольного числа переменных.

Дифференциал функции одной переменной обладает **свойством инвариантности формы**: она остается одной и той же вне зависимости от того, будет ли аргумент независимой переменной или некоторой дифференцируемой функцией другой переменной.

Это свойство инвариантности формы дифференциала, играющее важную роль в ряде вопросов математического анализа, справедливо и для функций нескольких переменных.

Дифференцирование неявных функций

Определение. Функция y аргумента x называется **неявной**, если она задана уравнением вида

$$F(x,y)=0,$$

связывающим x и y, но не разрешенным относительно y.

Однако не всякое уравнение вида $F\left(x,y\right)=0$ определяет неявную функцию. Например, уравнение $x^2+y^2+1=0$ никакой функции не определяет, так как $x^2+y^2+1>0$ для любых значений x и y.

Возникает задача о нахождении условий, накладываемых на функцию двух переменных $F(x,y)$, при которых уравнение определяет неявную функцию $y=y(x)$.

Достаточные условия существования, единственности и дифференцируемости неявной функции, заданной уравнением $F(x,y)=0$, содержатся в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в окрестности точки (x_0,y_0) и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$, причем $F(x,y)=0$,, а $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда существует некоторая окрестность точки (x_0,y_0), в которой:

1. уравнение $F(x,y)=0$ определяет единственную непрерывную функцию $y=y(x)$;
2. при $x=x_0$ эта функция принимает значение $y_0: y(x_0)=y_0$;
3. функция $y=y(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную.

Геометрически это означает, что существует окрестность точки (x_0,y_0), в которой кривая, заданная уравнением $F(x,y)=0$, представляет собой график непрерывной и непрерывно-дифференцируемой функции $y = y(x)$, проходящий через точку (x_0, y_0).

Производную при этом можно найти по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}. \tag{4.19}$$

Пример. Функция $y = y(x)$ задана уравнением $x^2 + y^3 + e^{xy} = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. В условиях задачи уже предполагается, что данное уравнение определяет неявную дифференцируемую функцию $y(x)$. (Студент самостоятельно может проверить выполнение условий приведенной выше теоремы, например в окрестности точки $(0, -1)$). Остается только воспользоваться формулой (4.19).

В нашем случае

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^3 + e^{xy}, \quad F_x'(x, y) = 2x + ye^{xy}, \quad F_y'(x, y) = 3y^2 + xe^{xy};$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + ye^{xy}}{3y^2 + xe^{xy}}.$$

Неявным образом могут быть заданы функции двух и более переменных.

Если неявная функция двух переменных $z = z(x, y)$ определяется уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

то частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ этой функции можно найти по следующим формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}. \tag{4.20}$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 + y^2 = 4xz + 1$.

Решение. Полный дифференциал функции $z = z(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ по формулам (4.20). Для этого перенесем все члены уравнения в левую часть и обозначим $F(x,y,z) \equiv z^3 + y^2 - 4xz - 1$. Так как

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 4x,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-4z}{3z^2 - 4x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 - 4x}.$$

Теперь

$$dz = \frac{4z}{3z^2 - 4x}dx - \frac{2y}{3z^2 - 4x}dy.$$

Частные производные высших порядков

Частные производные $f_x'(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ функции $z = f(x,y)$, называемые **частными производными первого порядка**, в свою очередь, будут некоторыми функциями переменных x и y. Если последние сами обладают частными производными, то эти частные производные называются **частными производными второго порядка для функции** $f(x,y)$. При этом используют обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x,y).$$

Частные производные от частных производных второго порядка называются **частными производными третьего порядка**. Вообще, если некоторая функция $z = f(x,y)$ допускает n-кратное частное дифференцирование по своим аргументам в каком-либо определенном порядке, то получается **частная производная n-го порядка**. Например, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}$ обозначает результат n-кратного последовательного дифференцирования функции z по аргументу x, то есть частную производную n-го порядка от z по x.

Частная производная, полученная дифференцированием по нескольким различным аргументам, называется **смешанной частной производной**.

Всего указанным образом можно получить 2^n частных производных порядка n от функции $f(x,y)$. В действительности число **различных** производных какоголибо определенного порядка оказывается значительно меньше. Справедлива следующая важная **теорема о смешанных частных производных**.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ обладает в некоторой точке непрерывными частными производными $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$, то эти производные равны одна другой в рассматриваемой точке:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогичная теорема о независимости смешанной частной производной от порядка дифференцирования справедлива для частных производных любого порядка. Поэтому обозначение частной производной для таких функций указывает только число дифференцирований по каждой переменной, а порядок, в котором производятся эти дифференцирования, на результат не влияет. Так, через $\partial^n z / \partial x^k \partial y^l$ обозначается частная производная порядка n для функции $z = f(x, y)$, причем по x выполняется дифференцирование k раз, а по $y - l$ раз (здесь, конечно, $k + l = n$).

Сказанное справедливо и для функции произвольного числа аргументов. Например, для функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ через $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}$ обозначается частная производная пятого порядка, получаемая двукратным дифференцированием по x, двукратным - по y и однократным – по z.

Пример 1. Найти вторые частные производные функции $z = \ln(x + y^2)$. Убедиться, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение. Находим сначала частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, получим вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x + y^2}\right)'_x = \frac{-1}{(x + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x + y^2}\right)'_y = \frac{-2y}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x + y^2}\right)'_x = \frac{-2y}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x + y^2}\right)'_y = \frac{2(x + y^2) - 2y2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}.$$

Очевидно, что смешанные производные равны.

Пример 2. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \cos xy$.

Решение. Находим сначала частную производную по x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin xy.$$

Далее ищем вторую частную производную по x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-y \sin xy)'_x = -y^2 \cos xy.$$

Теперь

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (-y^2 \cos xy)'_y = -2y \cos xy + xy^2 \sin xy.$$

Полные дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой области $D \subset \mathrm{E}^n$ и точка $M_0 \in D$.

Определение. Функция n переменных $f(M)$ называется m **раз дифференцируемой в точке** M_0, если в этой точке дифференцируемы она сама и все ее частные производные до $(m-1)$-го порядка включительно.

Определение. Функция n переменных $f(M)$ называется m **раз дифференцируемой в открытой области** $D \subset \mathrm{E}^n$, если она m раз дифференцируема в каждой точке области.

Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y),$$

где x и y - независимые переменные. Если эта функция дифференцируема, то ее полный дифференциал имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где $dx \equiv \Delta x, dy \equiv \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, то есть произвольные числа, не зависящие от x и y. На этом основании будем изменять x и y, зафиксировав dx и dy (то есть оставляя их постоянными). Тогда dz станет функцией двух переменных x и y.

Если функция z дифференцируема два раза (то есть она дифференцируема вместе со своими частными производными), то и ее полный дифференциал dz будет дифференцируемой функцией и в свою очередь будет иметь полный дифференциал. Полный дифференциал от полного дифференциала функции называется **полным дифференциалом** (дифференциалом) **второго порядка** функции и обозначается $d(dz) = d^2 z = d^2 f(x, y)$. Найдем его

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy.$$

После преобразований, считая, что $\partial^2 z / \partial x \partial y = \partial^2 z / \partial y \partial x,$ получим

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \qquad (4.21)$$

Пример. Найти d^2z для функции $z = e^x \cos y$ в точке $M_0\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Находим первые и вторые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y.$$

По формуле (4.21)

$$d^2z = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dxdy - e^x \cos y dy^2.$$

Теперь

$$d^2z\,|_{M_0} = d^2z\left(0;\frac{\pi}{2}\right) = e^0 \cos\frac{\pi}{2}dx^2 - 2e^0 \sin\frac{\pi}{2}dxdy - e^0 \cos\frac{\pi}{2}dy^2 = -2dxdy.$$

Если функция z дифференцируема трижды (т. е. дифференцируема вместе со своими частными производными до второго порядка включительно), то d^2z будет дифференцируемой функцией, а ее полный дифференциал называется **полным дифференциалом третьего порядка** функции z. Обозначение $d(d^2z) = d^3z.$

Аналогично предыдущему можно показать, что

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (4.22)$$

Для формул (4.21) и (4.22) удобна следующая символическая запись:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \quad d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Здесь символы $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$ рассматриваются как «множители», и формула бинома Ньютона с последующим условным умножением на z приводит соответственно к формулам (4.21) и (4.22).

Вообще, если функция z дифференцируема m раз, то **полный дифференциал** m **-го порядка** этой функции определяется равенством

$$d^m z = d(d^{m-1}z).$$

Методом математической индукции доказывается, что для любого m справедлива формула

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{dy} dy \right)^m z.$$

Если аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ не независимы, а являются функциями некоторой переменной t, то $dx = x_t^{'} dt$ и $dy = y_t^{'} dt$ тоже будут функциями t (их нельзя считать постоянными). Выражения для полных дифференциалов высших порядков такой функции z (сложной функции) будут отличаться от полученных. Следовательно, полные **дифференциалы высших порядков свойством инвариантности формы по отношению к аргументам не обладают.**

Все сказанное о дифференциалах высших порядков для функции двух переменных легко обобщается и на функции большого числа переменных. Так, например, для функции $u = f(x, y, z)$ трех независимых переменных полный дифференциал n-ого порядка находится с помощью формулы

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u. \tag{4.23}$$

Пример. Найти $d^2 u$, если $u = xy^2 z$.

Решение. При $n = 2$ из (4.23) имеем

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y} dy^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Находим первые частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2.$$

Теперь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xz, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yz, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2xy.$$

Окончательно

$$d^2 y = 2xzdy^2 + 4yzdxdy + 2y^2 dxdz + 4xydydz.$$

Решение задач

Задача 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{x^2 y+1}$.

Решение.

Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^2 y+1}\right)'_x = e^{x^2 y+1}\left(x^2 y+1\right)'_x = e^{x^2 y+1} 2xy = 2xye^{x^2 y+1}$. Вычисляя $\left(x^2 y+1\right)'_x$, воспользовались тем, что при нахождении частной производной по x переменная y считается постоянной. Аналогично, полагая переменную x постоянной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^2 y+1}\right)'_y = e^{x^2 y+1}\left(x^2 y+1\right)'_y = e^{x^2 y+1} x^2 = x^2 e^{x^2 y+1}.$$

Задача 2. Найти z'_x и z'_y функции $z = x^2 y \ln y$.

Решение. Находим z'_x, считаем y величиной постоянной. Выносим $y \ln y$ за знак производной и получаем $z'_x = y \ln y \left(x^2\right)' = 2xy \ln y$. При нахождении z'_y за знак производной выносим x^2 и $y \ln y$, дифференцируем как произведение функций: $z'_y = x^2 \left(y \cdot \ln y\right)' = x^2 \left(1 \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y}\right) = x^2 \left(\ln y + 1\right)$.

Задача 3. Найти частную производную по z от функции трех переменных $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{xz}$ в точке $M_0(2,1,-1)$.

Решение. Считая x и y, а, следовательно, и $\frac{y}{x}$ постоянными и учитывая правила дифференцирования сложной функции одной переменной, получим:
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2} \cdot \frac{y}{x}\left(\frac{1}{z}\right)'_z = \frac{x^2 z^2}{x^2 z^2 + y^2} \cdot \frac{y}{x}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{xy}{x^2 z^2 + y^2}.$$

Вычислим значение $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -\frac{2 \cdot 1}{2^2 \left(-1\right)^2 + 1^2} = -\frac{2}{5}$.

Задача 4. Найти полный дифференциал функции $z = \sin(2x - y)$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то ее полный дифференциал находится по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$ Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x - y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(2x - y).$ Подставляя в формулу, получим $dz = 2\cos(2x - y)dx - \cos(2x - y)dy.$

Находим значение dz в точке M_0. Получим
$$dz\Big|_{M_0} = 2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)dx - \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)dy = 2\cos\frac{\pi}{3}dx - \cos\frac{\pi}{3}dy = 2\cdot\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy = dx - \frac{1}{2}dy.$$

Задача 5. Найти все частные производные второго порядка для функции $z = x^2y^3 + e^x \sin y.$

Решение. Чтобы найти частные производные второго порядка, сначала нужно найти частные производные первого порядка. В нашей задаче $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + e^x \sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + e^x \cos y.$ Теперь находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xy^3 + e^x \sin y\right)'_x = 2y^3 + e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3x^2y^2 + e^x \cos y\right)'_y = 6x^2y - e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2xy^3 + e^x \sin y\right)'_y = 6xy^2 + e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(3x^2y^2 + e^x \cos y\right)'_x = 6y^2 + e^x \cos y.$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, что и следовало ожидать, так как если смешанные частные производные непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 6. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$ для функции $u = x^3 \mathrm{tg}(y - 2z)$.

Решение. Сначала находим $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \mathrm{tg}(y - 2z)$. Далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \left(3x^2 \mathrm{tg}(y - 2z)\right)'_z = \frac{3x^2(-2)}{\cos^2(y - 2z)} = \frac{-6x^2}{\cos^2(y - 2z)}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \left(\frac{-6x^2}{\cos^2(y - 2z)}\right)'_z = -\frac{-6x^2 \cdot 2\cos(y - 2z)\cdot\left(-\sin(y - 2z)\right)(-2)}{\cos^4(y - 2z)}.$$

После преобразований получаем ответ: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \dfrac{24x^2 \sin(y-2z)}{\cos^3(y-2z)}.$

Задача 7. Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $\cos\left(x-y^2\right) = 4x\left(y+1\right)$, и его выражение в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Решение. Дифференциал функции $y(x)$ (как функции одной переменной) равен $dy = y'(x)dx.$ Найдем $y'(x)$ функции, заданной неявно, по формуле (4.19). Для этого запишем уравнение в виде $F(x,y) \equiv \cos\left(x-y^2\right) - 4x(y+1) = 0.$ Тогда

$$F'_x(x,y) = -\sin\left(x-y^2\right) - 4(y+1);$$

$$F'_y(x,y) = -\sin\left(x-y^2\right)\cdot(-2y) - 4x;$$

$$dy = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\cdot dx = -\frac{-\sin\left(x-y^2\right)-4(y+1)}{2y\sin\left(x-y^2\right)-4x}dx = \frac{\sin\left(x-y^2\right)+4(y+1)}{2y\sin\left(x-y^2\right)-4x}dx.$$

В точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ имеем $F'_x(M_0) = -\sin\dfrac{\pi}{2} - 4 = -5;$ $F'_y(M_0) = -2\pi$ и ответ $dy(M_0) = -\dfrac{5}{2\pi}dx.$

Вопросы для самопроверки по теме 4.2

1. Дайте определение частной производной функции двух переменных. Каков ее геометрический смысл?
2. Какая функция называется дифференцируемой? Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции.
3. Что называется полным дифференциалом функции? Приведите выражение полного дифференциала для функции двух и трех переменных.
4. Может ли одна и та же функция иметь полную производную и частную производную?
5. В чем заключается свойство инвариантности полного дифференциала?
6. Когда уравнение $F(x,y)=0$ задает неявную функцию $y = y(x)$?
7. Какие частные производные называются частными производными второго порядка? Когда смешанные и частные производные не зависят от порядка дифференцирования?
8. Что называется дифференциалом второго порядка? Как найти дифференциал второго порядка для функции двух переменных?

4.3. Некоторые приложения частных производных

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Экстремумы функции нескольких переменных.**
- **Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.**
- **Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.**
- **Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №11.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 3, с. 37-46 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить задачу в соответствии со своим вариантом из № 191-200.

Экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой области $D \subset \mathrm{E}^n$ и точка M_0 является внутренней точкой этой области.

Определения:

1. Точка M_0 называется **точкой строгого максимума функции** $f(M)$, если существует окрестность $R_\varepsilon(M_0)$ этой точки такая, что для любой точки $M \in R_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

2. Точка M_0 называется **точкой строгого минимума функции** $f(M)$, если существует окрестность $R_\varepsilon(M_0)$ этой точки такая, что для любой точки $M \in R_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$.

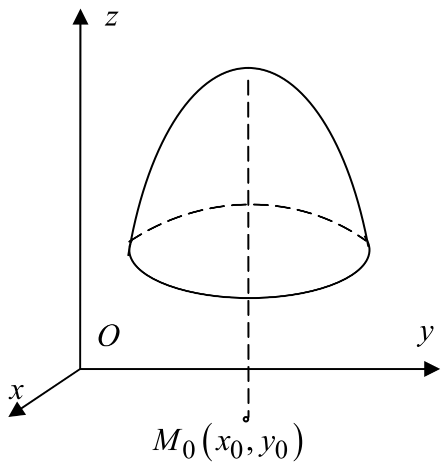


Рис. 4.9

В дальнейшем эти точки будем называть соответственно точками максимума и минимума.

Значения функции $f(M)$ в точках ее максимума и минимума называются соответственно **максимумом** и **минимумом** этой функции и обозначаются через $\max f(M)$ или $\min f(M)$.

Следовательно, в точке максимума функция $f(M)$ принимает значение наибольшее, а в точке минимума - наименьшее. В "удаленных" точках функция может принимать значения, как превосходящие значение в точке максимума, так и значения, меньшие, чем в точке минимума. Следовательно, речь идет о максимумах и минимумах (экстремумах), которые имеют местный характер. Поэтому их называют **локальными экстремумами**.

Для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$, которая графически изображается некоторой поверхностью в пространстве, на рис. 4.9 изображен случай, когда в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет максимум, а на рис. 4.10 - минимум.

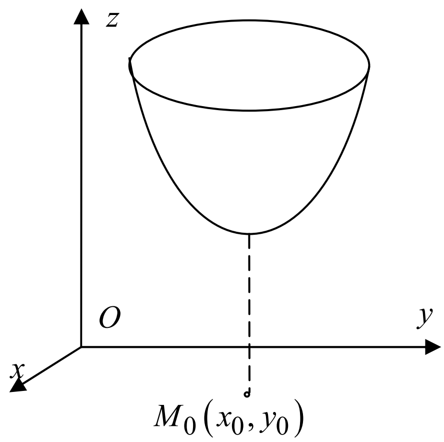


Рис 4.10

Найдем **необходимое условие экстремума** для дифференцируемой функции нескольких переменных. Рассмотрим функцию двух переменных

$$z = f(x, y). \qquad (4.24)$$

Пусть эта функция дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке экстремум. Так как функция дифференцируема в точке M_0, то она обладает в этой точке конечными частными производными

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Предположим, что экстремум – максимум. Тогда, в силу определения, будем иметь

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \qquad (4.25)$$

для всех точек $M(x, y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0, y_0)$; в частности, для всех x, достаточно близких к x_0. Отсюда следует, что функция $f(x, y_0)$ одного только переменного x имеет в точке x_0 максимум. Но тогда по необходимому условию экстремума функции одной переменной

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Из (4.25) также следует и неравенство $f(x_0, y) < f(x_0, y_0)$, справедливое для всех y, достаточно близких к y_0. Следовательно, функция $f(x_0, y)$ одного только переменного y имеет в точке y_0 максимум. Но тогда и $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой минимума функции.

Итак, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция (4.24) имеет экстремум, то обе частные производные функции в этой точке обращаются в нуль:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Аналогичный результат имеет место и для функции любого числа переменных. Таким образом, имеет место следующая теорема, содержащая **необходимое условие экстремума**.

Теорема. Если функция $f(M)$, $M \in E^n$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке экстремум, то все частные производные первого порядка функции в этой точке обращаются в нуль, иначе говоря, обращается в нуль полный дифференциал первого порядка функции.

Обратная теорема не имеет места; не всякая точка, в которой обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции **(стационарная точка),** будет экстремальной точкой этой функции.

Сформулируем **достаточные условия экстремума функции двух переменных**.

Будем предполагать, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, причем

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

то есть точка M_0 является стационарной точкой. Введем обозначения

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и рассмотрим выражение $\Delta = AC - B^2$. Можно показать, что:

1) Если $\Delta = AC - B^2 > 0, A < 0,$ то точка $M_0(x_0, y_0)$ - точка максимума функции.
2) Если $\Delta = AC - B^2 > 0, A > 0,$ то точка $M_0(x_0, y_0)$ - точка минимума функции.
3) При $\Delta = AC - B^2 < 0$ точка $M_0(x_0, y_0)$ не является экстремальной.
4) При $\Delta = AC - B^2 = 0$ вопрос о наличии экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ остается открытым.

Пример. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^2 - 6xy$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6x.$$

Используя необходимое условие экстремума, ищем стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y - 3x = 0. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = 0, y_1 = 0$ и $x_2 = 6, y_2 = 18.$ Следовательно, точки $M_1(0;0)$ и $M_2(6;18)$ - стационарные точки. Чтобы определить, будет ли функция иметь в этих точках экстремумы, используем достаточные условия экстремума. Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

и вычисляем их значения в стационарных точках. Для точки $M_1(0;0)$ имеем

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -6, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 2.$$

Отсюда $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 2 - (-6)^2 = -36 < 0$, и, следовательно, в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

Для точки $M_2(6;18)$

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 36, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -6, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 2.$$

Находим $\Delta = AC - B^2 = 36 \cdot 2 - (-6)^2 = 36 > 0.$ Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то точка M_2 является точкой минимума функции:

$$\min z = z(M_2) = 6^3 + 18^2 - 6 \cdot 6 \cdot 18 = -108.$$

Функция одного аргумента может иметь экстремум не только в точках дифференцируемости, но и в точках, где эта функция не дифференцируема, но обладает свойством непрерывности. Также и функция нескольких аргументов может иметь экстремумы не только в точках дифференцируемости, но и в точках, где функция не дифференцируема (например, в точках, где обращаются в бесконечность частные производные функции первого порядка), но непрерывна.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Пусть функция $u = f(M)$ определена и непрерывна в некоторой области $D \subset \mathrm{E}^n$. Если эта область не является ограниченной и замкнутой, то среди значений функции в ней может не быть ни наибольшего, ни наименьшего. Факт наличия или отсутствия наибольшего и наименьшего значений функции в этом случае устанавливается из рассмотрения конкретных условий задачи.

Если установлено, что функция имеет наибольшее или наименьшее значение и это значение достигается во внутренней точке области D, то в этой точке функция $f(M)$ будет иметь экстремум. Следовательно, найдя все экстремальные точки, лежащие внутри области D, и сравнив между собой значения функции в этих точках, мы найдем искомое наибольшее или наименьшее значение функции.

Пусть теперь область $\bar{D}$ - ограниченная и замкнутая. Тогда среди значений функции $f(M)$ заведомо имеются и наибольшие, и наименьшие. Для отыскания их в этом случае следует найти все экстремумы функции, лежащие внутри D, и наименьшие и наибольшие значения на границе. Наибольшее и наименьшее из всех этих значений и будут искомыми.

Остановимся подробнее на случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, исследуемой в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в открытой области D, то нахождение экстремумов в этой области производится, как изложено в предыдущем пункте. Поскольку все экстремумы функции находятся среди ее значений в стационарных точках, то часто проще не исследовать на экстремум эти точки, а найти значения во всех стационарных точках, принадлежащих D, и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

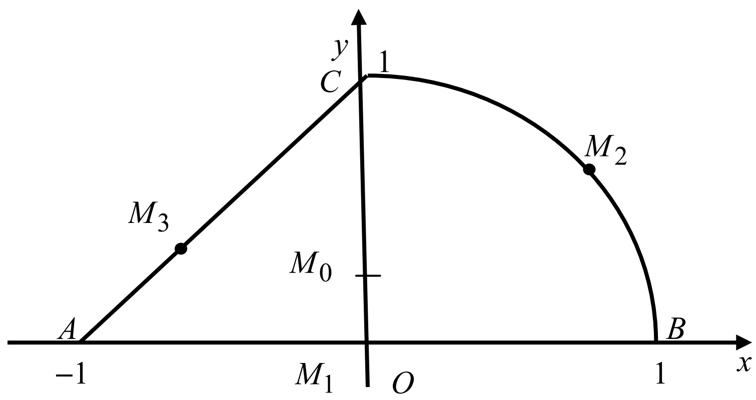


Рис 4.11

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на границе области для функции двух переменных, как правило, сводится к известной задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z = 2x^2 + 4y^2 - y + \frac{1}{16}$ в области $\bar{D}: x \le 1 - y^2, x - y \ge -1, y \ge 0.$

Решение. Сделаем рисунок области $\bar{D}$. Границами ее будут парабола $y^2 = -(x-1)$ с вершиной в точке $B(1,0)$ и прямые $x - y = -1$ и $y = 0$ (рис. 4.11).

Так как область ограниченная и замкнутая, то наибольшее и наименьшее значения функция может принимать либо в точках экстремума внутри области, либо на границе.

1. Исследуем внутренние точки области. Ищем стационарные точки внутри области D. Для этого находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 8y - 1.$$

Приравнивая частные производные нулю, получаем систему

$$\begin{cases} 4x = 0, \\ 8y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $x=0, y=\frac{1}{8}$. Стационарная точка $M_0\left(0;\frac{1}{8}\right)\in D$. Значение функции в стационарной точке $z(M_0)=0$.

2. Исследуем функцию на границе области, которая состоит из трех участков.

а) Участок границы AB - отрезок прямой $y=0$, при этом $-1\le x\le 1$. На прямой $y=0$ исследуемая функция $z=z(x,y)$ принимает вид $z(x,0)=2x^2+\frac{1}{16}$, то есть становится функцией одной переменной x.

Наибольшее и наименьшее значения эта функция (как функция одной переменной) принимает в стационарных точках внутри промежутка $[-1;1]$ или в граничных точках, $x=-1$ и $x=1$. Ищем стационарные точки: $z'_x(x,0)=4x, 4x=0, x=0$. Стационарная точка одна: $x=0$, она принадлежит исследуемому промежутку $(-1;1)$. Находим значения функции в стационарной точке $M_1(0;0)$ и граничных точках $A(-1;0)$ и $B(1;0)$

$$z=(M_1)=\frac{1}{16},\quad z(A)=z(B)=2\frac{1}{16}.$$

б) Участок границы BC - часть параболы $x=1-y^2$ при $0\le y\le 1$. Функция $z=z(x,y)$ на линии BC принимает вид

$$z=z(1-y^2,y)=2(1-y^2)^2+4y^2-y+\frac{1}{16}=2y^4-y+2\frac{1}{16}.$$

Теперь

$$z'_y(1-y^2,y)=8y^3-1;\quad 8y^3-1=0;\quad y=\frac{1}{2}\in(0,1).$$

Если $y=\frac{1}{2}$, то $x=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$. Стационарная точка на BC - точка $M_2\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$. Значения функции в точке M_2 и в граничной точке C находим из $z=2y^4-y+2\frac{1}{16}$, получаем $z(M_2)=1\frac{11}{16}, z(C)=3\frac{1}{16}$.

в) Уравнение прямой, которой принадлежит отрезок $AC: x-y=-1$. Выразим из этого уравнения x через y (можно и y через x) $x=y-1,\ \ 0\le y\le 1$ и подставим в выражение для z

$$z=z(y-1,y)=2(y-1)^2+4y^2-y+\frac{1}{16}=6y^2-5y+2\frac{1}{16}.$$

Далее

$$z'_y(y-1,y)=12y-5,\quad 12y-5=0,\quad y=\frac{5}{12}\in(0;1),$$

при этом

$$x=\frac{5}{12}-1=-\frac{7}{12}, \quad z(M_3)=z\left(-\frac{7}{12};\frac{5}{12}\right)=1\frac{1}{48}.$$

В граничных точках A и C значения функции уже найдены.

3. Таким образом, найдены все точки, в которых функция может иметь наибольшее и наименьшее значения: $M_0, M_1, M_2, M_3, A, B, C$.

Сравнивая значения функции в этих точках, приходим к заключению, что данная функция z в области $\bar{D}$ имеет наименьшее значение в точке M_0, а наибольшее в точке C.

Итак,

$$z_{\text{наим}} = z(M_0) = 0, \quad z_{\text{наиб}} = z(C) = 3\frac{1}{16}.$$

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

До сих пор мы искали экстремумы функции нескольких переменных, не накладывая на точки экстремума никаких ограничений и считая только, что эти точки должны быть внутренними по отношению к некоторой области D (D является либо всем множеством определения функции, либо какой-нибудь его частью). Такие экстремумы называются **безусловными**. Однако часто приходится отыскивать точки экстремума функции

$$z=f(x,y), \tag{4.26}$$

лежащие внутри некоторой области D, при дополнительном условии вида

$$g(x,y)=0, \tag{4.27}$$

где $g(x,y)$ - заданная функция в области D.

Такие экстремумы называются **условными**.

В случае условного экстремума аргументы x и y функции (4.26) уже нельзя рассматривать как независимые переменные, ибо они связаны друг с другом уравнением (4.27), называемым **уравнением связи**. Это уравнение определяет в области D некоторую линию l. Таким образом, геометрически в задаче условного экстремума отыскиваются экстремумы функции (4.26) не среди всех значений, принимаемых этой функцией в области D, а только среди значений, принимаемых ею в точках некоторой линии l, лежащей в D.

Можно показать, что отыскание условного экстремума функции (4.26) можно свести к отысканию безусловного экстремума некоторой другой функции.

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y), \tag{4.28}$$

Эту функцию называют **функцией Лагранжа**. При этом λ, пока неизвестный коэффициент, называют **множителем Лагранжа**.

Необходимые условия существования экстремума функции Лагранжа - равенство нулю всех частных производных:

$$\begin{cases} \Phi'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ \Phi'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

совпадают с необходимыми условиями существования условного экстремума функции (4.26) при уравнении связи (4.27).

Из решения системы (4.29) находятся точки, которые могут быть точками условного экстремума функции (4.26) при уравнении связи (4.27). Будут ли эти точки на самом деле точками условного экстремума, решается с помощью достаточных условий, но их касаться мы не будем. В некоторых случаях этот вопрос может быть решен на основе анализа условий задачи.

Пример. Найти точки условного экстремума функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Система уравнений (4.29) в примере имеет вид

$$\begin{cases} \Phi'_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \Phi'_y(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений находим

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda}.$$

Подставляя эти значения для x и y в третье уравнение, получим

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5 \text{ или } \lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, имеем два решения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -1, \quad y_1 = -2 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2$$

Поскольку геометрическим образом функции $z = x + 2y$ является плоскость, а $x^2 + y^2 = 5$ - уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{5}$, нетрудно убедиться, что в точке $M_1(-1,-2)$ данная функция имеет условный минимум, а в точке $M_2(1,2)$ - условный максимум.

Вопросы для самопроверки по теме 4.3

1. Дайте определения точек максимума и минимума функции нескольких переменных. В каких точках функция двух переменных может иметь экстремум?
2. Когда стационарная точка функции двух переменных будет точкой минимума функции?
3. В какой области и какая функция всегда имеет наименьшее и наибольшее значение?
4. В каких точках ограниченной замкнутой области дифференцируемая функция двух переменных может иметь наименьшее и наибольшее значения?
5. Когда экстремум функции нескольких переменных называется условным?

4.4. Дифференциальная геометрия поверхностей

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Касательная плоскость.**
- **Нормальный вектор.**
- **Нормаль к поверхности.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест №11.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 3, с. 44-48 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

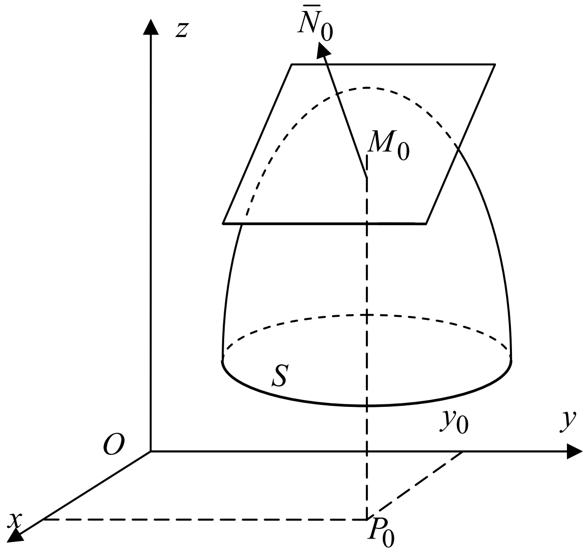


Рис 4.12

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

Возьмем на поверхности S точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и проведем через нее касательную плоскость и нормаль к поверхности (рис. 4.12).

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 имеет вид

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot$$

$$\cdot (y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot (z-z_0) = 0,$$

а канонические уравнения нормали

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в случае ее явного задания уравнением $z=f(x,y)$ будут

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\left(x-x_0\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1},$$

где точка $P_0(x_0,y_0,0)$ - проекция точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на плоскость Oxy.

Пример. Написать уравнения нормали и касательной плоскости к эллипсоиду

$$x^2+4y^2+8z^2=33$$

в точке $M_0(1;0;2)$.

Решение. Перенося все члены уравнения поверхности в левую часть, получим уравнение $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=x^2+4y^2+8z^2-33.$

Находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=8y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=16z.$$

Вычислим их значения в точке $M_0(1;0;2)$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=0,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=32.$$

Подставив значения производных и координаты точки в уравнения нормали, получим

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{32}.$$

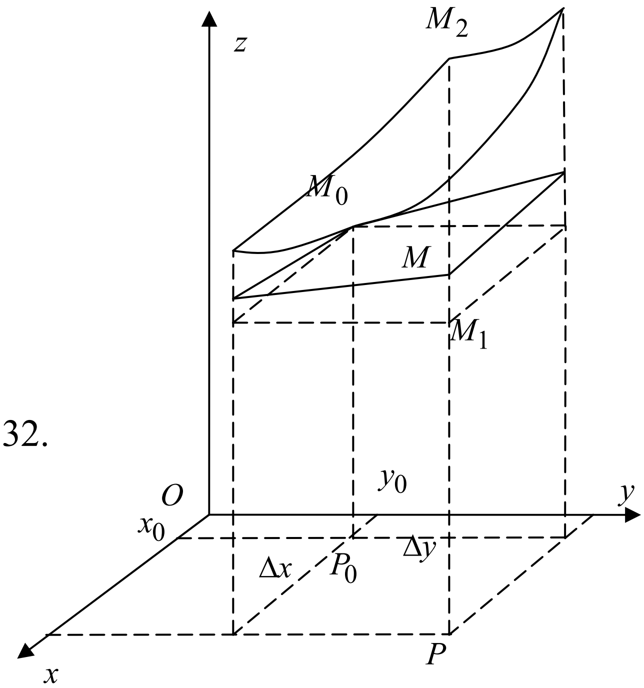


Рис 4.13

Подставив соответствующие значения в уравнение касательной плоскости, будем иметь $2(x-1)+32(z-2)=0$ или $x+16z-33=0.$

При помощи касательной плоскости можно дать **геометричекую интерпретацию полного дифференциала** функции $z = f(x, y)$ в данной точке (рис. 4.13).

Рассматривая разности $x - x_0$ и $y - y_0$ как приращения Δx и Δy координат x и y, из уравнения касательной плоскости $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$ находим

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y.$$

Правая часть этого равенства представляет собой не что иное, как полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$. Следовательно $dz|_{P_0} = z - z_0$. Здесь z - координата точки M на касательной плоскости, две другие координаты которой равны x и y. Таким образом, **полный дифференциал** $dz|_{P_0}$ **геометрически изображается** отрезком M_1M, который является **приращением аппликаты касательной плоскости**, проведенной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Отрезок M_1M_2 изображает полное приращение $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ той же функции.

Приведенная геометрическая интерпретация полного дифференциала позволяет составить наглядное суждение о том, что для малых приращений Δx и Δy величина полного приращения функции может быть с большой степенью точности заменена величиной полного дифференциала.

Вопросы для самопроверки по теме 4.4

1. Сформулируйте определение нормального вектора $\vec{N}_0$ к поверхности S, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0 \in S$.
2. Какая прямая называется нормалью к поверхности S в точке M_0?
3. Напишите канонические уравнения нормали к поверхности S, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
4. Дайте определение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0.
5. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
6. Напишите уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности S в случае явного задания поверхности S уравнением $z = f(x, y)$.
7. Напишите уравнения нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности S, если она задана уравнением $z = f(x, y)$.

8. В чем состоит геометрический смысл полного дифференциала?

4.5. Основы функционального анализа

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Нормированное пространство.**
- **Метрическое пространство.**
- **Топологическое пространство.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 3, с. 58-64 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Вопросы для самопроверки по теме 4.5

1. Сформулируйте определение нормы элемента линейного пространства.
2. Дайте определение нормированного пространства.
3. Приведите примеры норм в евклидовом векторном пространстве E^n.
4. Дайте определение пространства $C\left[a,b\right]$.
5. Дайте определение метрики и метрического пространства.
6. Всякое ли нормированное пространство является метрическим?
7. Приведите примеры метрических пространств.
8. Дайте определение топологического пространства.
9. Дайте определение окрестности точки в топологическом пространстве.
10. Всякое ли метрическое пространство является топологическим?
11. Сформулируйте аксиому отделимости Хаусдорфа.

Заключение

Изложенный в опорном конспекте лекций учебный материал послужит основой для изучения не только последующих разделов математики, но и остальных технических дисциплин.

3.3. УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Полное изложение материала, представленного кратко в опорном конспекте, содержится в учебных пособиях [1], [2], [3].

3.4. ГЛОССАРИЙ

Алгебраическая форма комплексного числа (*a;b*) – выражение $a+bi$, где число a – вещественная часть комплексного числа, а число b - мнимая часть этого числа.

Алгебраические действия – действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональным показателем.

Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции $y=f(x)$, когда точка $M(x,f(x))$ «стремится по графику в бесконечность».

Вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, заданная уравнением $x=a$, если либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, либо $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty$, либо $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\infty$.

Выпуклой вверх (выпуклой) на промежутке X называется кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$, если она целиком лежит под касательной, проведенной к ней в любой точке этого промежутка.

Выпуклой вниз (вогнутой) на промежутке X называется кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$, если она целиком лежит над касательной, проведенной к ней в любой точке этого промежутка.

Горизонтальной асимптотой называется асимптота, задаваемая уравнением $y=b$.

Граница множества: Множество всех граничных точек множества $\mathrm{E}\subset\mathrm{E}^n$ называется его **границей** и обозначается $\partial\mathrm{E}$.

График функции двух переменных $z=f(x,y)$**:** Множество точек трехмерного пространства с координатами $(x,y,f(x,y))$, когда точка с координатами x и y пробегает все множество определения функции на плоскости Oxy.

Дифференциал второго порядка: Полный дифференциал от полного дифференциала функции $z=z(x,y)$ называется **полным дифференциалом** (дифференциалом) **второго порядка** функции $z=z(x,y)$ и обозначается

$$d(dz)=d^2z=d^2f(x,y). \qquad d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Дифференциал полный функций: Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то ее **полным дифференциалом** в этой точке называется выражение $\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$ которое обозначают dz или $df(x,y)$.

Достаточное условие наличия экстремума в критической точке x_0 функции $f(x)$ состоит в перемене знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x_0.

Дробная рациональная функция – частное от деления двух целых рациональных функций.

Иррациональная функция – явная алгебраическая функция, для получения значений которой нужно проделать над аргументом и действие извлечения корня.

Комплексная плоскость – плоскость, изображающая множество комплексных чисел.

Критическими точками функции $f(x)$ называются точки, где либо $f'(x)=0$, либо $f'(x)=\infty$, либо $f'(x)$ не существует, при условии, что в двух последних случаях функция непрерывна в соответствующей точке.

Максимум функции $f(M)$: Значение функции в точке максимума.

Метод интегрирования по частям удобно применять для некоторых типов интегралов; формула интегрирования по частям имеет вид $\int udv = uv - \int vdu$.

Типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kxdx,\ \int P(x)\cos kxdx,$ где $P(x)$ - многочлен степени n, k - число.
2. Интегралы вида $\int P_n(x)\text{arcsin}xdx,\ \int P_n(x)\text{arccos}xdx,\ \int P_n(x)\ln xdx,$ $\int P_n(x)\text{arctg}xdx,\ \int P_n(x)\text{arcctg}xdx$.
3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx,\ \int e^{ax}\cos bxdx,$ где a и b - числа.

Метод непосредственного интегрирования состоит в тождественном преобразовании подынтегральной функции, в использовании свойств неопределенных интегралов и таблицы основных интегралов.

Метод подстановки (замены переменной) заключается в том, что с помощью специальным образом подобранной замены переменной интегрирования данное подынтегральное выражение преобразуется к другому подынтегральному выражению, которое является более простым в смысле интегрирования.

Минимум функции $f(M)$: Значение функции в точке минимума.

Многочленом Маклорена для функции $f(x)$ называется многочлен Тейлора для этой функции при $a=0$:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Многочленом Тейлора для функции $f(x)$ называется многочлен

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

где $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку a, и имеет там все производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

Множество замкнутое: Множество $\mathrm{E}\subset\mathrm{E}^n$ называется **замкнутым,** если оно содержит все свои внутренние и граничные точки.

Множество комплексных чисел – множество всевозможных пар вещественных чисел $(a;b)$, для которых равенство $(a;b)=(c;d)$ определяется условиями $a=c,\ b=d,$ а операции сложения и умножения определяются соответственно по формулам $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$, $(a;b)\cdot(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$.

Множество ограниченное: Множество $\mathrm{E}\subset\mathrm{E}^n$ называется **ограниченным,** если существует n-мерный шар $R_r(0)$ радиуса r с центром в нулевой точке 0(0,0,...,0) такой, что $\mathrm{E}\subset R_r(0)$. В противном случае множество E называется **неограниченным.**

Множество открытое: Множество $\mathrm{E}\subset\mathrm{E}^n$ называется **открытым,** если все его точки являются внутренними.

Множество связное: Множество $\mathrm{E}\subset\mathrm{E}^n$ называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$).

Неопределенностью соответствующего типа $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$ называется результат формальной подстановки в выражение для $f(x)$ вместо x предельного значения a при вычислении $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных, т.е. выражение вида $F(x)+C$, где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$. Обозначается неопределенный интеграл символом $\int f(x)dx$. Таким образом, $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(a;+\infty]$ и обозначаемым символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty;a]$ и обозначаемым символом $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется предел $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(a;b]$ и обозначаемым $\int\limits_a^b f(x)dx$, когда функция имеет бесконечный разрыв в точке a, называется предел $\lim\limits_{A\to a+0}\int\limits_A^b f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{A\to a+0}\int\limits_A^b f(x)dx$.

Область замкнутая: Замкнутой областью $\bar{D}\subset \mathrm{E}^n$ называется множество, которое получается в результате присоединения к открытой области D всей ее границы: $\bar{D} = D\cup\partial D.$

Область открытая: Множество $D\subset \mathrm{E}^n$ называется открытой областью, если оно а) открытое и б) связное.

Окрестность точки: Окрестностью точки $M_0 \in \mathrm{E}^n$ называется любое открытое связное множество точек E^n, содержащее саму точку M_0.

Множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства E^n, удаленных от точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ меньше чем на ε, называется ε-окрестностью точки M_0 и обозначается $R_\varepsilon(M_0)$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначаемым $\int_a^b f(x)dx$ называется предел интегральной суммы (суммы Римана), т.е. выражение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k$.

Основная теорема алгебры – всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n > 0$ имеет, по крайней мере, один корень – вещественный или комплексный.

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c \in (a,x)$.

Остаточным членом называется разность значений данной функции и ее многочлена Тейлора: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Первообразной функцией от функции $f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Правило Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и состоит в том, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности, кроме может быть самой точки a; $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (или $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$); и существует $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ конечный или бесконечный.

Предел функции: Если для любого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $M \in R_\delta(M_0) \subset \mathrm{E}^n$ ($M \neq M_0$, если M_0 - конечная точка) следует условие $f(M) \in R_\varepsilon(A) \subset \mathrm{E}^1$, то A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (или при M, стремящейся к M_0.) При этом пишут $\lim_{M \to M_0} f(M) = A$ или $f(M) \to A$ при $M \to M_0$. Предел **конечный,** если A - число, предел **бесконечный** или **несобственный,** если A равно $\pm\infty$ или ∞.

Производная частная второго порядка: Производные от частных производных функции $z = f(x, y)$ называются производными второго порядка для функции $z = f(x, y)$. При этом используют обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Производная частная смешанная: Частная производная, полученная дифференцированием по нескольким различным аргументам, называется смешанной частной производной.

Производная частная: Если при $\Delta x \to 0$ отношение $\Delta_x z / \Delta x$ стремится к конечному или бесконечному пределу, то этот предел называется частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение и частная производная функции $f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные называются **конечными** или **бесконечными** в зависимости от того, конечен (равен числу) или бесконечен соответствующий предел.

Простейшая дробь второго типа – рациональная дробь вида $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l}$, где M, N, p, q - любые вещественные числа при условии, что квадратичный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, а l - любое натуральное число.

Простейшая дробь первого типа – рациональная дробь вида $\dfrac{A}{(x - c)^k}$, где A и c - любые вещественные числа, k - любое натуральное число.

Пространство евклидово: Пространство n измерений, в котором расстояние между двумя точками определено формулой $\rho(M_0, M) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$, называется n- мерным евклидовым пространством и обозначается символом E^n.

Пространство n-мерное: Множество всевозможных упорядоченных систем n вещественных чисел вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерным пространством (или пространством n измерений), а каждая система n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - точкой этого пространства.

Раскрытием неопределенности называется вычисление предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если в результате формальной подстановки в выражение для $f(x)$ вместо x предельного значения a получается неопределенность соответствующего типа.

Расстояние: Расстояние $\rho(M_0, M)$ между двумя точками $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ n-мерного пространства определяется с помощью формулы $\rho(M_0, M) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Свойство 2. Постоянный множитель k подынтегральной функции можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Свойство 3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx.$$

Свойство 4 (инвариантность формул интегрирования). Всякая формула интегрирования справедлива независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или любой допустимой непрерывно дифференцируемой функцией независимой переменной, т.е. если справедливо равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то справедливо равенство

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = u(x)$ - любая допустимая непрерывно дифференцируемая функция аргумента x.

Сопряженное комплексное числу $a + bi$ - комплексное число $a - bi$.

Теорема Безу – при делении многочлена $P_n(x)$ степени n на разность $x - c$, где c - произвольное число, получается остаток, равный значению многочлена при $x = c$, т.е. $P_n(c)$.

Теоремами о средних значениях называются теоремы Ферма, Ролля, Коши, а также формула Лагранжа.

Точка внутренняя: Точка $M \in \mathrm{E}^n$ называется внутренней точкой множества $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$, если она принадлежит E вместе с некоторой своей ε - окрестностью.

Точка граничная: Точка $M \in \mathrm{E}^n$ называется граничной точкой множества $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}^n$, если любая ε - окрестность точки M содержит как точки, принадлежащие, так и точки, не принадлежащие E. Сама граничная точка может принадлежать или не принадлежать множеству E.

Точка строгого максимума: Точка M_0 называется точкой строгого максимума функции $f(M)$, если существует окрестность $R_\varepsilon(M_0)$ этой точки, такая, что для любой точки $M \in R_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Точка строгого минимума: Точка M_0 называется точкой строгого минимума функции $f(M)$, если существует окрестность $R_\varepsilon(M_0)$ этой точки, такая, что для любой точки $M \in R_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$.

Точками острого экстремума функции $f(x)$ называются точки экстремума, в которых функция $f(x)$ не является дифференцируемой, и $f'(x) = \infty$ либо $f'(x)$ не определена.

Точкой возврата называется точка острого экстремума функции $f(x)$, в которой $f'(x) = \infty$.

Точкой гладкого экстремума функции $f(x)$ называется точка экстремума, в которой $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ равна нулю.

Точкой максимума (строгого) функции $f(x)$ называется точка x_0, если существует окрестность X этой точки такая, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точкой минимума (строгого) функции $f(x)$ называется точка x_0, если существует окрестность X этой точки такая, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точкой перегиба функции $y = f(x)$, или графика этой функции, называется общая граничная точка промежутков выпуклости вверх и выпуклости вниз этой функции.

Точкой экстремума (экстремальной точкой функции $f(x)$) называется общая граничная точка промежутка возрастания и убывания.

Тригонометрическая форма комплексного числа z - представление этого числа в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где неотрицательное число r называется модулем комплексного числа z, а угол φ - аргументом этого числа.

Угловой точкой называется точка острого экстремума функции $f(x)$, в которой $f'(x)$ не определена.

Формула Муавра – формула для возведения комплексного числа в целую положительную степень $\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Формула Ньютона-Лейбница – Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и $\Phi(x)$ - ее любая первообразная на этом промежутке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Формулой конечных приращений или формулой Лагранжа называется формула

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Формулой Коши называется формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), $c \in (a,b)$.

Формулой Маклорена называется частный случай формулы Тейлора при $a=0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $c \in (0,x)$.

Формулой Тейлора $(n+1)$-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ называется формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c \in (0,x)$.

Функция n **переменных:** Если в силу некоторого закона каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{E}$ поставлено в соответствие определенное число u, то говорят, что на множестве E задана функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ точки M n-мерного пространства или функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Функция дифференцируемая: Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение Δz можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где A и B от Δx и Δy не зависят, а $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Функция непрерывная в точке:

1) Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, причем точка M стремится к точке M_0 произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

2) Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если в этой точке ее полное приращение стремится к нулю при стремлении к нулю приращений аргументов, вызвавших это приращение.

Функция неявная: Функция y аргумента x называется неявной, если она задана уравнением вида $F(x, y) = 0$, связывающим x и y, но не разрешенным относительно y. Неявная функция двух переменных $z = z(x, y)$ определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Функция сложная: Функция нескольких переменных называется сложной, если сами аргументы - функции одной или нескольких переменных.

Целая рациональная функция – алгебраический многочлен (полином).

Экстремумами или экстремальными значениями функции называются максимумы и минимумы этой функции.

Явная алгебраическая функция – функция, значения которой получаются в результате конечного числа алгебраических действий над аргументом и различными постоянными.

3.5. ТЕХНИЧЕСКИЕ И ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Видеолекции по курсу размещены на канале UTUBE.

3.6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практические задания для студентов очной формы обучения проводятся в аудиторном виде. Для студентов очно-заочной и заочной форм обучения часть занятий проводится в аудиторной форме, часть – с помощью дистанционных форм обучения на учебном сайте СЗТУ. Методические указания к проведению практических занятий изложены в [4].

4. Блок контроля освоения дисциплины

4.1. Методические указания к выполнению контрольных работ и задания на контрольные работы

Во втором семестре студенты выполняют контрольные работы № 3 и № 4 .

Прежде чем выполнять контрольные работы, следует изучить теоретический материал по указанной литературе, разобрать решения типовых задач, приведенных в данном комплексе, выработать навыки решения примеров и задач по соответствующей теме, проверив себя по тренировочным тестам, приведенным в 4.3. При выполнении контрольных работ необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради в клетку, с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя или предоставлена в электронном виде на учебном сайте СЗТУ.

2. На титульном листе указывается фамилия, имя, отчество студента, шифр (номер студенческого билета), курс, факультет и специальность, по которой студент обучается, номер контрольной работы, год издания методических указаний, из которых взято контрольное задание.

3. Условия задачи приводятся полностью, без сокращения слов, после чего приводится подробное решение со ссылками на использованные при решении определения, теоремы, формулы; в конце решения записывается ответ; чертежи можно выполнять аккуратно от руки.

4. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольные задания, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

5. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

6. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

4.1.1. Методические указания по выполнению контрольной работы N 3

Применение правила Лопиталя к нахождению **предела функции**

При отыскании предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ подстановка предельного значения $x=a$ в ряде случаев приводит к неопределенным выражениям типа: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0,1^∞. Тогда вычисление заданного предела называют раскрытием неопределенности соответствующего типа. Обычно при этом используют **правило Лопиталя.**

Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Непосредственно применять правило Лопиталя можно только для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Согласно этому правилу, предел отношения двух бесконечно малых (или двух бесконечно больших) существует и равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если выполнены условия:

1) функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$ и $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности (кроме, может быть самой точки a);

2) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=0$ (или $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\infty$);

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), при этом a может быть как числом, так и одним из символов: $\infty,+\infty,-\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(\pi-3x\right)}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pi/3}\left(1-2\cos x\right)=1-2\cos\frac{\pi}{3}=$

$$=1-2\cdot\frac{1}{2}=0 \text{ и } \lim_{x\to\pi/3}\sin\left(\pi-3x\right)=\sin\left(\pi-3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\sin 0=0,$$

то имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Функции $\left(1-2\cos x\right)$ и $\sin\left(\pi-3x\right)$ дифференцируемы на всей числовой оси. Найдем предел отношения их производных:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\left(1-2\cos x\right)'}{\left(\sin\left(\pi-3x\right)\right)'}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{0-2\left(-\sin x\right)}{\cos\left(\pi-3x\right)\left(\pi-3x\right)'}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\sin x}{-3\cos\left(\pi-3x\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\pi/3}{-3\cos 0}=\frac{2\sqrt{3}/2}{-3\cdot 1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как этот предел существует, то, согласно правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(\pi-3x\right)}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\left(1-2\cos x\right)'}{\left(\sin\left(\pi-3x\right)\right)'}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Замечание. Если предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя применяется еще раз.

Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределенность типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ следует вначале путем тождественных преобразований привести к неопределенностям типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которых можно непосредственно применить правило Лопиталя.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\cos x\ln\left(\pi-2x\right)$.

Решение. При $x\to\pi/2-o$ аргумент логарифмической функции $\left(\pi-2x\right)\to 0+o$. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\cos x=0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\ln\left(\pi-2x\right)=-\infty$, то возникает неопределенность типа $0\cdot\infty$. Обычно в таких случаях один из сомножителей записывают в знаменатель данного выражения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\cos x\ln\left(\pi-2x\right)}{1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\ln\left(\pi-2x\right)}{1/\cos x}.$$

Получена неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\ln(\pi-2x)}{(\cos x)^{-1}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{(\ln(\pi-2x))'}{\left((\cos x)^{-1}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\frac{1}{\pi-2x}(-2)}{-(\cos x)^{-2}(-\sin x)}=$$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{1}{\sin x}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}$$

(поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\sin x=1$). Здесь имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой снова применяем правило Лопиталя:

$$-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{\left(\cos^2 x\right)'}{(\pi-2x)'}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-o}\frac{2\cos x(-\sin x)}{-2}=$$

$$=-2\frac{2\cdot 0\cdot(-1)}{-2}=0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. Выражение в скобках, представляющее собой неопределенность типа $\infty-\infty$, приводим к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}.$$

Полученную неопределенность типа $\frac{0}{0}$ раскроем по правилу Лопиталя (в ходе вычислений это правило применено дважды):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x\left(e^x-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{1\left(e^x-1\right)+xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x-0+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей типа 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}

При раскрытии указанных неопределенностей используются:

а) основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (в частности, $e^{\ln b} = b$);

б) непрерывность показательной функции, в силу чего:

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0+o}\left(2-e^{x}\right)^{\operatorname{ctg}3x}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+o}\left(2-e^{x}\right) = 2-1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+o}\operatorname{ctg}3x = +\infty$, имеем неопределенность типа 1^{∞}. Найдем вначале предел логарифма заданной функции: $\lim\limits_{x\to 0+o}\ln\left(\left(2-e^{x}\right)^{\operatorname{ctg}3x}\right) = \lim\limits_{x\to 0+o}\operatorname{ctg}3x\ln\left(2-e^{x}\right)$. Здесь возникла неопределенность типа $0\cdot\infty$. Если учесть, что $\operatorname{ctg}3x = \dfrac{1}{\operatorname{tg}3x}$, то перейдем к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+o}\operatorname{ctg}3x\ln\left(2-e^{x}\right) = \lim_{x\to 0+o}\frac{\ln\left(2-e^{x}\right)}{\operatorname{tg}3x} = \lim_{x\to 0+o}\frac{\left(\ln\left(2-e^{x}\right)\right)'}{\left(\operatorname{tg}3x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+o}\frac{\frac{1}{2-e^{x}}\left(-e^{x}\right)}{\frac{1}{\cos^{2}3x}3} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+o}\frac{e^{x}\cos^{2}3x}{2-e^{x}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1^{2}}{2-1} = -\frac{1}{3}.$$

Теперь используем основное логарифмическое тождество и свойство непрерывности показательной функции:

$$\lim_{x\to 0+o}\left(2-e^{x}\right)^{\operatorname{ctg}3x} = \lim_{x\to 0+o} e^{\ln\left(2-e^{x}\right)^{\operatorname{ctg}3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+o}\ln\left(2-e^{x}\right)^{\operatorname{ctg}3x}} = e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Таким образом, для вычисления $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ в случае неопределенностей 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} применяем правило: $\lim\limits_{x\to a} u^{v} = e^{q}$, где

$$q = \lim_{x\to a} v\ln u.$$

Применение производной к исследованию функции. Построение графиков функций

Промежутки монотонности и точки экстремума функции

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$, а также ее точки экстремума, надо вначале найти первую производную $y'(x)$ заданной функции. Затем следует определить промежутки, на которых эта производная сохраняет свой знак: там, где $y'(x) > 0$, функция $y(x)$ возрастает; если же $y'(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ убывает.

Чтобы найти точки экстремума (максимума или минимума) функции $y(x)$, прежде всего определяют критические точки функции $y(x)$, то есть точки, входящие в множество определения функции, в которых выполняется необходимое условие экстремума: либо $y'(x) = 0$, либо $y'(x) = \infty$, либо $y'(x)$ не существует. Затем каждую из найденных критических точек проверяют на наличие экстремума с помощью одного из достаточных признаков существования экстремума (по первой или второй производной).

Пример 5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

Решение. Прежде всего отметим, что данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Продифференцируем эту функцию

$$y' = \frac{4x^3\left(x^3 - 1\right) - x^4 3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^2} = \frac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$$

Очевидно, что точка $x_0 = 1$ не является критической, поскольку не принадлежит множеству определения функции. Имеем две критические точки, в которых $y' = 0$: это $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{4} \approx 1,58$. Чтобы найти промежутки возрастания функции $y(x)$, надо решить неравенство $y'(x) > 0$, или $\dfrac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2} > 0.$ Оно выполняется при $x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$ - это промежутки возрастания функции. Соответственно, $y'(x) < 0$ при $x \in \left]0; 1\right[\cup \left]1; \sqrt[3]{4}\right[$ - промежутки убывания данной функции.

В критических точках $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt[3]{4}$ проверим выполнение достаточного условия существования экстремума с использованием первой производной. При переходе через точку $x=0$ первая производная y' меняет знак с (+) на (-), значит, $x=0$ - точка максимума. Аналогично, точка $x_2=\sqrt[3]{4}$ - точка минимума, потому что при переходе через нее первая производная y' меняет знак с (-) на (+).

Найдем экстремальные значения функции:

$$\max y(x)=y(0)=0; \quad \min y(x)=y\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\approx 2{,}1.$$

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба определяются с помощью второй производной y''. На промежутках выпуклости $y''<0$, на промежутках вогнутости $y''>0$.

Чтобы найти точки перегиба, исследуют точки, в которых либо $y''=0$, либо $y''=\infty$, либо y'' не существует (причем в последних двух случаях y' в соответствующих точках определена). Точками перегиба являются те из найденных точек, при переходе через которые y'' изменяет свой знак.

Пример 6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Решение. Зная первую производную $y'=\dfrac{x^6-4x^3}{\left(x^3-1\right)^2}$, найдем вторую

$$y''=\left(\frac{x^6-4x^3}{\left(x^3-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(6x^5-12x^2\right)\left(x^3-1\right)^2-\left(x^6-4x^3\right)2\left(x^3-1\right)3x^2}{\left(x^3-1\right)^4}=\frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}.$$

Поскольку сама функция y в точке $x_0=1$ не определена, то исследуем только точки, в которых $y''=0$. Точка $x_3=0$ не является точкой перегиба, так как при прохождении через нее вторая производная сохраняет свой знак (-). Точка $x_4=-\sqrt[3]{2}$ - это точка перегиба, поскольку при переходе через нее y'' меняет свой знак с (+) на (-). Промежутки вогнутости графика данной функции: $\left]-\infty;-\sqrt[3]{2}\right[$ и $\left]1;+\infty\right[$, на промежутке $\left]-\sqrt[3]{2};1\right[$ график функции выпуклый. Значение функции в точке перегиба: $y\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\approx -0{,}83$.

Асимптоты графика функции

а) Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов: $\lim\limits_{x \to a-o} y(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+o} y(x)$ обращается в бесконечность. Поэтому для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо найти точки бесконечного разрыва данной функции, которые относятся к точкам разрыва II-го рода.

Пример 7. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

Решение. Как отмечалось, данная функция не определена в точке $x_0 = 1$. При этом

$$\lim_{x \to 1-o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1+o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции.

б) График функции $y(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty (x \to -\infty)$, если существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{y(x)}{x}; \quad b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left[y(x) - kx \right].$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует или бесконечен, то график функции не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty (x \to -\infty)$. (Если асимптота задана уравнением $y = b$, то ее называют горизонтальной).

Пример 8. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

Решение. Найдем значения k и b для данной функции при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[y(x) - 1x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4 - x^4 + x}{x^3 - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) x^2} = 0.$$

Аналогично находим, что при $x \to -\infty$ по-прежнему $k = 1$; $b = 0$. Таким образом, график функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ имеет одну и ту же наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$; это прямая $y = x$.

Общий план исследования функции

Чтобы составить достаточно полное представление о характере поведения функции и построить ее график, удобно проводить ее исследование по следующему плану:

1. Установить множество определения функции; при наличии точек разрыва найти в них односторонние пределы данной функции;

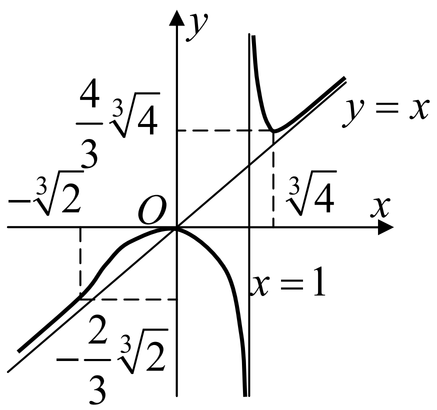
2. а) Найти точки пересечения графика функции с осями координат,

б) Отметить особенности графика заданной функции, не связанные с производными, например, симметрию, периодичность.

3. Установить промежутки возрастания и убывания функции, найти ее экстремумы.

4. Установить промежутки выпуклости и вогнутости график функции, найти точки перегиба.

5 Найти асимптоты графика функции.



Пример 9. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение. Как отмечалось в примере 5, множество определения данной функции - вся числовая ось Ox, исключая точку $x = 1$: $X = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. График функции пересекается с осями координат в единственной точке 0(0,0). Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $y(-x) = \dfrac{(-x)^4}{(-x)^3 - 1} = \dfrac{x^4}{-x^3 - 1} \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, поэтому график функции не обладает свойствами симметрии. Дальнейшее исследование этой функции фактически уже проведено в примерах 5-8. По данным, полученным в этих примерах, сделан схематический чертеж графика заданной функции, который представлен на рис. 1.

Рис. 1

Пример 10. Исследовать функцию $y = xe^{1/x}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение. 1. Множество определения данной функции - вся числовая ось Ox, кроме точки $x = 0$: $X = (-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 0$. Предел слева $\lim\limits_{x\to 0-o} xe^{1/x} = 0,$ так как $\lim\limits_{x\to 0-o} x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0-o} e^{1/x} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^{y} = 0$. При вычислении предела справа возникает неопределенность вида $0\cdot\infty$; приводим ее к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, к которой применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+o} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0+o} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0+o} \frac{\left(e^{1/x}\right)'}{\left(1/x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+o} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+o} e^{1/x} = +\infty.$$

2. а) Точки пересечения графика функции с осью Ox определяются из условия $y = 0$. В данном случае уравнение $xe^{1/x} = 0$ не имеет решений, так как $x = 0$ не входит в множество определения функции. Точки пересечения графика функции с осью Oy можно найти, положив $x = 0$. Для заданной функции это значение не входит во множество ее определения. Следовательно, график исследуемой функции не имеет точек пересечения с осями координат.

б) Поскольку $y(-x) = -xe^{-x} \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Находим

$$y' = \left(xe^{1/x}\right)' = e^{1/x} + xe^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{1/x}}{x}(x-1).$$

Производная y' существует и конечна на всем множестве определения заданной функции $X = (-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Поскольку точка разрыва первой производной x = 0 не принадлежит множеству определения функции, то все критические точки функции $y(x)$ находим из условия: $y' = 0$, или $\frac{e^{1/x}}{x}(x-1) = 0$. Отсюда получаем $x = 1$.

Функция $y(x)$ возрастает, если $y'(x) > 0$, то есть при $-\infty < x < 0$ и $1 < x < +\infty$.

Функция $y(x)$ убывает, если $y' < 0$, в данном случае при $0 < x < 1$. Таким образом, при переходе через точку $x = 1$ первая производная меняет знак с (-) на (+), то есть $x = 1$ - точка минимума; $y(1) = \min y(x) = e.$

4. Находим

$$y'' = \left[e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]' = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

Вторая производная существует и конечна во всех точках множества определения данной функции. Тогда все точки перегиба находим из условия: $y'' = 0$, то есть $\dfrac{e^{1/x}}{x^3} = 0$. Поскольку это уравнение не имеет решения, то точек перегиба нет. График функции - выпуклый, если $y'' < 0$; в данном случае при $x < 0$. График функции вогнутый при $x > 0$, так как там $y'' > 0$.

5. Как было установлено в пункте 1, в точке $x = 0$ функция $y = xe^{1/x}$ имеет бесконечный разрыв, поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой ее графика. Для определения наклонных асимптот найдем:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(xe^{1/x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(e^{1/x} - 1\right)'}{\left(1/x\right)'} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Значит, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Схематический чертеж графика функции приведен на рис. 2.

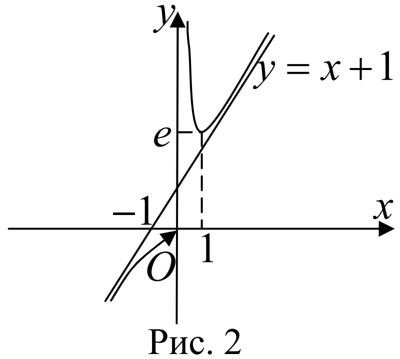


Рис. 2

Пример 11. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}$ и сделать схематический чертеж графика.

Решение: 1. Данная функция определена на всей числовой оси $0x : X = (-\infty;+\infty)$.

2. Точки пересечения графика функции с осью Ox определяются из условия $y = 0$, откуда $x = \pm 1$, а с осью Oy - из условия $x = 0$, при этом $y(0) = 1$. Данная функция - четная, поскольку $y(-x) = \sqrt[3]{\left((-x)^2 - 1\right)^2} = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2} = y(x)$, значит, ее график симметричен относительно оси Oy.

3. $y' = \left(\left(x^2 - 1\right)^{2/3}\right)' = \dfrac{2}{3}\left(x^2 - 1\right)^{-1/3} 2x = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. Первая производная обращается в бесконечность в точках $x = 1$, $x = -1$, в то время, как сама функция $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}$ в этих точках определена. Значит, эти точки - критические для данной функции. Еще одна критическая точка определяется из условия $y' = 0$; это $x = 0$. Функция убывает, если $y' < 0$, то есть при $-\infty < x < -1$ и $0 < x < 1$. Функция возрастает при $y' > 0$, то есть при $-1 < x < 0$ и при $x > 1$. Таким образом, $x = 0$ - точка максимума, $x = -1$ и $x = 1$ - точки минимума данной функции; $y(0) = \max y(x) = 1$; $y(-1) = y(1) = \min y(x) = 0$. В точках $x = -1$ и $x = 1$ данная функция имеет так называемый "острый" экстремум: касательная к графику функции в каждой из этих точек параллельна оси Oy.

4. $y'' = \dfrac{4}{3}\left(x\left(x^2 - 1\right)^{-1/3}\right)' = \dfrac{4}{9}\dfrac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^4}}$. Вторая производная обращается в бесконечность при $x = \pm 1$, но эти точки не принадлежат множеству определения $y'(x)$ и, следовательно, не являются критическими точками для второй производной. Значит, критические точки для нее определяем из условия $y'' = 0$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$. Так как $y'' > 0$ при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$, то график $y(x)$ в этих интервалах вогнутый, а в интервалах $-\sqrt{3} < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < \sqrt{3}$ - график выпуклый, так как там $y'' < 0$. Значения функции в точках перегиба

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt[3]{4}.$$

5. Поскольку функция определена на всей числовой оси Ox, то вертикальных асимптот у ее графика нет. Проверим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}} = \pm\infty.$$

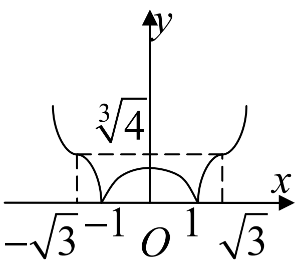


Рис. 3

Таким образом, наклонные асимптоты также отсутствуют. На рис. 3 схематически изображен график функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Неопределенный интеграл

Интегрирование - нахождение функции по ее дифференциалу - это математическая операция, обратная дифференцированию функции.

В то время, когда дифференцирование функции проводится на основании общего правила, вытекающего из определения производной, для интегрирования функции нельзя указать такие общие правила. Техника интегрирования основана на применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);\quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int\left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right]dx = C_1\int f_1(x)dx + C_2\int f_2(x)dx;$
3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f\left[\varphi\left(x\right)\right]d\left[\varphi\left(x\right)\right] = F\left[\varphi(x)\right]+C;$
   (инвариантность формул интегрирования)
4. $\int dF(x) = F(x)+C$.

Таблица основных интегралов

$$1.\int 0\,dx = C;\qquad 2.\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\quad m \neq -1;$$

$$3.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\qquad 4.\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$$

â ÷àñòí î ñòè, $\int e^x\,dx = e^x + C;$

$$5.\int \cos x\,dx = \sin x + C;\qquad 6.\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$7.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C;\qquad 8.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$$

$$9.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}\qquad 10.\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C, \\ -\mathrm{arcctg}x + C; \end{cases}$$

$$11.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C, \\ -\arccos \dfrac{x}{|a|} + C; \end{cases}\qquad 12.\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \\ -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C; \end{cases}$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;\qquad 14.\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Основная трудность при интегрировании состоит в приведении подынтегрального выражения к виду, позволяющему использовать таблицу интегралов. Для некоторых видов подынтегральных функций можно указать ряд приемов, позволяющих это сделать.

Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)

Суть этого метода состоит в преобразовании данного подынтегрального выражения к подынтегральному выражению уже известной формулы интегрирования с помощью замены переменной по формуле $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ (причем функции $\varphi(t)$ или $\psi(x)$ должны иметь обратную функцию и быть непрерывно дифференцируемыми).

Пример 12. Найти $I = \int \dfrac{e^x + 3e^{2x} - \sqrt{1-e^{2x}}\cos 5x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$

Решение. Разделив почленно числитель подынтегральной дроби на выражение, стоящее в знаменателе, и, применив свойство 2, получим сумму трех интегралов

$$I=\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+3\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\int\cos 5xdx.$$

В первом из них введем новую переменную $t=e^x$, тогда $dt=\left(e^x\right)'dx=e^xdx$ и $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin e^x+C$ (использована формула 9 из таблицы интегралов). Вычисляя второй интеграл, введем переменную $z=1-e^{2x}$, при этом $dz=\left(1-e^{2x}\right)'dx=-2e^{2x}dx$, тогда

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz=-\frac{1}{2}\frac{z^{1/2}}{1/2}+C=-\sqrt{z}+C=-\sqrt{1-e^{2x}}+C.$$

(применена формула 2 из таблицы интегралов, причем $m=-\frac{1}{2}$). При нахождении последнего интеграла можно не вводить новую переменную t, а использовать прием, называемый подведением под знак дифференциала: умножим и разделим подынтегральную функцию на 5 и учтем, что $5dx=d(5x)$.

$$\int\cos 5xdx=\int\cos 5x\frac{1}{5}5dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x)d(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

На последнем шаге здесь использовано свойство инвариантности и формула 5 из таблицы интегралов. Окончательно

$$I=\arcsin e^x-3\sqrt{1-e^{2x}}-\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле производят по формуле:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Чтобы вновь полученный интеграл $\int vdu$ был проще исходного $\int udv$, нужно удачно выбрать выражения u и dv в заданном интеграле. Часто при этом удобно пользоваться правилами:

- если под интегралом стоит произведение многочлена на синус, косинус или экспоненту, то в качестве u берем многочлен;
- если подынтегральное выражение является произведением многочлена на какую-либо функцию от логарифма, арктангенса или арксинуса, то за u следует брать именно эту функцию.

Пример 13. Найти $\int\left(4x^3+2x\right)\mathrm{arctg}\,xdx.$

Решение. Обозначим $u = \operatorname{arctg} x$; $dv = \left(4x^3 + 2x\right)dx$; тогда $du = \left(\operatorname{arctg} x\right)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$; $v = \int\left(4x^3+2x\right)dx = x^4 + x^2$. Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\left(4x^3+2x\right)\operatorname{arctg} x dx = \left(x^4+x^2\right)\operatorname{arctg} x - \int\frac{x^4+x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \left(x^4+x^2\right)\operatorname{arctg} x - \int\frac{x^2\left(x^2+1\right)}{1+x^2}dx = \left(x^4+x^2\right)\operatorname{arctg} x - \int x^2 dx =$$

$$= \left(x^4+x^2\right)\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + C.$$

Иногда предварительно сделанная замена переменной упрощает задачу интегрирования по частям. Возможны ситуации, когда интегрирование по частям следует применить несколько раз.

Интегрирование дробно-рациональных функций от различных выражений

Чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь от аргумента x, ее следует предварительно разложить на сумму простейших дробей. Дробно-рациональная функция от тригонометрических выражений может быть сведена к алгебраической дробно-рациональной функции от нового аргумента t с помощью одной из подстановок: $t = \sin x$; $t = \cos x$; $t = \operatorname{tg} x$; $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (”универсальная” тригонометрическая подстановка).

Пример 14. Найти $I = \displaystyle\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx.$

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; при этом $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$I = \int\frac{\sin x}{1-\sin x} = \int\frac{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)\left(t-1\right)^2}.$$

Разложим дробь, получившуюся под интегралом, на сумму простейших дробей:

$$\frac{4t}{\left(1+t^2\right)\left(t-1\right)^2}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{\left(t-1\right)^2}.$$

Приведем выражение в правой части к общему знаменателю и учтем, что числители обеих дробей равны:

$$4t=\left(At+B\right)\left(t^2-2t+1\right)+C\left(1+t^2\right)\left(t-1\right)+D\left(1+t^2\right) \text{или}$$

$$4t=\left(A+C\right)t^3+\left(-2A+B-C+D\right)t^2+\left(A-2B+C\right)t+\left(B-C+D\right).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях данного выражения:

$$\left.\begin{aligned} &t^3: 0=A+C,\\ &t^2: 0=-2A+B-C+D,\\ &t^1: 4=A-2B+C,\\ &t^0: 0=B-C+D. \end{aligned}\right\} \text{Èñêëþ÷èì ïåðåìåííóþ C, ó÷èòûâàÿ, ÷òî } C=-A:$$

$$\begin{cases} -A+B+D &=0,\\ -2B &=4,\\ A+B+D &=0. \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения $B=-2$, из первого и третьего уравнений: $A=0$, тогда и $C=0$, $D=-B=2$. Итак,

$$I=\int\left(\frac{-2}{1+t^2}+\frac{2}{\left(t-1\right)^2}\right)dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}+2\int\left(t-1\right)^{-2}d\left(t-1\right)=$$

$$=-2\operatorname{arctg}t+2\frac{\left(t-1\right)^{-1}}{-1}+C=-2\operatorname{arctg}\left(tg\frac{x}{2}\right)-2\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}+C=$$

$$=-2\frac{x}{2}-\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}+C=-x-\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}+C.$$

Определенный интеграл

Определенный интеграл вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Если в определенном интеграле производится замена переменной, то надо найти пределы интегрирования для новой переменной. При вычислении определенного интеграла может также использоваться формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Пример 15. Вычислить $I = \int_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Введем новую переменную t по формуле: $t = \sqrt[4]{2x-1}$ или $t^4 = 2x-1$, откуда $4t^3dt = 2dx$ (показатель степени у новой переменной выбирается как наименьшее общее кратное показателей корней: в данном случае 4 – наименьшее общее кратное чисел 2 и 4). Из этой же формулы видно, что если $x=1$, то $t = \sqrt[4]{2-1} = 1$, а при $x = 41: t = \sqrt[4]{82-1} = 3$. Поэтому

$$I = \int_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}} = \int_1^3 \frac{2t^3dt}{t^2+3t} = 2\int_1^3 \frac{t^2 - 9 + 9}{t+3}dt =$$

$$= 2\left(\int_1^3 \frac{(t-3)(t+3)dt}{t+3} + 9\int_1^3 \frac{dt}{t+3} \right) = 2\left(\int_1^3 (t-3)dt + 9\int_1^3 \frac{d(t+3)}{t+3} \right) =$$

$$= 2\left[\left(\frac{t^2}{2} - 3t \right)\Bigg|_1^3 + 9\ln|t+3|\Big|_1^3 \right] =$$

$$= 2\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1 \right) + 9\ln|3+3| - 9\ln|1+3| \right] = 2\left(-2 + 9\ln\frac{3}{2} \right).$$

4.1.2. Методические указания по выполнению контрольной работы N4

Несобственные интегралы

Интеграл называется несобственным в одном из двух случаев:

а) промежуток интегрирования бесконечен;

б) подынтегральная функция имеет бесконечные разрывы внутри промежутка интегрирования или на его концах.

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ называется предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

Он обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, в случаях, если предел бесконечен или не существует, - расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty,a]$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx.$$

Наконец, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty,+\infty)$ определяется в виде суммы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

где a - произвольное число, при этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится только тогда, когда оба интеграла в правой части сходятся.

Пример 16. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}(A+1) - \operatorname{arctg}(0+1) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\pi/4$.

Для выяснения факта сходимости или расходимости несобственного интеграла часто используются следующие теоремы:

Теорема. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. В этом случае говорят, что интеграл сходится абсолютно.

Теорема. Если на промежутке интегрирования функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, неотрицательны и $\varphi(x) \le f(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 17. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Заметим, что на всем промежутке интегрирования

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} \ge \frac{2}{\sqrt{x}} \ge 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty}\left(4\sqrt{x}\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(4\sqrt{A}-4\right) = +\infty.$$

Рассмотренный интеграл расходится. Следовательно, по теореме 2, данный несобственный интеграл также расходится.

Несобственный интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, а в точке b имеет бесконечный разрыв: $\lim\limits_{x\to b-o} f(x)=\infty$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+o}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл называется сходящимся, если указанный предел существует и конечен, и расходящимся в противном случае.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв на левом конце промежутка интегрирования.

Пример 18.Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx.$

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке 0, поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+o}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+o}\left(\int\limits_\varepsilon^1 x^{1/2}dx+\int\limits_\varepsilon^1 x^{-1/2}dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+o}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}\right)\Bigg|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0+o}\left(\frac{2}{3}+2-\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}+2\varepsilon^{1/2}\right)\right)=2\frac{2}{3}.$$

Пример 19. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int\limits_3^5 \frac{x\cos x}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Решение. Интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=3$. На всем промежутке интегрирования

$$\left|\frac{x\cos x}{\sqrt{x^2-9}}\right|\le\frac{x}{\sqrt{x^2-9}},\text{ т.к. } |\cos x|\le 1 \text{ при } x\in[3;5].$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$. Сделаем в нем замену $t=\sqrt{x^2-9}$, тогда $x^2=t^2+9$, $xdx=tdt$ и $t=0$ при $x=3$, а $t=4$ при $x=5$. Тогда

$$\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int_0^4 \frac{tdt}{t} = t\Big|_0^4 = 4.$$

Этот интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл сходится абсолютно.

Геометрические приложения определенного интеграла

Рассмотрим приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг кривых.

1. Вычисление площадей плоских фигур

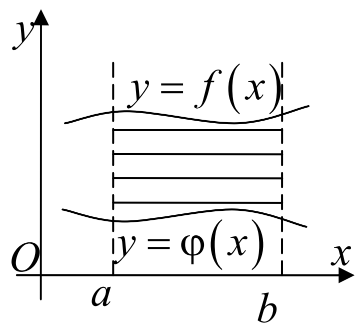


Рис. 4

Если фигура ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу - графиком $y=\varphi(x)$, сбоку - прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 4), то ее площадь S находится по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

Пример 20. Вычислить площадь круга радиуса R.

Решение. Круг определяется неравенствами $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$, $-R \le x \le R$. В таком случае $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $\varphi(x) = -\sqrt{R^2-x^2}$, x изменяется от $-R$ до R. Тогда

$$S = \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2-x^2} - \left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)\right]dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx.$$

Сделаем в этом интеграле замену $x = R\sin t$, тогда $dx = R\cos t dt$, $\sqrt{R^2-x^2} = R\cos t$, $t = -\pi/2$ при $x=-R$ и $t = \pi/2$ при $x=R$. Тогда

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\cos tR\cos tdt = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdt = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = R^2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi R^2.$$

Пример 21. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$y \le 2 - x^2, \quad y \ge x, \quad y \ge -x.$$

Решение. Описанная фигура лежит под параболой и над биссектрисами 1-го и 2-го координатных углов (рис. 5). Для вычисления ее площади разобьем промежуток интегрирования на два:

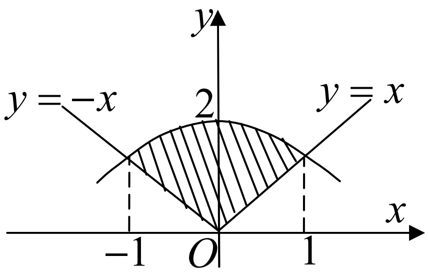


Рис. 5

$$S = \int_{-1}^{0} \left(2 - x^2 - (-x)\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{7}{3}.$$

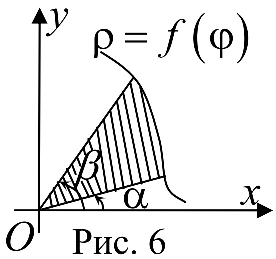


Рис. 6

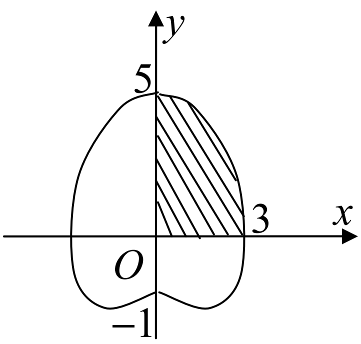
В полярной системе координат площадь сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой, заданной непрерывной функцией $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 6), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 22. Вычислить площадь круга радиуса R, используя полярные координаты.

Решение. В полярных координатах уравнение окружности радиуса R с центром в полюсе имеет вид $\rho = R\left(0 \le \varphi \le 2\pi\right)$. Тогда для площади круга имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2} \varphi\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$



Ðèñ.7

Пример 23. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2\sin\varphi + 3$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

Решение: Вид фигуры, ограниченной данной кардиоидой, представлен на рис.7. Согласно условию, требуется найти площадь заштрихованной части фигуры, для которой полярный угол изменяется от 0 до $\pi/2$. Тогда искомая площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} \left(2\sin\varphi + 3\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} \left(4\sin^2\varphi + 12\sin\varphi + 9\right) d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}+12\sin\varphi+9\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(-2\cos 2\varphi+12\sin\varphi+11\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin 2\varphi-12\cos\varphi+11\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\pi+12\right)=\frac{11}{4}\pi+6.$$

2. Вычисление длин дуг кривых

Если плоская дуга задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \text{где}\ \alpha\le t\le\beta,$$

и функции $\varphi(t),\ \psi(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся в ноль одновременно, то длина дуги

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

Пример 24. Вычислить длину окружности радиуса R.

Решение. Окружность радиуса R с центром в начале координат задается в параметрическом виде уравнениями $x=R\cos t,\ \ y=R\sin t,$ где $t\in\left[0,2\pi\right]$, тогда

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,dt=R\int_0^{2\pi}dt=Rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

Если дуга задана в явном виде уравнением $y=f(x),\ \ \left(a\le x\le b\right)$, то

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Пример 25. Вычислить длину окружности радиуса R, используя последнюю формулу.

Решение. Рассмотрим четверть окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенную в первом координатном угле. Она задается уравнением $y=+\sqrt{R^2-x^2},\ \ x\in\left[0,R\right]$. Тогда $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и для длины окружности получаем

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Этот интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на правом конце отрезка интегрирования. Вычислим его:

$$L=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}4R\int_0^{R-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}4R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^{R-\varepsilon}=4R\frac{\pi}{2}=2\pi R.$$

Если плоская дуга задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, а начальная и конечная точки дуги имеют полярные углы α и β соответственно, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho'(\varphi)]^2+[\rho(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

Пример 26. Вычислить длину окружности радиуса R, используя последнюю формулу.

Решение. Окружность радиуса R с центром в полюсе системы координат задается уравнением $\rho=R(0\le\varphi\le 2\pi)$. Тогда $\rho'=0$ и длина

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+R^2}\,d\varphi=R\int_0^{2\pi}d\varphi=R\varphi\big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

3. Вычисление площадей поверхностей вращения

Если плоская дуга AB задана уравнением $y=f(x)$, $(a\le x\le b)$, причем $f(x)$ неотрицательна и имеет непрерывную производную на (a,b), то площадь поверхности, полученной при вращении дуги AB вокруг оси Ox, может быть вычислена по формуле

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Пример 27. Вычислить площадь сферы радиуса R.

Решение. Сфера радиуса R может быть получена вращением полуокружности $y=+\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$, вокруг оси Ox. Тогда $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и для площади поверхности сферы получаем

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\int_{-R}^{R}dx=4\pi R^2.$$

4. Вычисление объемов тел вращения

Если плоская дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$, причем $f(x)$ неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой AB, вокруг оси Ox может быть вычислен по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Если плоская дуга CD задана уравнением $x = \varphi(y)$, $(c \le y \le d)$, причем $\varphi(y)$ неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой CD, вокруг оси Oy может быть вычислен по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Пример 28. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение. Шар радиуса R может быть получен вращением полукруга $y \le +\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси Ox. Тогда для объема шара имеем

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi \left. \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-R}^{R} = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Переменная z называется функцией независимых переменных x, y на множестве E, если каждой паре (x, y) значений этих переменных из E ставится в соответствие одно определенное значение z.

Аналогично определяются и функции большего числа переменных.

Частные производные

Для функции нескольких переменных вводится понятие частной производной по каждому из аргументов. Если $z = f(x, y)$, то по определению $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ - частная производная z по x в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется и частная производная по у

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

При вычислении частных производных все аргументы функции, за исключением той, по которой производится дифференцирование, считаются постоянными (константами). При вычислении частных производных применяются те же приемы, что и при вычислении обыкновенных производных.

Пример 29. Вычислить z'_x и z'_y для функции $z = f(x, y) = xy^2 \sin x$.

Решение. Найдем z'_x.

Считаем y^2 величиной постоянной, выносим его за знак производной. Дифференцируем $x\sin x$ по x как произведение.

$$z'_x = y^2 (x \sin x)'_x = y^2 \left(x' \sin x + x (\sin x)' \right) = y^2 (\sin x + x \cos x).$$

Для z'_y получаем

$$z'_y = x \sin x \left(y^2 \right)'_y = x \sin x \cdot 2y = 2xy \sin x.$$

Частные производные второго порядка - это частные производные от производных первого порядка. Например:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ обладает в некоторой точке непрерывными частными производными z''_{xy} и z''_{yx}, то эти производные равны. Аналогичный факт справедлив и для производных более высоких порядков и для большего числа аргументов, что позволяет выбирать порядок дифференцирования.

Пример 30. Вычислить $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ для функции $u = e^{x/z} \sin y$.

Решение. По определению частных производных высших порядков, можно найти искомую производную следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x/z} \sin y \right) = (\sin y) \left(e^{x/z} \right)'_x = \frac{\sin y}{z} e^{x/z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin y}{z} e^{x/z} \right) = \frac{1}{z} \cos y \cdot e^{x/z};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\cos y \frac{1}{z} e^{x/z}\right) = \cos y\left[-\frac{1}{z^2} e^{x/z} + \frac{1}{z} e^{x/z}\left(-\frac{x}{z^2}\right)\right] =$$

$$= -\left(\frac{1}{z^2} e^{x/z} + \frac{x e^{x/z}}{z^3}\right)\cos y = -\frac{x+z}{z^3} e^{x/z} \cos y.$$

Если функция y от x задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то производная y по x вычисляется по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

где $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ - частные производные от $F(x, y)$ по x, y соответственно.

Пример 31. Вычислить y'_x и дифференциал dy, если $F(x, y) = e^y + xy = 0.$

Решение. В данном случае $F'_x = y$, а $F'_y = e^y + x$. Тогда

$$y'_x = -\frac{y}{e^y + x}; \quad dy = -\frac{y}{e^y + x} dx.$$

Если функция z от x, y задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то частные производные z по x, y могут быть вычислены из соотношений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Полный дифференциал

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x, y)$, то ее полным дифференциалом в этой точке называется выражение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример 32. Найти полный дифференциал dz в точке $M_0\left(0, \pi/4, 1\right)$ для функции $z(x, y)$, заданной уравнением $zy - \operatorname{arctg}(xz) = \pi/4$.

Решение. Поскольку функция $z(x, y)$ задана неявно, то ее частные производные z'_x, z'_y можно найти, используя приведенные соотношения, где $F(x, y, z) = zy - \operatorname{arctg}(xz) - \pi/4$. Тогда

$$F'_x = -\frac{z}{1+x^2z^2}; \quad F'_y = z; \quad F'_z = y - \frac{x}{1+x^2z^2}.$$

В точке $M_0\left(0, \pi/4, 1\right)$ $\quad F'_x\left(M_0\right) = -1, \; F'_y\left(M_0\right) = 1, \; F'_z\left(M_0\right) = \pi/4$.

Следовательно, в этой точке $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 4/\pi, \; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -4/\pi$ и полный дифференциал

$$dz\left(M_0\right) = 4/\pi \, dx - 4/\pi \, dy = 4/\pi \, (dx - dy).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в ограниченной области

Если функция нескольких переменных определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она может принимать наибольшее и наименьшее значения либо внутри области в точках экстремума, либо на границе области.

Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $z(x, y)$ в замкнутой ограниченной области D рекомендуется проводить по следующему плану:

- найти точки внутри области, в которых выполняются необходимые условия экстремума $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$, вычислить значения функции в этих точках;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области (обычно этот этап решения сводится к поиску наибольших и наименьших значений функции одной переменной на отрезках);
- сравнить полученные значения функции, выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 33. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + y^2 - 6y + 1$ в замкнутой ограниченной области D, заданной неравенствами $y \le 4 - x^2; \; y \ge 0$.

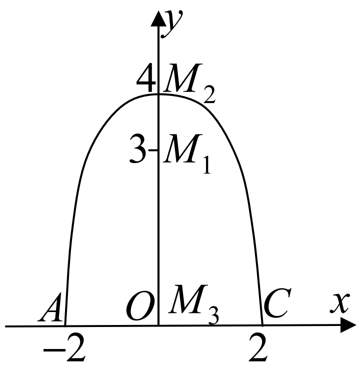


Рис. 8

Решение. Исследуемая область D изображена на рис. 8.

1. На первом этапе найдем стационарные точки функции z внутри области D и значения функции в этих точках. Для этого частные производные $z'_x = 4x$ и $z'_y = 2y - 6$ приравняем нулю и решим полученную систему уравнении: $\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 3$. Стационарная точка $M_1(0,3)$ расположена внутри области и $z(M_1) = -8$.

2. Исследуем функцию на границе области:

а) В точках параболы $y(x) = 4 - x^2$ $(-2 \le x \le 2)$ функция z после подстановки $y = y(x)$ становится функцией одной переменной. Исследуем эту функцию $z = 2x^2 + (4 - x^2)^2 - 6(4 - x^2) + 1 = x^4 - 7$ на замкнутом промежутке $-2 \le x \le 2 : z'_x = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0;\ 0 \in (-2;2)$. При этом $y = (4 - x^2)\Big|_{x=0} = 4$. Значит, заданная функция имеет на участке параболы единственную стационарную точку $M_2(0,4)$. Вычислим $z(M_2) = -7$.

б) На отрезке прямой $y = 0$ $(-2 \le x \le 2)$ функция z принимает вид: $z = 2x^2 + 1$. Найдем ее стационарные точки: $z'_x = 4x = 0 \Rightarrow x = 0;$ $0 \in (-2,2)$. При этом $y = 0$. Значит, заданная функция имеет на отрезке прямой единственную стационарную точку $M_3(0,0)$. Вычислим $z(M_3) = 1$.

в) Вычислим значения функции z в точках $A(-2,0)$ и $C(2,0): z(A) = 9$, $z(C) = 9$.

3. Сравнивая найденные значения функции $z(x,y)$:

$$z(M_1) = -8;\ \ z(M_2) = -7;\ \ z(M_3) = 1;\ \ z(A) = 9;\ \ z(C) = 9,$$

делаем вывод, что данная функция достигает в заданной области наименьшего значения в точке M_1, а наибольшего в точках A и C.

4.1.3. Задания на контрольные работы №№ 3-4

В контрольных работах студент должен решить задачи, выбрав их номера из таблицы по двум последним цифрам своего шифра и первой букве фамилии.

Например, студент Захаров, шифр 17-0025, выполняет в контрольной №3 - 102,115,125,135, 142; в контрольной №4 - 152,165,175, 182, 195.

Последняя цифра шифра		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номер контрольной работы	**3**	121 131	122 132	123 133	124 134	125 135	126 136	127 137	128 138	129 139	130 140
Номер контрольной работы	**4**	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Предпоследняя цифра шифра		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номер контрольной работы	**3**	101 141	102 142	103 143	104 144	105 145	106 146	107 147	108 148	109 149	110 150
Номер контрольной работы	**4**	151 181	152 182	153 183	154 184	155 185	156 186	157 187	158 188	159 189	160 190
Первая буква фамилии		**А,И Т**	**Б,О Ц**	**В,Н Х**	**Г,Ф Я**	**Д,З Л**	**Е,М Р**	**Ж,С Ч**	**К Э**	**П Щ**	**У, Ш Ю**
Номер контрольной работы	**3**	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
Номер контрольной работы	**4**	171 191	172 192	173 193	174 194	175 195	176 196	177 197	178 198	179 199	180 200

Задание на контрольную работу № 3.

В задачах 101-110 найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-\cos 5x}{e^{2x}-\cos 2x}$, 102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$,

103. $\lim\limits_{x\to 0+o} x^{\sin x}$, 104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{2}{x^2}}\right)$,

105. $\lim\limits_{x\to 0+o}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$, 106. $\lim\limits_{x\to e}\left(e^2-x^2\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2e}$,

107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi^x-e^x}{x\sqrt{1-x^2}}$, 108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$,

109. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, 110. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$.

В задачах 111-120 исследовать функцию и построить ее график.

111. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, 112. $y=\dfrac{x}{1-x^3}$,

113 $y=x\sqrt[3]{(x-1)^2}$, 114. $y=\dfrac{3-2x}{(x-2)^3}$,

115. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$, 116. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$,

117. $y=\dfrac{4x^3+5}{4x}$, 118. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$,

119. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$, 120. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

В задачах 121-130 найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

121. $\int \frac{(\cos 2x)\sqrt{x^2-1}+4x}{\sqrt{x^2-1}}dx$, 122. $\int \frac{2x-\sqrt[5]{3+\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

123. $\int \frac{\cos(3\ln x)-x^2+4}{x}dx$, 124. $\int \frac{\sqrt[3]{2\mathrm{tg}x}-e^{4\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$,

125. $\int \frac{\sqrt[5]{\sin x}\cos x+4\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx$, 126. $\int \frac{2^{\mathrm{arctg}x}-\sqrt[4]{5+\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$,

127. $\int \frac{7-3\sqrt{\sin x}}{\mathrm{tg}x}dx$, 128. $\int \frac{\sin\ln(x-7)+6}{x-7}dx$,

129. $\int \frac{\sqrt{\sin x}\cdot 3^{\mathrm{ctg}x}-\cos x}{\sqrt{\sin^5 x}}dx$, 130. $\int \frac{\mathrm{tg}x-3\sqrt{\cos x}}{2\mathrm{ctg}x}dx$.

В задачах 131-140 найти неопределенные интегралы, используя для вычислений формулу интегрирования по частям.

131. $\int x\cdot 3^x dx$, 132. $\int x^2\cdot e^{3x}dx$,

133. $\int x\ln(x^2+1)dx$, 134. $\int x\sin 4x dx$,

135. $\int x\mathrm{arctg}3x dx$, 136. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$,

137. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{7x-1}dx$, 138. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$,

139. $\int \left(x^2+3x+2\right)\ln x dx$, 140. $\int \left(4x^3+6x-7\right)\ln x dx$.

В задачах 141-150 вычислить определенные интегралы, используя подстановки, указанные в скобках.

141. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x\cdot\sin x}}$ $\left(t=\mathrm{tg}x\right)$,

142. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{3\cos x-\cos^2 x}$ $\left(t=\cos x\right)$,

143. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\sqrt{e^x - 2} \cdot e^x}{e^x - 1} dx \qquad \left(t = \sqrt{e^x - 2}\right),$

144. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x} \qquad \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$

145. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x} \qquad \left(t = \operatorname{tg} x\right),$

146. $\int\limits_{0}^{7} \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}} \qquad \left(t = \sqrt[3]{x+1}\right),$

147. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \left(4 - x^2\right)^{3/2} dx \qquad \left(x = 2\sin t\right),$

148. $\int\limits_{1}^{16} \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{\left(\sqrt{x} + 4\right)\sqrt[4]{x^3}} dx \qquad \left(t = \sqrt[4]{x}\right),$

149. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^{4x}}{5 + 2e^{4x}} dx \qquad \left(t = 5 + 2e^{4x}\right),$

150. $\int\limits_{-2}^{61} \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}} \qquad \left(t = \sqrt[6]{x+3}\right).$

Задание на контрольную работу № 4

В задачах 151-156 вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

151. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\left(x+1\right)}$ 152. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ 153. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x - 5}{x^2 - 2x + 2} dx$

154. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 155. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ 156. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\left(4 + \ln^2 x\right)}$

В задачах 157-160 доказать, используя признак сравнения, сходится или расходится несобственный интеграл.

157. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^3} dx$ 158. $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$

159. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} dx$ 160. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3\left(1+e^x\right)}$

161. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=(x-2)^2, \quad y=2-(x-2)^2$.Сделать рисунок.

162. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sin(2x), \quad y=0, \quad x=0, \quad x=\frac{\pi}{4}$. Сделать рисунок.

163. Вычислить площадь шарового пояса, получаемого при вращении вокруг оси Ox дуги окружности $x^2+y^2=4 \quad (y>0)$ между точками с абсциссами $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$. Сделать рисунок.

164. Определить длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$, где $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

165. Определить длину дуги одной арки циклоиды: $x=3(t-\sin t), \quad y=3(1-\cos t)$, где $0 \le t \le 2\pi$.

166. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды и осью Ox: $x=4(t-\sin t), \quad y=4(1-\cos t)$, где $0 \le t \le 2\pi$.

167. Вычислить объем тела, образованный вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\cos(3x)$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$. Сделать рисунок.

168. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y=\dfrac{x^3}{3}$ от $x=0$ до $x=2$. Сделать рисунок.

169. Вычислить объем тела, образованный вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ y=1,\ y=4,\ x=0.$ Сделать рисунок.

170. Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(2-x\right)^3}$ от $x=1$ до $x=2$.

В заданиях 171-174 для функции $z\left(x,y\right)$ убедиться, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

171. $z=8x^2-xy+2y^2-16x+y-1.$

172. $z=-55+15x-2x^2-xy-2y^2.$

173. $z=x^3-6xy+8y^3+5.$

174. $z=1+6x-x^2-xy-y^2.$

В заданиях 175-177 найти значение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке A.

175. $z=x^3-6x^2y+y^2-39x+18y+20,\quad A\left(1;0\right).$

176. $z=3x^3-9xy^2+3y^3+10,\quad A\left(1;1\right).$

177. $z=x^2+x^2y^2+y^2+x-y+1,\quad A\left(0;1\right).$

В заданиях 178-180 найти значение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ в точке A.

178. $u=z^2+zy^2+y^2-6z-9y+2,\quad A\left(1;1;2\right).$

179. $u=zx^3+zy^3-3xy+2z,\quad A\left(1;1;0\right).$

$$u = z + 8xz - 2y - 2x^2 + 2yz - 4y^2, \quad A(1;0;1).$$
180.

В заданиях 181-185 найти в точке A дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно.

181. $e^{1-\frac{y}{x}} = \sin x, \quad A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$

182. $\ln(2x + y - 2) = \sin(x - y), \quad A(1;1).$

183. $\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{y}\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad A\left(\frac{\pi}{2};1\right).$

184. $\mathrm{arcctg}(x + y) = \frac{\pi}{4}(x - y), \quad A(1;0).$

185. $3y + 2x = 2 + xe^{y}, \quad A(2;0).$

В заданиях 186-190 найти в точке A полный дифференциал функции $z(x,y)$, заданной неявно.

186. $z^3 = xe^{\frac{y}{x}}, \quad A(1;3;e).$

187. $\sin(xy) = x \cdot \mathrm{tg}\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad A\left(1;0;\frac{\pi}{4}\right).$

188. $\cos(xz) = \ln(2x - y), \quad A\left(1;1;\frac{\pi}{2}\right).$

189. $ye^{xz} - 2 = e - 2x - z, \quad A(1;e;0).$

190. $z^3 - 2x^3 = 3zxy, \quad A(1;1;2).$

В заданиях 191-200 найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,y)$ в указанной замкнутой области $\overline{D}$. Сделать рисунок области.

191. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4,$ $\bar{D}: 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4.$

192. $z = x^2 + 2y^2 + 1,$ $\bar{D}: x + y \le 3, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

193. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1,$ $\bar{D}: -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2.$

194. $z = x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 2y,$ $\bar{D}: y \le 4 - x, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

195. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy,$ $\bar{D}: y \ge x^2, \quad y \le 4.$

196. $z = 10 - x^2 + 2xy,$ $\bar{D}: 0 \le y \le 4 - x^2.$

197. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y + 3,$ $\bar{D}: x \le 2, \quad 0 \le y \le x + 2.$

198. $z = x^2 + xy - 2,$ $\bar{D}: 4x^2 - 4 \le y \le 0.$

199. $z = x^2 + xy - 3x - y,$ $\bar{D}: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3.$

200. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,$ $\bar{D}: x \le 1, \quad 0 \le y \le x.$

4.2. Текущий контроль
Тестовые задания

Тест 1 (тема 1.1)

1. Если $f(x) = \sin x, \ x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, то из формулы Лагранжа следует, что $f'(c)$, где $c \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, равна

A) 0; B) $\frac{3}{2\pi}$; C) 1; D) $\frac{3\pi}{2}$.

2. Многочлен Маклорена $P_n(x)$ для функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеет вид:

A) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$; B) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}$;

C) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; D) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}$.

3. Найти предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \ldots$

A) $\ln 2$; B) 0; C) 1; D) $\frac{1}{\ln 2}$.

4. Найти предел, применяя правило Лопиталя несколько раз: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=...$

A) 1; B) 0; C) $+\infty$; D) 6.

5. С помощью тождественного преобразования и правила Лопиталя найти предел: $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x=...$

A) $-\infty$; B) 1; C) 0; D) -1.

6. Применяя основное логарифмическое тождество и результат предыдущего примера найти предел: $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x=...$

A) 0; B) $+\infty$; C) e; D) 1.

Тест 2 (тема 1.2)

1. Функция $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

A) возрастает при $x\in(-\infty;+\infty)$; B) убывает при $x\in(-\infty;+\infty)$;

C) убывает при $x\in(-\infty;0)$ и возрастает при $x\in(0;+\infty)$;

D) постоянна при $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ найти точку экстремума:

A) $x_0=-1$; B) $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; C) $x_0=0$; D) точки экстремума нет.

3. Из уравнений $y=-x$ (I) и $y=x$ (II) выбрать уравнения асимптот графика функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$:

A) (I) – асимптота и (II) - асимптота;
B) (I) – не асимптота и (II) – не асимптота;
C) (I) – асимптота, а (II) – не асимптота;
D) (I) – не асимптота, а (II) - асимптота.

4. Для функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ точка $x_0=0$ есть:

A) точка максимума; B) точка разрыва;
C) точка минимума; D) точка перегиба.

5. График функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ является выпуклым вниз на промежутке:

A) $(-\infty;0)$; B) $(0;+\infty)$; C) $(-\infty;+\infty)$; D) $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. Наибольшим значением функции $f(x)=4x^3-8x^2+4x$ на промежутке $[0;1]$ будет:

A) $\dfrac{25}{27}$; B) $\dfrac{4}{9}$; C) $\dfrac{9}{16}$; D) $\dfrac{16}{27}$.

Тест 3 (тема 2.1)

1. Найти произведение $2(2+3i)(3-2i)$

A) $6-4i$, B) $12-6i$, C) $24+10i$, D) $12+12i$.

2. Записать комплексное число $z=\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ в алгебраической форме

A) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$, B) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$, C) $1+2i$, D) $6-i$.

3. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z=1+i$

A) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, B) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

C) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, D) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Вычислить по формуле Муавра $(1+i)^{10}$

A) $32i$, B) $4(1-i)$, C) 64, D) $8i$.

5. Найдите все значения корня $\sqrt[3]{8}$

A) $z_1=2, z_2=-2, z_3=i\sqrt{3}$,

B) $z_1=2, z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

C) $z_1=2, z_2=-1+i\sqrt{3}, z_3=-1-i\sqrt{3}$,

D) $z_1=2, z_2=-2, z_3=-i\sqrt{3}$.

Тест 4 (тема 3.1)

1. Вычислить $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx.$

A) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2x^2}-8\sqrt{x}+C;$ B) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+8x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2x^2}+C;$

C) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}+8\sqrt{x}+C.$

2. Вычислить $\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

A) $\frac{(\arcsin x)^2}{2}+C;$ B) $\frac{(\arcsin x)^4}{4}+C;$

C) $\arcsin x\sqrt{1-x^2}+C.$

3. Вычислить $\int x\left(x^2+1\right)^4 dx$.

A) $\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{3}+C$; B) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$; C) $\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{10}+C$.

4. Вычислить $\int x^2\cos\left(x^3\right)dx$.

A) $3\sin\left(x^3\right)+C$; B) $-3\sin\left(x^3\right)+C$; C) $\dfrac{1}{3}\sin\left(x^3\right)+C$.

5. Вычислить $\int \dfrac{3x^2dx}{x^3+1}$.

A) $\ln|x^3+1|+C$; B) $3\ln|x^3+1|+C$; C) $\dfrac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$.

6. Вычислить $\int x^2\sqrt{8+x^3}dx$.

A) $\dfrac{9}{2}\sqrt{\left(8+x^3\right)^3}+C$; B) $\dfrac{2}{9}\sqrt{\left(8+x^3\right)^3}+C$;

C) $6\left(8+x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Тест 5 (тема 3.3)

1. Найти $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

A) $-2\sqrt{2-x^2}+\dfrac{1}{3}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$; B) $2\sqrt{2-x^2}+\dfrac{1}{3}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$;

C) $-2\sqrt{2-x^2}-\dfrac{1}{3}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

2. Найти $\int \dfrac{\cos\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

A) $\dfrac{1}{4}\sin\sqrt[4]{x}+C$; B) $4\sin\sqrt[4]{x}+C$; C) $-4\sin\sqrt[4]{x}+C$.

C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-3}{\sqrt{5}}+C$.

3. Найти $\int xe^{-2x}dx$.

A) $-2xe^{-2x}-4e^{-2x}+C$; B) $\dfrac{1}{2}xe^{-2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}+C$;

C) $-\dfrac{1}{2}xe^{-2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}+C$.

4. Найти $\int x^2\ln x dx$.

A) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{3}+C$; B) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$;

C) $\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+C$.

5. Найдите значения постоянных A и B в разложении

$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$.

A) $A=2,\quad B=-3$; B) $A=-2,\quad B=3$;

C) $A=2,\quad B=3$; D) $A=4,\quad B=-2$.

6. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx=...$

A) $\ln|x+1|-\frac{4}{x+2}+C$; B) $\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C$;

C) $\frac{4}{x+2}-\ln|x+1|+C$.

Тест 6 (тема 3.4)

1. Если для непрерывной на отрезке $[2;7]$ функции $f(x)$ известно, что $\int\limits_2^3 f(x)dx=-1,\quad \int\limits_3^7 f(x)dx=5$, то $\int\limits_2^7 f(x)dx$ равен

A) 4, B) 6, C) -4, D) -5.

2. Известно, что $\int\limits_0^2 f(x)dx=5$. Тогда $\int\limits_2^0 f(x)dx$ равен

A) 10, B) -5, C) 5, D) не существует.

3. Если для всех $x\geq 0$ выполняется равенство $F(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, то $F'(x)$ равна

A) xe^{-x^2}, B) e^{-t^2}, C) e^{-x^2}, D) te^{-t^2}.

4. Вычислить $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x}dx=...$

A) $\frac{14}{15}$; B) $\frac{15}{14}$; C) $\frac{2}{3}$.

5. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx=...$

A) $\frac{16+9\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{16-9\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{3-9\sqrt{3}}{3}$.

6. Вычислить $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ln x dx = \ldots$

A) $\dfrac{\sqrt{e^3}-4}{9}$; B) $\dfrac{9\sqrt{e^3}+4}{2}$; C) $\dfrac{2\sqrt{e^3}+4}{9}$.

Тест 7 (тема 3.4)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; x + y = 2$.

A) $\dfrac{7}{6}$; B) $6\dfrac{5}{6}$; C) $\dfrac{9}{2}$.

2. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x, \quad y = 0 \left(0 \le x \le \pi\right)$.

A) $\dfrac{\pi^2}{2}$; B) π^2; C) $\dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \dfrac{1}{3}x^3; 0 \le x \le 2; y = 0$.

A) $\dfrac{\pi}{3}\left(15^{\frac{3}{2}} - 1\right)$; B) $\dfrac{\pi}{9}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$; C) $\pi\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

4. Используя формулу $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$ для площади криволинейного сектора, заданного в полярных координатах, получим, что площадь области, ограниченной кардиоидой $r = 1 + \sin\varphi$ и лучами $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$, равна

A) $\dfrac{3\pi}{4} + 2$; B) $\dfrac{3\pi}{2}$ C) $\dfrac{3\pi}{4}$; D) $\dfrac{3\pi}{4} - 2$.

5. Используя формулу $l = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left[x_t'(t)\right]^2 + \left[y_t'(t)\right]^2}\, dt$ длины дуги AB, заданной параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где $t \in \left[t_A, t_B\right]$, вычислить длину дуги AB циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ где $t_A = 0, \quad t_B = \pi.$

A) -8; B) 8 C) 4; D) 2.

Тест 8 (тема 3.5)

1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$ или установить его расходимость

A) $\frac{1}{8}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) интеграл расходится.

2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ или установить его расходимость

A) 0; B) 1; C) -1; D) $+\infty$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ или установить его расходимость:

A) интеграл расходится; B) -1; C) 0; D) 1.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx$ или установить его расходимость:

A) интеграл расходится; B) -1; C) 0; D) 1.

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1+\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}}$, сравнивая его с интегралом $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

A) интеграл расходится; B) интеграл сходится;
C) исследование с помощью такого сравнения невозможно.

6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или установить его расходимость

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{\pi}{4}$; C) π; D) интеграл расходится.

Тест 9 (тема 4.1)

1. Значение функции $u = \frac{x^2 y - xz^2}{x^3 - z} - \frac{z}{3x}$ в точке $A(-1,2,1)$ равно

A) $\frac{11}{6}$; B) $-\frac{7}{6}$; C) $-\frac{4}{3}$; D) $\frac{1}{2}$.

2. Область задана системой неравенств $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y < 2$. Точка $A\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ будет для области

A) внутренней; B) граничной; C) внешней.

3. Точка $M(1,1)$ для области определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ будет

A) внутренней; B) граничной; C) внешней.

4. Функция $z = x^2 + y^2$ на множестве $x < 2$, $-1 \leq y \leq 1$

A) ограничена сверху, но не ограничена снизу;
B) ограничена снизу, но не ограничена сверху;
C) ограничена;
D) не ограничена ни сверху, ни снизу.

5. Функция $z = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{(x+1)\left(x^2 + y\right)}$

A) непрерывна; B) имеет одну точку разрыва;
C) имеет две точки разрыва; D) имеет линии разрыва.

Тест 10 (тема 4.2)

1. Частная производная z'_y функции $z = \ln\left(x^3 + 2xy\right)$ в точке $M_0(1;0)$ равна

A) 1; B) 3; C) 2; D) $\frac{1}{2}$.

2. Дифференциал функции $z = x^2\left(x - y^3\right)$ в точке $M_0(-1;1)$ равен

A) $5dx - 3dy$; B) $5dx + 3dy$; C) $3dx + 5dy$; D) $-3dx + dy$.

3. Для функции $u = x^2 - 2xy - ky^2$ будет выполняться $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ при k равном

A) 3; B) -1; C) -2; D) 1; E) 2.

4. Смешанная производная u'''_{xy^2} функции $u = e^{x^2 - y} + x^2 z$ в точке $M_0(2;4;-1)$ равна

A) -2; B) 1; C) 2; D) 4.

5. Функция $z(x, y)$ задана неявно уравнением $\sqrt{xy} + \sqrt{z} = x + z^2 + \dfrac{1}{2}$. В точке $A\left(\frac{1}{2};2;1\right)$ частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равна

A) 6; B) -6; C) $\frac{1}{6}$; D) $-\frac{1}{6}$.

Тест 11 (тема 4.4)

1. Уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ является $z - z_0 = f'_x\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + f'_y\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right)$. Поэтому уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 3x^2 + 4y^2 - 5$ в точке $\left(-1; 1; 2\right)$ имеет вид

A) $-6x + 8y - 14 = 0$; B) $-6x + 8y - z = 0$;

C) $6x - 8y + z + 2 = 0$; D) $6x - 8y + z + 12 = 0$.

2. Нормаль к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ задается уравнениями $\frac{x - x_0}{z'_x\left(x_0, y_0\right)} = \frac{y - y_0}{z'_y\left(x_0, y_0\right)} = \frac{z - z_0}{-1}$. Поэтому уравнениями нормали к поверхности $z = 3x^2 + 4y^2 - 5$ в точке $\left(-1; 1; 2\right)$ будут

A) $\frac{x - 1}{-6} = \frac{y + 1}{-8} = \frac{z + 2}{1}$; B) $\frac{x + 1}{-6} = \frac{y - 1}{8} = \frac{z - 2}{-1}$;

C) $\frac{x + 1}{-11} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 2}{4}$; D) $\frac{x - 1}{-11} = \frac{y + 1}{-13} = \frac{z + 2}{6}$.

3. Дана вектор-функция $\vec{a}\left(t\right) = t\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} - 3\cos t\,\vec{k}$. Тогда ее производная $\vec{a}'(t)$ равна

A) $\frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{2\sin t}\vec{j} - \frac{1}{3\cos t}\vec{k}$; B) $t\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} - 3\cos t\,\vec{k}$;

C) $\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 3\sin t\,\vec{k}$; D) $\vec{i} - 2\cos t\,\vec{j} + 3\sin t\,\vec{k}$.

4. Если закон движения материальной точки задан в виде $\vec{s}(t) = 2t^2\vec{i} - 3\vec{j} + t^3\vec{k}$, то вектор ускорения этой материальной точки в момент времени $t = 2$ равен

A) $8\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$; B) $4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$;

C) $8\vec{i} + 12\vec{k}$; D) $4\vec{i} + 12\vec{k}$.

ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ НА ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

№ теста	№ темы	Номера вопросов/номера правильных ответов					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**1.1**	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*D*
2	**1.2**	*C*	*C*	*A*	*C*	*C*	*D*
3	**2.1**	*C*	*B*	*B*	*A*	*C*	
4	**3.1**	*A*	*B*	*C*	*C*	*A*	*B*
5	**3.3**	*A*	*B*	*C*	*B*	*C*	*B*
6	**3.4**	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
7	**3.4**	*C*	*A*	*B*	*A*	*B*	
8	**3.5**	*A*	*D*	*D*	*A*	*A*	*A*
9	**4.1**	*B*	*B*	*C*	*B*	*D*	
10	**4.2**	*C*	*A*	*B*	*D*	*C*	
11	**4.4**	*D*	*B*	*C*	*D*		

4.3. Итоговый контроль

4.3.1. Вопросы для подготовки к экзамену (2 семестр)

1. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
2. Теорема Коши. Формула конечных приращений Лагранжа, ее геометрический смысл.
3. Правило Лопиталя.
4. Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа. Формулы Тейлора первого и второго порядков.
5. Формулы Тейлора (Маклорена) для функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ в окрестности точки $x = 0$.
6. Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции $y = f(x)$.
7. Определение экстремума функции $y = f(x)$. Необходимое условие экстремума.
8. Достаточное условие экстремума, использующее первую производную.
9. Достаточное условие экстремума, использующее вторую производную.
10. Определение выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$. Признак выпуклости (вогнутости).
11. Достаточное условие точки перегиба графика функции $y = f(x)$.
12. Асимптоты графика функции $y = f(x)$. Правило нахождения вертикальных и невертикальных асимптот.
13. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке.
14. Комплексные числа. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

15. Геометрическое изображение комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.

16. Возведение комплексного числа в натуральную степень. Формула Муавра.

17. Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.

18. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема о структуре множества первообразных для данной функции.

19. Свойства неопределенного интеграла. Инвариантность формул интегрирования.

20. Таблица основных первообразных.

21. Замена переменной в неопределенном интеграле

22. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

23. Определение простейших дробей. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

24. Интегрирование простейших рациональных дробей вида $\dfrac{A}{(x-a)^k}$.

25. Интегрирование простейших рациональных дробей вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (p^2-4q<0)$.

26. Интегрирование тригонометрических выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

27. Интегрирование тригонометрических выражений вида $R(\sin x)\cos x,\ R(\cos x)\sin x$.

28. Интегрирование иррациональных выражений вида $R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$

29. Интегрирование иррациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$, $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$, $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$, с помощью тригонометрических подстановок.

30. Понятие определенного интеграла.

31. Теорема существования определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла.

32. Свойства определенного интеграла.

33. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом.

34. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.
35. Замена переменной в определенном интеграле.
36. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
37. Несобственный интеграл от непрерывной функции по бесконечному промежутку.
38. Несобственный интеграл от неограниченной функции по конечному промежутку.
39. Определение абсолютной сходимости несобственного интеграла. Признак сравнения. Геометрическая иллюстрация признака сравнения.
40. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.
41. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений. Вычисление объемов тел вращения.
42. Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах и кривой, заданной параметрически.
43. Вычисление площади поверхности вращения.
44. Определение функции нескольких переменных. Функция n переменных как функция точки в n-мерном пространстве.
45. Частные приращения и частные производные. Геометрический смысл частной производной функции двух переменных.
46. Дифференцируемость функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции двух переменных. Определение полного дифференциала.
47. Дифференцирование сложной функции одной и двух переменных. Полная производная. Инвариантность формы полного дифференциала.
48. Неявные функции одной переменной. Теорема о неявной функции. Дифференцирование неявной функции одной переменной.
49. Неявные функции двух переменных. Дифференцирование неявной функции двух переменных.
50. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
51. Формула Тейлора для функции двух переменных.
52. Определение экстремума функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
53. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.
54. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

4.3.2. Типовые задачи для подготовки к экзамену (2 семестр)

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)},\qquad \acute{a})\ \lim_{x\to 0} x^{1-e^{2x}},\qquad \hat{a})\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x},$$

$$\tilde{a})\ \lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2},\qquad \ddot{a})\ \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}\right),\qquad \mathring{a})\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

2. Провести полное исследование и построить график функции

$$\text{а) } y=\frac{x^2+1}{x^2-1},\quad \text{б) } y=x^2e^{-x},\quad \text{в) } y=e^{-x^2},$$

$$\text{г) } y=\frac{x}{1+x^2},\qquad \text{д) } y=\frac{x^3}{3-x^2}.$$

3. Выполнить действия и изобразить число на комплексной плоскости. Найти модуль и главное значение аргумента.

$$\text{а) } \frac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}},\qquad \text{б) } \frac{2}{1-3\mathrm{i}},\qquad \text{в) } (4+\mathrm{i})(3-5\mathrm{i}).$$

4. Найти интегралы

$$1)\int\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}dx;\quad 2)\int\frac{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx;\quad 3)\int\mathrm{tg}^2 x\,dx;\quad 4)\int\sin 3x\cos 5x\,dx;$$

$$5)\int\frac{dx}{x^2(x+2)(x^2+4)};\quad 6)\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)};\quad 7)\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x+\cos x};\quad 8)\int\frac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}dx;$$

$$9)\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx;\quad 10)\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx;$$

$$11)\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx;\quad 12)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x+x^2}};\quad 13)\int\frac{2x-1}{x^2+4x+13}dx.$$

5. Вычислить определенные интегралы

$$a)\int_0^1\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\,dx;\quad \acute{a})\int_1^5(x-2)\,dx;\quad \hat{a})\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\mathrm{tg}^2x}{(1+\mathrm{tg}x)^3}dx.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \\ y^2 = 5x \end{cases}$; в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

7. Вычислить длину дуги а) кривой $y = x^{3/2}$, отсеченной прямой $y = 8$;

б) одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;

в) первого завитка спирали $\rho = a\varphi$.

8. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox

а) дуги кривой $\frac{x^3}{3}$ от $x = -2$ до $x = 2$;

б) линии $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ от $t = 0$ до $t = \pi$.

9. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

а) $xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$ - вокруг оси Ox,

б) $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$ - вокруг оси Оу.

10. Найти несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$1)\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx, \quad 2)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad 3)\int_{-1}^{+1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad 4)\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}.$$

11. Указать область определения функции и сделать чертеж области

$$a) z = x + y, \quad б) z = \frac{y}{x+4}, \quad c) z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}, \quad д) z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

12. Найти полные дифференциалы первого и второго порядка для функций

$$a) z = x^2 y, \quad b) z = x\ln y, \quad c) z = \arcsin\frac{y}{x}$$

13. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = x^3 - \sin(xy)$.

14. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = u^v$, где $u = \arcsin x, \quad v = \mathrm{tg} x$.

15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^2 y$, где $y = \cos x$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$.

17. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - (z-5)^2 = 0$ в точке $A(4, 3, 0)$.

18. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

19. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

а) $z = xy$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1$, $y = -1$, $x + y = 1$;

б) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

20. Используя метод множителей Лагранжа, найти условный экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

Содержание

Математика
Часть 1
2-й семестр

Учебно-методический комплекс

Технический редактор Т.В. Шабанова
Сводный темплан 2009 г.

Лицензия ЛР №020308 от 14.02.97

Подписано в печать			Формат 60x84 1/16
Б. кн.-журн.	П.л.14,25	Б.л. 7,125	Изд-во СЗТУ
Тираж 1000			Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет
Издательство СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации
университетов России
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, д. 5