Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Санкт - Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)"

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

**А.В. Козлов, А.Н. Полосин, П.И. Комаров,
В.Н. Уланов, А.А. Чиркова**

НАДЁЖНОСТЬ, ЭРГОНОМИКА И КАЧЕСТВО АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

Санкт-Петербург
2011

УДК 681.3.06+519.6 (076.1)

Козлов, А.В., Надёжность, эргономика и качество автоматизированных систем: методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения / А.В. Козлов, А.Н. Полосин, П.И. Комаров, В.Н. Уланов, А.А. Чиркова. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2011. – 59 с.

Целью методических указаний является приобретение студентами умений и навыков применения теории надёжности при проектировании высоконадёжных технических систем. Темы контрольных работ посвящены вопросам проектирования технической системы по заданным показателям надёжности и риска, рассматривается алгоритм анализа и синтеза оптимальной структуры системы, излагаются компьютерные технологии решения задач. По каждому разделу приведены контрольные задания с примерами их решения.

Методические указания предназначены для студентов 4 курса заочной формы обучения направления подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» и соответствует рабочей программе дисциплины «Надёжность, эргономика и качество автоматизированных систем».

Методические указания формируют у студентов следующие профессиональные компетенции (ПК):

- способность осваивать методики использования программных средств для решения практических задач (ПК-2);
- способность обосновывать принимаемые проектные решения, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности (ПК-6).

Рис. 6, табл. 10, библиогр. назв. 11.

Рецензент:

В.А. Холоднов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов СПбГТИ(ТУ)

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления, протокол № 2 от 01.09.2011.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях приведены 3 контрольные работы. Студенту необходимо представить отчёт со *всеми тремя* контрольными работами, выполненными в соответствии с данными методическими указаниями. Номер варианта формируется согласно вычету по модулю 25. Это означает, что номер варианта равен остатку от деления на 25 того числа, которое образуется из двух последних цифр номера зачётной книжки. Если же это число меньше 25, то номер варианта равен этому числу. В таблице 1 приведены номера вариантов, составленные по этому принципу.

Таблица 1 − Номера вариантов для выполнения контрольных работ

Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта	Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта
01, 26, 51, 76	1	13, 38, 63, 88	13
02, 27, 52, 77	2	14, 39, 64, 89	14
03, 28, 53, 78	3	15, 40, 65, 90	15
04, 29, 54, 79	4	16, 41, 66, 91	16
05, 30, 55, 80	5	17, 42, 67, 92	17
06, 31, 56, 81	6	18, 43, 68, 93	18
07, 32, 57, 82	7	19, 44, 69, 94	19
08, 33, 58, 83	8	20, 45, 70, 95	20
09, 34, 59, 84	9	21, 46, 71, 96	21
10, 35, 60, 85	10	22, 47, 72, 97	22
11, 36, 61, 86	11	23, 48, 73, 98	23
12, 37, 62, 87	12	24, 49, 74, 99	24

Если две последние цифры зачётной книжки 00, 25, 50 или 75, то номер варианта − 25.

Отчёт о выполненных контрольных работах должен включать: титульный лист, условие задачи и подробную процедуру решения, аналогично тому, как это представлено в примерах выполнения работ. Во время защиты отчёта студент должен уметь обосновать представленное в отчёте решение. На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер варианта.

Приступая к выполнению контрольных работ, рекомендуется ознакомиться со следующим учебным пособием:

Козлов, А.В. Надёжность, эргономика и качество автоматизированных систем. Базовый курс: учебное пособие для студентов заочной формы обучения / А.В. Козлов, А.Н. Полосин, П.И. Комаров. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2011. − 47 с.

1 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЁЖНОСТИ И РИСКА НЕРЕЗЕРВИРОВАННОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.1 Теоретические сведения

1.1.1 Постановка задачи

Исходные данные:

- структурная схема системы в виде основного (последовательного в смысле надёжности) соединения элементов;
- n − количество элементов системы;
- λ_i − интенсивность отказа i-го элемента системы, $i = 1, 2, \dots, n$;
- r_i − риск из-за отказа i-го элемента системы, $i = 1, 2, \dots, n$;
- R − допустимый риск;
- T − суммарное время работы системы.

Необходимо определить:

- показатели надёжности системы:
  1) $P_c(t)$ − вероятность безотказной работы системы в течение времени t, а также её значения при $t = T$ и $t = T_1$;
  2) T_1 − среднее время безотказной работы системы;
- $R_c(t)$ − риск системы как функцию времени; значение риска при $t = T$ и $t = T_1$;
- $R_c^*(t)$ − риск системы, рассчитанный по приближённой формуле;
- возможность расчёта риска по приближённой формуле.

1.1.2 Расчётные формулы для исследования надёжности и риска нерезервированной системы

Основными показателями надёжности нерезервированной невосстанавливаемой системы являются: $P_c(t)$ − вероятность безотказной работы системы в течение времени t, T_1 − среднее время безотказной работы системы. При постоянных интенсивностях отказов элементов

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}, \; T_1 = \frac{1}{\lambda_c},$$

где $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ − интенсивность отказа системы.

Риск системы $R_c(t)$ и $R_c^*(t)$ вычисляются по следующим формулам:

$$R_c(t) = \frac{Q_c(t)}{\lambda_c} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i, \tag{1}$$

$$R_c^*(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) r_i, \tag{2}$$

где $Q_c(t) = 1 - P_c(t)$ − вероятность отказа системы в течение времени t;

$q_i(t)$ − вероятность отказа i-го элемента системы в течение времени t.

Формула (1) является точной, формула (2) − приближённой. Если элементы системы равнонадёжны, то отношение $R_c(t)$ к $R_c^*(t)$ имеет вид:

$$G_R(t, n) = \frac{R_c(t)}{R_c^*(t)} = \frac{1 - e^{-n\lambda t}}{n\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}. \tag{3}$$

$G_R(t, n)$ является убывающей функцией времени, при этом:

$$\lim_{t \to 0} G_R(t, n) = 1, \; \lim_{t \to \infty} G_R(t, n) = \frac{1}{n}.$$

Это означает, что с увеличением длительности времени работы системы погрешность приближённой формулы увеличивается.

1.1.3 Последовательность выполнения работы

Контрольную работу следует выполнять в такой последовательности:

1. Вычислить показатели надёжности системы $P_c(t)$ и T_1. Значение вероятности безотказной работы следует получить при $t = T$ и $t = T_1$.

2. Исследовать функцию риска системы по точной формуле (1). Для этого:

- получить формулу риска для заданных n, λ_i, r_i;

- исследовать зависимость $R_c(t)$, представив функцию в виде графика и таблицы;
- вычислить значение риска для исходных данных своего варианта при $t = T$ и $t = T_1$.

3. Исследовать зависимость $G_R(t,n)$ при допущении, что элементы системы равнонадёжны и интенсивность отказа каждого элемента равна их средней интенсивности отказов, то есть $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

4. Сделать выводы.

По результатам контрольной работы представляется отчёт, в котором обязательными являются следующие пункты:

1. Постановка задачи.
2. Расчётные формулы.
3. Численные значения показателей надёжности и риска исследуемой системы.
4. Значение времени непрерывной работы системы, при котором обеспечивается требуемое значение риска.
5. Графики и таблицы функций риска.
6. Выводы по результатам исследований.

1.2 Задание к контрольной работе № 1

В вариантах заданий приняты следующие обозначения:
T − суммарное время работы системы, ч;
R − допустимый риск, усл. ед.;
λ_i − интенсивность отказа i-го элемента системы, ч$^{-1}$;
r_i − риск системы из-за отказа i-го элемента, усл. ед.

Вариант 1

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
r, усл. ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

T = 1500 ч, R = 8000 усл. ед.

Вариант 2

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	2,6	3,2	6,4	1,2	3	1,8	5,1	4,2
r, усл. ед.	6800	9200	2000	20000	9200	1000	2100	600

T = 1200 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 3

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,5	0,2	1	1,2	0,6	2,1	1,2	0,7
r, усл. ед.	12000	8000	6000	560	3200	7600	10000	770

T = 2500 ч, R = 3200 усл. ед.

Вариант 4

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,2	0,8	2,3	0,1	0,5	1,2	3,4	0,7
r, усл. ед.	1200	2600	3000	14000	4500	9000	3500	2750

T = 3800 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 5

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	2,3	4,7	0,6	5	4,8	3,2	2,6
r, усл. ед.	2500	2600	1800	16000	4000	2600	1200	860

T = 4000 ч, R = 4800 усл. ед.

Вариант 6

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,2	0,8	1,6	0,2	0,1	0,05	6,2	2,4
r, усл. ед.	6800	2400	3200	670	5000	20000	360	780

T = 4200 ч, R = 3850 усл. ед.

Вариант 7

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	3,2	0,1	1	0,7	1.2	0,3	0,1	1,2
r, усл. ед.	368	680	12000	7000	3200	1200	590	1050

T = 5000 ч, R = 860 усл. ед.

Вариант 8

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
r, усл. ед.	368	680	12000	7000	3200	1200	590	1050

T = 5000 ч, R = 860 усл. ед.

Вариант 9

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	2,6	3,2	6,4	1,2	3	1,8	5,1	4,2
r, усл. ед.	6800	2400	3200	670	5000	20000	360	780

T = 4200 ч, R = 3850 усл. ед.

Вариант 10

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,5	0,2	1	1,2	0,6	2,1	1,2	0,7
r, усл. ед.	2500	2600	1800	16000	4000	2600	1200	860

T = 4000 ч, R = 4800 усл. ед.

Вариант 11

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,2	0,8	2,3	0,1	0,5	1,2	3,4	0,7
r, усл. ед.	12000	8000	6000	560	3200	7600	10000	770

T = 2500 ч, R = 3200 усл. ед.

Вариант 12

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	2,3	4,7	0,6	5	4,8	3,2	2,6
r, усл. ед.	6800	9200	2000	20000	9200	1000	2100	600

T = 1200 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 13

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,2	0,8	1,6	0,2	0,1	0,05	6,2	2,4
r, усл. ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

T = 1500 ч, R = 8000 усл. ед.

Вариант 14

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	3,2	0,1	1	0,7	1.2	0,3	0,1	1,2
r, усл. ед.	1200	2600	3000	14000	4500	9000	3500	2750

T = 3800 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 15

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
r, усл. ед.	6800	2400	3200	670	5000	20000	360	780

T = 4200 ч, R = 3850 усл. ед.

Вариант 16

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	2,6	3,2	6,4	1,2	3	1,8	5,1	4,2
r, усл. ед.	2500	2600	1800	16000	4000	2600	1200	860

T = 4000 ч, R = 4800 усл. ед.

Вариант 17

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,5	0,2	1	1,2	0,6	2,1	1,2	0,7
r, усл. ед.	12000	8000	6000	560	3200	7600	10000	770

T = 3800 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 18

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	2,3	4,7	0,6	5	4,8	3,2	2,6
r, усл. ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

T = 1500 ч, R = 8000 усл. ед.

Вариант 19

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	2,3	4,7	0,6	5	4,8	3,2	2,6
r, усл. ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

T = 1500 ч, R = 8000 усл. ед.

Вариант 20

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,2	0,8	1,6	0,2	0,1	0,05	6,2	2,4
r, усл. ед.	12000	8000	6000	560	3200	7600	10000	770

T = 2500 ч, R = 3200 усл. ед.

Вариант 21

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	3,2	0,1	1	0,7	1.2	0,3	0,1	1,2
r, усл. ед.	2500	2600	1800	16000	4000	2600	1200	860

T = 4000 ч, R = 4800 усл. ед.

Вариант 22

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
r, усл. ед.	6800	9200	2000	20000	9200	1000	2100	600

T = 1200 ч, R = 5000 усл. ед.

Вариант 23

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,5	0,2	1	1,2	0,6	2,1	1,2	0,7
r, усл. ед.	6800	2400	3200	670	5000	20000	360	780

T = 4200 ч, R = 3850 усл. ед.

Вариант 24

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,5	0,2	1	1,2	0,6	2,1	1,2	0,7
r, усл. ед.	368	680	12000	7000	3200	1200	590	1050

T = 5000 ч, R = 860 усл. ед.

Вариант 25

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	0,2	0,8	2,3	0,1	0,5	1,2	3,4	0,7
r, усл. ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

T = 1500 ч, R = 8000 усл. ед.

1.3 Пример выполнения контрольной работы № 1

Пусть дана система со следующими исходными данными:

- число элементов системы $n = 10$;
- время непрерывной работы $T = 1000$ ч;
- допустимый риск $R = 5000$ усл.

Значения риска и интенсивностей отказов элементов приведены в таблице 2.

Таблица 2 − Исходные данные примера к контрольной работе № 1

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda \cdot 10^{-5}$, ч$^{-1}$	1,2	0,8	0,5	1	1,5	0,6	0,09	0,05	1	1,5
r, усл. ед.	2000	300	8000	1000	1200	60	5000	6000	100	120

1.3.1. Определение показателей надёжности системы

Интенсивность отказов системы равна $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Подставляя в это выражение значения интенсивностей отказов элементов из таблицы 2, получим:

$\lambda_c = 8{,}24 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$. Тогда вероятность и среднее время безотказной работы будут равны:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t} = e^{-8{,}24 \cdot 10^{-5} \cdot t},\ T_1 = \frac{1}{\lambda_c} = 12136 \text{ ч.}$$

При $t = T = 1000$ ч $P_c(1000) = e^{-8{,}24 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3} = 0{,}918$.

1.3.2 Определение риска системы по точной формуле

Так как $Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c \cdot t}$, $\lambda_c = 8{,}24 \cdot 10^{-5}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i r_i = 0{,}10506$, то в соответствии с (1) функция риска будет равна:

$$R_c(t) = \frac{1 - e^{-8{,}24 \cdot 10^{-5} \cdot t}}{8{,}24 \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}10506, \text{ или } R_c(t) = 1275 \cdot \left(1 - e^{-8{,}24 \cdot 10^{-5} \cdot t}\right).$$

Для нашего примера при $t = 1000$ ч риск $R_c(1000) = 100{,}848$. Для $t = T_1 = 12136$ ч значение риска $R_c(t) = 805{,}953$. Из полученных значений $R_c(t)$ видно, что риск исследуемой системы ниже допустимого значения, равного 5000 условных единиц.

1.3.3 Исследование функции риска

Предполагая, что все элементы системы равнонадёжны, а интенсивность отказа каждого элемента $\lambda = \dfrac{\lambda_c}{n} = 0{,}824 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, получим следующее выражение риска:

$$R_c(t) = \frac{1 - e^{-n \cdot \lambda \cdot t}}{n \cdot \lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i = \frac{1 - e^{-0{,}824 \cdot 10^{-5} \cdot n \cdot t}}{0{,}824 \cdot 10^{-5} \cdot n} \cdot 0{,}10506 = 12750 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}824 \cdot 10^{-5} \cdot n \cdot t}}{n}.$$

Найдём зависимость $R_c(t)$ при различных значениях n в виде графиков и таблиц, используя возможности пакета MathCad (рисунок 1)[1]. Построим

[1] Здесь и во всех аналогичных случаях решение, полученное в MathCad, не будет, как правило, сопровождаться

графики функции риска при $n = 10, 30, 50$. На экране образуется семейство графиков (в нашем случае три графика). Из рисунка 2 видно, что с увеличением времени работы t работы системы техногенный риск функционирования системы увеличивается (это легко наблюдать из таблицы функции риска; например, с увеличением t с 1500 до 12000 часов риск увеличивается примерно со 150 до 800 условных единиц при $n = 10$) и при $t \to \infty$ стремится к постоянной величине, равной среднему значению риска. Ниже приведены расчёты, полученные в среде MathCad. Некоторые расхождения между результатами, полученными в MathCad, и результатами рассматриваемого примера, взятого из [2], объясняются погрешностями округления.

$$n := 10$$

$$\lambda := \begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{-5} \\ 0.8\cdot10^{-5} \\ 0.5\cdot10^{-5} \\ 1\cdot10^{-5} \\ 1.5\cdot10^{-5} \\ 0.6\cdot10^{-5} \\ 0.09\cdot10^{-5} \\ 0.05\cdot10^{-5} \\ 1\cdot10^{-5} \\ 1.5\cdot10^{-5} \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 2000 \\ 300 \\ 8000 \\ 1000 \\ 1200 \\ 60 \\ 5000 \\ 6000 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\lambda c := \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$$

$$\lambda c = 8.24\times 10^{-5}$$

$$Pc(t) := e^{-\lambda c\cdot t}$$

$$T1 := \frac{1}{\lambda c}$$

$$a := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lambda_i\cdot r_i\right)$$

$$Pc(1000) = 0.9209 \qquad Rc(t) := a\cdot\frac{1 - e^{-\lambda c\cdot t}}{\lambda c}$$

$$T1 = 1.21359\times 10^{4}$$

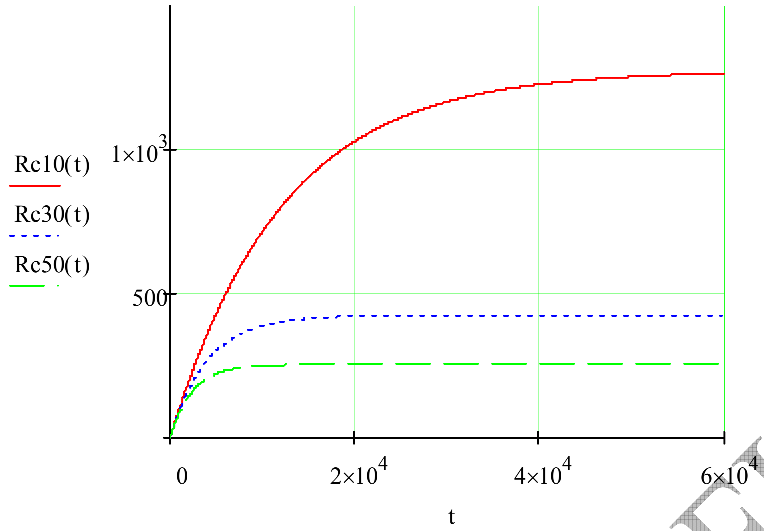
$$Rc(1000) = 100.84801 \qquad \lambda m := \frac{\lambda c}{n}$$

$$Rc(T1) = 805.95371$$

Рисунок 1 − Расчётные формулы примера в среде MathCad

$$Rc10(t) := a\cdot\frac{1 - e^{-10\cdot\lambda m\cdot t}}{\lambda m\cdot 10} \qquad Rc30(t) := a\cdot\frac{1 - e^{-30\cdot\lambda m\cdot t}}{\lambda m\cdot 30} \qquad Rc50(t) := a\cdot\frac{1 - e^{-50\cdot\lambda m\cdot t}}{\lambda m\cdot 50}$$

какими-либо комментариями; читатель без труда сможет сопоставить формулы из MathCad с формулами, представленными в тексте. Кроме того, предполагается, что студент уже владеет основными навыками работы в MathCad после изучения соответствующей литературы (например, [11]) или дисциплин (например, «Вычислительной математики»), поэтому описание процедур работы в MathCad при создании расчётных формул не приводится.



t := 0, 1500.. 1200(
Rc10(t) =

0
148.24009
279.24479
395.018
497.33063
587.74771
667.65229
738.26663
800.67087

Рисунок 2 − Таблица и график функции риска

Так как $R_c(t)$ возрастает с ростом t, то представляет интерес предельное время, выше которого риск будет превышать допустимое значение. Решение задачи сводится к определению корня уравнения

$$R_c(t) = \frac{Q_c(\tau)}{\lambda_c} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i \ .$$

Так как в рассматриваемом случае $\lambda_c = 8{,}24 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i = 0{,}10506$, $R = 5000$, то, подставляя эти значения в последнее выражение, получим:

$$5000 = 1275\left(1 - e^{-8{,}24 \cdot 10^{-5}\,\tau}\right).$$

Решая это уравнение в MathCad с помощью вычислительного блока Given/Find, получим критическое значение τ, как показано ниже на рисунке 3.

$$f(x) := 1275\cdot\left(1 - e^{-8.24\cdot10^{-5}\cdot x}\right) - 5000$$

Given

$$f(x) = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow -13011.173218703074874 + 38126.124436769335418i \rightarrow -1.30112\times10^{4} + 3.81261i\times10^{4}$$

Рисунок 3 – Определение критического значения времени в MathCad

В нашем примере вещественного корня нет. Это значит, что при любом t риск системы не превосходит допустимого значения. Однако следует отметить, что при ужесточении требований к системе, то есть при понижении уровня допустимого риска уравнение будет иметь вещественный корень, и, следовательно, определённое значение предельного времени (например, при $R = 500$ $\tau = 6041{,}7$ ч).

Для анализа зависимости $G_R(t,n)$ представим эту функцию в виде графиков (рисунок 4) и таблиц (рисунок 5). Построим графики для нескольких значений n, например для n, $3n$, $5n$, где n – число элементов системы.

$$Gr10(t) := \frac{1 - e^{-10\cdot\lambda m\cdot t}}{10\cdot\left(1 - e^{-\lambda m\cdot t}\right)} \qquad Gr30(t) := \frac{1 - e^{-30\cdot\lambda m\cdot t}}{30\cdot\left(1 - e^{-\lambda m\cdot t}\right)} \qquad Gr50(t) := \frac{1 - e^{-50\cdot\lambda m\cdot t}}{50\cdot\left(1 - e^{-\lambda m\cdot t}\right)}$$

$$t := 1, 1000 .. 30000$$

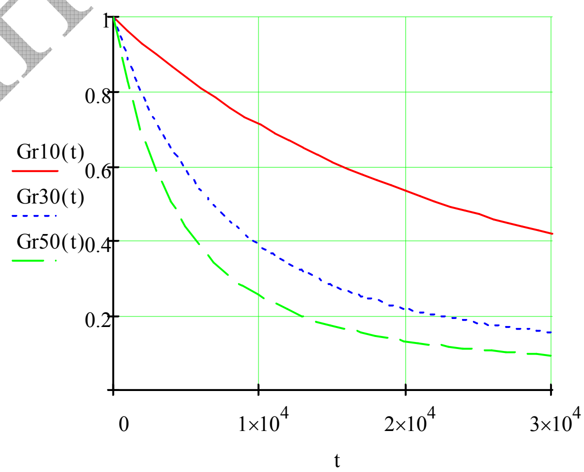


Рисунок 4 – График функции $G_R(t,n)$ для разных n

Gr10(t) =	Gr30(t) =	Gr50(t) =
0.99996	0.99988	0.9998
0.96387	0.88964	0.82298
0.9296	0.79557	0.68697
0.89704	0.71502	0.5813
0.86611	0.64581	0.49837
0.83672	0.58612	0.43259
0.80876	0.53446	0.37985
0.78218	0.48959	0.33712
0.75688	0.45045	0.30212
0.7328	0.4162	0.27316
0.70987	0.38611	0.24895
0.68804	0.35956	0.22851
0.66723	0.33606	0.21109
0.6474	0.31518	0.19612
0.62848	0.29656	0.18315
...	...	...

Рисунок 5 − Таблицы значений функции $G_R(t,n)$ для разных n

Из анализа графиков и таблиц можно сделать два важных вывода:

1. Чем больше элементов n и чем больше время работы системы, тем больше погрешность приближённой формулы.

2. Приближённой формулой можно пользоваться в том случае, когда время работы системы мало и риск, вычисленный по приближённой формуле, не превышает допустимого значения.

2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ

СТРУКТУРЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ ЕЁ НАДЁЖНОСТИ

2.1 Теоретические сведения

2.1.1 Постановка задачи

Исходные данные:

- структурная схема системы, представляющая собой основное (последовательное) соединение элементов;
- n − количество элементов;
- t − время непрерывной работы системы;
- λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ − интенсивность отказа элементов исходной системы;
- $t_{вi}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ − среднее время восстановления элементов исходной системы;
- R_c − коэффициент оперативной готовности.

Для всех вариантов задания $n = 10$, $t = 10$ ч, $R_c = 0{,}95$. Значения λ_i и $t_{вi}$ приведены далее в разделе 2.2.

Необходимо определить:

- оптимальную структурную схему системы, удовлетворяющую требованиям надежности;
- показатели надежности системы: вероятность безотказной работы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы T_{1c}, коэффициент готовности $K_{гc}$, наработку на отказ T_c.

Оптимальной считается структурная схема, удовлетворяющая требованиям надёжности и имеющая минимальное число резервных элементов.

Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон распределения отказов и восстановления отказавших элементов.

2.1.2 Методика решения задачи синтеза структуры системы

Для обеспечения требуемой надёжности $R_c = 0{,}95$ используется структурная избыточность. Допускается применение любого её вида. При этом рекомендуется следующая последовательность решения задачи:

- анализ надёжности исходной системы;
- определение кратности общего резервирования, обеспечивающего требования надёжности;
- определение кратности раздельного резервирования, обеспечивающего требования надёжности при минимальном числе резервных элементов;
- определение показателей надёжности системы оптимальной структуры.

2.1.3 Анализ надёжности исходной системы

Коэффициент оперативной готовности (по крайней мере, для экспоненциального распределения) можно определить по приближенной формуле:

$$R_c(t) = K_{гс} \cdot P_c(t).$$

Будем анализировать надёжность исходной системы по критерию $R_c(t) = K_{гс} \cdot P_c$, где $K_{гс}$ − коэффициент готовности системы, $P_c(t)$ − вероятность безотказной работы системы в течение времени t.

Коэффициент готовности одного элемента вычисляется по формуле:

$$K_{гi}(t) = \frac{1}{1+\varepsilon_i},\ i = 1,2,...,n.$$

Коэффициент готовности системы вычисляется по формуле:

$$K_{гс}(t) = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i},\ \mu_i = \frac{1}{t_{вi}},\ \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Вероятность безотказной работы при условии независимости отказов её элементов определяется по формуле:

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t),$$

где $p_i(t)$ − вероятность безотказной работы *i*-го элемента.

Предполагается, что интенсивность отказов элементов есть величина постоянная. Тогда

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}\ ,\ P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t}\ ,$$

где $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Одновременно с расчётом коэффициента оперативной готовности системы рассчитываются коэффициент готовности и вероятность безотказной работы элементов системы. Это необходимо для установления влияния надёжности элементов на надёжность системы и принятия решения об их резервировании. Расчёты целесообразно свести в таблицу 3:

Таблица 3 − Исходные данные для анализа надёжности системы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_i, ч$^{-1}$										
$t_{вi}$, ч										
ε_i										
$p_i(t)$										
$K_{гi}$										

По данным таблицы находятся показатели надёжности системы $P_c(t)$, $K_{гс}$, R_c.

2.1.4 Определение кратности общего резервирования

Определение кратности m общего резервирования с постоянно включённым резервом и по методу замещения осуществляется путём решения следующих трансцендентных уравнений:

1) постоянно включённый резерв:

$$R_c = \left(1 - \left(1 - P_c(t)\right)^{m+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i! \cdot \varepsilon_c{}^{i}}}\right);$$

2) резервирование замещением:

$$R_c = P_c(t) \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{\left(-\ln P_c(t)\right)^i}{i!} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\varepsilon_c{}^i}} \right).$$

В формулах приняты следующие обозначения:

- $P_c(t)$ − вероятность безотказной работы нерезервированной системы;
- $\varepsilon_c = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$;
- $R_c = 0{,}95$ − заданное значение коэффициента оперативной готовности.

2.1.5 Определение кратности раздельного резервирования

Методика определения кратности раздельного резервирования состоит в следующем: по данным расчёта надёжности исходной системы выбирается наименее надёжный элемент (у которого показатель ε_i наименьший) и дублируется таким же элементом методом постоянного резервирования.

Выполняется расчёт надёжности системы новой структуры, то есть структуры с одним дублированным элементом. Если надёжность новой системы не удовлетворяет требуемой (то есть условию $R_c \geq 0{,}95$), то выбирается следующий наименее надёжный элемент, который также дублируется, и вновь проводится расчёт надёжности системы теперь уже с двумя резервными элементами. Вновь проверяется условие $R_c \geq 0{,}95$ и т.д., до тех пор, пока условие не будет выполнено.

Если в процессе такого последовательного приближения окажется, что наименее надёжным является уже дублированный элемент, то его резервируют ещё раз.

Если условие $R_c \geq 0{,}95$ выполнено, то считается, что оптимальная структура найдена. Теперь следует определить число её элементов и вычислить показатели надёжности.

Аналогичные расчеты следует выполнить, применяя раздельное резервирование замещением.

В результате расчётов будут получены две структуры, удовлетворяющие требованиям надёжности. Выполнив их сравнительный анализ, следует выбрать оптимальную структуру системы с точки зрения минимума числа элементов системы.

2.1.6 Алгоритм анализа и синтеза оптимальной структуры системы

Алгоритм анализа надёжности исходной системы выглядит следующим образом:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, ,$$

$$\varepsilon_i = \lambda_i \cdot t_{вi} \, , \; i = 1, 2, \; \ldots \; , n,$$

$$\varepsilon_c = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, ,$$

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t} \, ,$$

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t), \quad P_c(t) = e^{-\lambda_c t} \, ,$$

$$K_{гi} = \frac{1}{1+\varepsilon_i} \, , \quad i = 1, 2, \; \ldots \; , n \, ,$$

$$K_{гc} = \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = \frac{1}{1+\varepsilon_c} \, ,$$

$$R_c = K_{гc} \cdot P_c(t).$$

Алгоритм определения кратности общего резервирования следующий:

1) постоянно включённый резерв:

$$R_{пос} = \left(1 - \left(1 - P_c(t)\right)^{m+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i! \cdot \varepsilon_c^i}} \right);$$

2) резерв замещением:

$$R_c = P_c(t) \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{(-\ln P_c(t))^i}{i!} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\varepsilon_c^i}} \right).$$

Кратность раздельного резервирования оптимальной системы определяется так:

1) раздельное постоянное резервирование:

$$V_p = \begin{pmatrix} 1-(1-p_1)^{m_1+1}, 1-(1-p_2)^{m_2+1}, \ldots, 1-(1-p_n)^{m_n+1}, \\ \left(1-(1-p_1)^{m_1+1}\right) \cdot \left(1-(1-p_2)^{m_2+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-(1-p_n)^{m_n+1}\right) \end{pmatrix},$$

$$V_{K_г} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_1+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_1^i}}, 1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_2+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_2^i}}, \ldots, 1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_n+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_n^i}}, \\ \left(1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_1+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_1^i}} \right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_2+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_2^i}} \right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m_n+1} \dfrac{1}{i!\,\varepsilon_n^i}} \right) \end{pmatrix}.$$

Значение коэффициента оперативной готовности определяется как произведение последних элементов векторов V_p и $V_{K_г}$;

2) раздельное резервирование замещением:

$$V_p = \begin{pmatrix} p_1(t) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_1} \dfrac{(-\ln p_1(t))^i}{i!}, p_2(t) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_2} \dfrac{(-\ln p_2(t))^i}{i!}, \ldots, p_n(t) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_n} \dfrac{(-\ln p_n(t))^i}{i!}, \\ P_c(t) \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_1} \dfrac{(-\ln p_1(t))^i}{i!} \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_2} \dfrac{(-\ln p_2(t))^i}{i!} \cdot \ldots \cdot \sum\limits_{i=0}^{m_n} \dfrac{(-\ln p_n(t))^i}{i!} \end{pmatrix},$$

$$V_{K_г} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_1+1}\dfrac{1}{\varepsilon_1^i}},\, 1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_2+1}\dfrac{1}{\varepsilon_2^i}},\, \dots,\, 1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_n+1}\dfrac{1}{\varepsilon_n^i}}, \\ \left(1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_1+1}\dfrac{1}{\varepsilon_1^i}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_2+1}\dfrac{1}{\varepsilon_2^i}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m_n+1}\dfrac{1}{\varepsilon_n^i}}\right) \end{pmatrix}.$$

Значение коэффициента оперативной готовности определяется как произведение последних элементов векторов V_p и $V_{K_г}$.

2.1.7 Компьютерные технологии анализа и синтеза оптимальной структуры системы

Компьютерная реализация алгоритма синтеза оптимальной структуры системы по критериям надёжности требует решения следующих задач:

- представление данных λ_i и $t_{вi}$ в виде векторов;
- умножение векторов для получения вектора ε_i;
- вычисление суммы элементов вектора для получения λ_c и ε_c;
- вычисление произведения элементов вектора для получения значения $P_c(t)$;
- табулирование функции для получения значений $P_i(t)$ и $K_{гi}$;
- вычисление по формулам для получения значений $P_c(t)$, $K_{гc}$, R_c.

Решение перечисленных задач обеспечивает все расчёты по анализу надёжности исходной системы.

Определение оптимальной структуры системы при использовании общего резервирования связано с определением оптимальной кратности *m* общего резервирования с постоянно включённым резервом и по методу замещения. Решение этой задачи требует вычисления корней двух трансцендентных уравнений.

Определение оптимальной кратности раздельного резервирования по приведённым ранее алгоритмам требует многократных вычислений элементов вектора, представляющих собой формулы вероятностей безотказной работы и коэффициентов готовности каждого из элементов исходной системы, резервированного m раз.

Выполнять расчёты можно с помощью любых программных средств. Наиболее эффективными из них являются универсальные программные средства символьной математики, например MathCAD.

2.2 Задание к контрольной работе № 2

Для всех вариантов число элементов исходной системы $n = 10$, время непрерывной работы $t = 10$ ч, требуемый коэффициент оперативной готовности $R_c = 0{,}95$. Значения интенсивностей отказов и среднее время восстановления элементов приведены в таблице 4.

Интенсивность отказов элементов представлена в таблице в масштабе $\lambda \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$, размерность $t_{вi}$ – в часах.

Таблица 4 − Варианты заданий к контрольной работе № 2

		№ элемента									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	λ_i	1,2	5	2	0,8	1,5	2,5	3,2	5,6	2,4	0,8
	$t_{вi}$	10	2	5	20	8	12	8	5	3	15
Вар. 2	λ_i	4	1,4	3	0,5	0,8	5	2,5	2,7	3	1,5
	$t_{вi}$	2,5	9	3,2	2	12	6	10	10	2,5	8
Вар. 3	λ_i	0,7	2,5	5,4	3	2,5	2	0,8	2,5	4	1,5
	$t_{вi}$	14	2,5	4,5	7,5	10	8,5	19,6	5,5	2,5	9
Вар. 4	λ_i	5	1,4	0,6	2,2	2,4	1,6	5	3	0,7	2,5
	$t_{вi}$	2,4	12	18,5	5,4	11	8,5	5	7,6	14	3,2
Вар. 5	λ_i	2,5	1,6	0,7	2,5	6	1,5	0,9	2,5	4,8	3
	$t_{вi}$	12,5	7,8	18	5,4	2,8	11,5	16,5	3,4	6,5	7,8
Вар. 6	λ_i	1,5	6	2,5	0,7	2,5	1,8	3,5	5,2	2,2	0,6
	$t_{вi}$	11,5	2,4	6,5	18,5	11,5	9	9	4,8	3,7	13
Вар. 7	λ_i	0,6	2,6	4,8	3,8	2,2	1,7	0,5	2,4	4,5	1,4
	$t_{вi}$	14	4	4,5	7,3	12,5	7,9	22,3	4,6	2,3	9,6
Вар. 8	λ_i	0,7	2	5	4	2,5	1,9	0,6	2	4	1,5
	$t_{вi}$	14	4	4,5	7,3	12,5	7,9	22,3	4,6	2,3	9,6

Продолжение таблицы 3

Вар. 9	λ_i	1,6	6,5	1,5	0,6	2	3	3	4,6	2,5	0,7
	$t_{\text{в}i}$	10	2,2	4,8	21	6,2	12,5	8,2	6,1	2,9	16,5
Вар. 10	λ_i	1,4	5,5	1,8	0,9	2	3	2,8	5,1	2,4	0,8
	$t_{\text{в}i}$	12,3	7,8	15	17,2	7,5	6,5	5,8	3,2	2,4	18
Вар. 11	λ_i	1,8	6	1,4	1	1,8	3,2	2	6,5	2,1	0,7
	$t_{\text{в}i}$	3	2,8	4,1	10	8,2	6,5	7,4	3,2	5	20
Вар. 12	λ_i	1,2	6,5	1,2	0,7	2,1	3,8	1,9	6	2,5	1
	$t_{\text{в}i}$	8,5	3,4	8,3	20	5,4	6,8	12,3	2,3	5,2	10
Вар. 13	λ_i	1	7,2	1,2	0,9	1,4	2	3	2,2	7	0,5
	$t_{\text{в}i}$	10	3,2	8,5	15,4	5,3	4	2,3	3,1	4,2	19,3
Вар. 14	λ_i	10	1	1	0,9	3	8	0,7	1	1,4	9,2
	$t_{\text{в}i}$	1,2	12	8,7	18,5	2,1	3	20	9,3	6,5	2,5
Вар. 15	λ_i	1	2	11	0,4	6	0,3	8	6	0,3	1
	$t_{\text{в}i}$	8,6	7,3	1,5	25,2	4	18,3	3,2	4,5	20,6	7,8
Вар. 16	λ_i	1	0,8	12	0,6	10	1	1,2	5	1,2	7
	$t_{\text{в}i}$	10	17	2	18,6	2,5	9,8	8,6	3,6	8,6	3
Вар. 17	λ_i	7	0,8	1	11	1,2	0,2	0,6	1	1,1	9
	$t_{\text{в}i}$	4,8	15	8,5	2,5	7	25	20	8,5	7,3	3,2
Вар. 18	λ_i	1	8,5	1,3	0,6	7	1,5	12	0,7	0,8	0,5
	$t_{\text{в}i}$	9	3	9	18,5	7	7,5	2,3	15	18	20
Вар. 19	λ_i	1	9	0,8	5	1,2	0,5	1,4	7,7	1,4	0,6
	$t_{\text{в}i}$	10	1,2	13,5	2,1	8,5	18,6	7,5	2,1	6,8	15,6
Вар. 20	λ_i	2	1	11	2,5	1,5	9,5	0,6	1,8	8	0,5
	$t_{\text{в}i}$	5,2	9,8	1,2	4,3	6,7	1,1	15,5	6,2	1,3	17,6
Вар. 21	λ_i	11	1,2	1	2	1,3	8	2,5	3	1,6	9,8
	$t_{\text{в}i}$	1,2	8,6	9,5	4,8	6,7	1,4	4	3,3	6,2	1,3
Вар. 22	λ_i	0,5	9,5	2	3,5	0,7	1	11	0,8	7	0,2
	$t_{\text{в}i}$	20	1,2	5,1	2,6	15	10	9,7	12	1,5	20,5

Продолжение таблицы 3

Вар. 23	λ_i	3,1	0,7	1	0,8	7,5	8,5	1,5	2	2,5	10
	$t_{вi}$	3,5	14	9,8	12	1,3	1,2	7,5	4,8	4	1,1
Вар. 24	λ_i	0,8	1,5	11	3,5	1	2,2	1	9,5	1,6	0,7
	$t_{вi}$	13	7,4	1	3	9,8	5	10,2	1,2	6,2	14
Вар. 25	λ_i	9	10	0,7	1	8	2	1,5	7	2,6	0,2
	$t_{вi}$	1,2	1	16	10,3	1,3	4,8	6,5	1,5	4,6	25

2.3 Пример выполнения контрольной работы № 2

Далее рассмотрим реализацию синтеза оптимальной структуры технической системы по приведенной методике в среде MathCad (рисунки 6 − 8). Необходимо отметить, что оптимальной следует считать структуру такой системы, которая, при обеспечении заданного уровня надёжности, имеет минимально возможное число структурных элементов. В рассматриваемом примере по итогам расчёта в MathCad мы можем видеть, что при постоянно включённом резерве для обеспечения требуемого уровня риска потребуется две резервные системы, а в случае резервирования замещением − только одна (при этом необязательно решать трансцендентные уравнения; можно исходить из той очевидной предпосылки, что кратность резервирования может быть только целым числом и, таким образом, определять кратность резервирования методом подбора, подставляя в уравнения целые значения m и оценивая получившуюся величину риска). Если же используется раздельное резервирования, то необходимо попробовать избежать необходимости резервировать каждый элемент системы, лишая некоторые элементы их «дублёров» и анализируя, как это скажется на уровне риска. Так, из результатов расчёта можно сделать вывод о том, что при постоянном раздельном резервировании можно, сохраняя заданный уровень надёжности, не резервировать десятый элемент системы, а в случае раздельного резервирования замещением − оставить без резерва третий и девятый элементы. Этих результатов можно достичь методом подбора, последовательно убирая и возвращая по одному резервному элементу и оценивая значение риска.

Таблица 5 − Исходные данные примера к контрольной работе № 2

λ_i	1,6	6,5	1,5	0,6	2	3	3	4,6	2,5	0,7
$t_{вi}$	10	2,2	4,8	21	6,2	12,5	8,2	6,1	2,9	16,5

$$\lambda := \begin{pmatrix} 5 \\ 1.4 \\ 0.6 \\ 2.2 \\ 2.4 \\ 1.6 \\ 5 \\ 3 \\ 0.7 \\ 2.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad tv := \begin{pmatrix} 2.4 \\ 12 \\ 18.5 \\ 5.4 \\ 11 \\ 8.5 \\ 5 \\ 7.6 \\ 14 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$i := 1..10$

$$\lambda c := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \lambda c = 0.024$$

$\rho_i := \lambda_i \cdot tv_i$

$\rho =$

	1
1	0.012
2	0.0168
3	0.0111
4	0.01188
5	0.0264
6	0.0136
7	0.025
8	0.0228
9	0.0098
10	0.008

$$\rho c := \sum_{i=1}^{n} \rho_i \qquad \rho c = 0.157 \qquad t = 10$$

$pt_i := e^{-\lambda_i \cdot t}$

$Pc1(t) := e^{-\lambda c \cdot t}$ $\qquad Pc(t) := \prod_{i=1}^{n} pt_i$

$Pc1(t) = 0.783$

$Pc(t) = 0.783$

$pt =$

	1
1	0.951
2	0.986
3	0.994
4	0.978
5	0.976
6	0.984
7	0.951
8	0.97
9	0.993
10	0.975

Рисунок 6 − Расчёт величин для таблицы 4

$$Kg_i := \frac{1}{1+\rho_i}$$

$$Kgs := \frac{1}{1+\rho c} \qquad Kgs = 0.864$$

$Kg =$

	1
1	0.988
2	0.983
3	0.989
4	0.988
5	0.974
6	0.987
7	0.976
8	0.978
9	0.99
10	0.992

$$Rc := Kgs \cdot Pc1(t) \qquad Rc = 0.677$$

к р а т н о с т ь р е з е р в и р о в а н и я

П о с т о я н н о в к л ю ч е н н ы й р е з е р в

$$Rc := 0.95 \qquad \rho c = 0.157 \qquad Pc(t) = 0.783$$

$$Rc = \left[1-(1-Pc(t))^{m1+1}\right]\cdot\left(1-\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{m1+1}\frac{1}{i!\cdot\rho c^{i}}}\right)$$

$$m1 := 2$$

$$\left[1-(1-Pc(t))^{m1+1}\right]\cdot\left(1-\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{m1+1}\frac{1}{i!\cdot\rho c^{i}}}\right) = 0.976$$

Р е з е р в и р о в а н и е з а м е щ е н и е м

$$Rc = Pc1(t)\cdot\sum_{i=0}^{m2}\frac{(-\ln(Pc(t)))^{i}}{i!}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{m2+1}\frac{1}{\rho c^{i}}}\right)$$

$$m2 := 1$$

$$Pc(t)\cdot\sum_{i=0}^{m2}\frac{(-\ln(Pc(t)))^{i}}{i!}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{m2+1}\frac{1}{\rho c^{i}}}\right) = 0.954$$

Рисунок 7 − Расчёт для случая общего резервирования раздельное постоянное резервирование

$$m := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_i := \lambda_i \cdot tv_i$$

$Vp = 0.968$ $Vk = 0.987$

$Rc := Vp \cdot Vk$ $Rc = 0.955$

раздельное резервирование с замещением

$$m := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Pc(t) = 0.783$

$Vp1 = 0.983$

$Vk1 = 0.977$

$Rc1 := Vp1 \cdot Vk1$

$Rc1 = 0.96$

Рисунок 8 − Расчёт для случая раздельного резервирования

3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ НАДЁЖНОСТИ И РИСКА

3.1 Теоретические сведения

3.1.1 Постановка задачи

Требуется разработать структурную схему технической системы, отказ которой приводил бы к риску не более заданного.

Исходными данными для расчётов являются:

- структурная схема системы в виде последовательного (основного) соединения элементов, как показано на рисунке 9;
- n − число элементов системы;
- T_i − среднее время безотказной работы i-го элемента, $i = 1,2,...,n$;
- r_i − риск из-за отказа i-го элемента, $i = 1,2,...,n$;
- t − время непрерывной работы системы;
- m − коэффициент уменьшения риска в результате повышения надёжности системы;
- T_{Bi} − среднее время ремонта i-го элемента, $i = 1,2,...,n$;
- приоритет обслуживания отказавших элементов, который может быть прямым, обратным и назначенным (с заданным порядком номеров ремонтируемых элементов).

Рисунок 9 – Структурная схема системы

В результате расчётов необходимо:

- определить показатели надёжности исходной системы и суммарный риск из-за её отказа;
- разработать структурную схему системы, риск которой в m раз меньше исходной, применяя структурную избыточность с постоянно включённым резервом;
- определить показатели надёжности и суммарный риск новой системы;

- определить показатели надёжности и суммарный риск новой системы, заменяя постоянно включённый резерв на резерв замещением;
- провести сравнительный анализ рассмотренных методов введения структурной избыточности;
- вычислить вероятность безотказной работы, среднее время безотказной работы и риск из-за отказа ремонтируемой системы, считая восстановление неограниченным;
- оценить влияние восстановления на надёжность и риск системы с нагруженным резервом;
- построить граф состояний для полностью ограниченного восстановления и заданного приоритета обслуживания, составить и решить систему дифференциальных уравнений, определить вероятность безотказной работы и техногенный риск системы;
- составить и решить систему алгебраических уравнений, определить наработку на отказ;
- сделать выводы по работе.

3.1.2 Показатели надёжности и риск нерезервированной системы

Основными показателями надёжности, характеризующими случайное время до первого отказа неремонтируемой или ремонтируемой системы, являются:

- вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение заданного времени t;
- среднее время безотказной работы T_1.

Вероятность безотказной работы представляет собой закон распределения времени до первого отказа, а среднее время безотказной работы – среднее время функционирования системы до первого отказа.

Обозначим через $\lambda_i = \dfrac{1}{T_i}$ интенсивность отказов i-го элемента системы. Если после наступления отказа i-й элемент может ремонтироваться, то через $\mu_i = \dfrac{1}{T_{B\,i}}$ обозначим его интенсивность восстановления, $i = 1,2,...,n$.

Для нерезервированной системы, состоящей из n элементов, вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы определяются по формулам:

$$P(t) = e^{-\Lambda t}, \quad T_1 = \frac{1}{\Lambda}, \tag{1}$$

где $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ – интенсивность отказа системы.

Суммарный риск системы за время t вследствие отказа какого-либо элемента определяется по формуле:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i(t), \tag{2}$$

где $p_i(t) = \frac{\lambda_i}{\Lambda}\left(1 - e^{-\Lambda t}\right)$ – вероятность отказа i-го элемента системы в момент времени t.

Следует отметить, что формулы (1) и (2) даже для нерезервированной системы справедливы только в случае, когда время до отказа каждого элемента случайно и имеет экспоненциальное распределение вероятностей. В общем случае эти формулы являются приближёнными.

3.1.3 Вероятность безотказной работы резервированных подсистем

Неремонтируемая резервированная система

Предположим, что некоторый элемент зарезервирован $m-1$ раз однотипными по надёжности элементами с интенсивностью отказа λ.

Тогда при постоянно включенном резерве вероятность безотказной работы $P(t)$ и среднее время безотказной работы системы T_1 выражаются формулами:

$$P(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m, \tag{3}$$

$$T_1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} C_m^k}{k}. \tag{4}$$

В случае резерва замещением формулы вероятности $P(t)$ и среднего времени безотказной работы системы T_1 имеют вид:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{5}$$

$$T_1 = \frac{m}{\lambda}. \tag{6}$$

Ремонтируемая резервированная система

Определение вероятности безотказной работы ремонтируемой системы является более сложной задачей, и мы ограничимся здесь случаем только дублированной системы. Пусть λ − интенсивность отказа, μ − интенсивность восстановления каждого элемента дублированной системы. Тогда вероятность безотказной работы системы для постоянно включённого резерва выражается равенством:

$$P(t) = \frac{z_1 + \mu + 3\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{z_2 + \mu + 3\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}, \tag{7}$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 3\lambda) \pm \sqrt{(\mu + 3\lambda)^2 - 8\lambda^2}}{2},$$

а средняя наработка до отказа равна:

$$T_1 = \frac{\mu + 3\lambda}{2\lambda^2}. \tag{8}$$

Для резерва замещением вероятность безотказной работы системы выражается равенством:

$$P(t) = \frac{z_1 + \mu + 2\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{z_2 + \mu + 2\lambda}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}, \tag{9}$$

где

$$z_{1,2} = \frac{-(\mu + 2\lambda) \pm \sqrt{(\mu + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2}}{2},$$

а среднее время безотказной работы равно:

$$T_1 = \frac{\mu + 2\lambda}{\lambda^2}. \tag{10}$$

Оценим выигрыш от восстановления G_{T_1} дублированной системы по среднему времени безотказной работы. Так как среднее время безотказной работы дублированной системы $T_1 = 1{,}5\frac{1}{\lambda}$ для случая постоянно включённого резерва и $T_1 = 2\frac{1}{\lambda}$ для случая замещения, то этот выигрыш соответственно равен $G_{T_1} = \frac{\mu}{3\lambda} + 1$ и $G_{T_1} = \frac{\mu}{2\lambda} + 1$.

3.1.4 Надежность и риск резервированной системы, состоящей из независимых подсистем

Рассмотрим метод определения показателей надёжности и риска резервированной системы. Предположим, что i-й элемент зарезервирован $m_i - 1$ раз однотипными по надёжности элементами, $i = 1,2,...,n$, причём вид резервирования произвольный (нагруженный, ненагруженный, облегчённый). На рисунке 10 показан случай раздельного резервирования с постоянно включённым резервом.

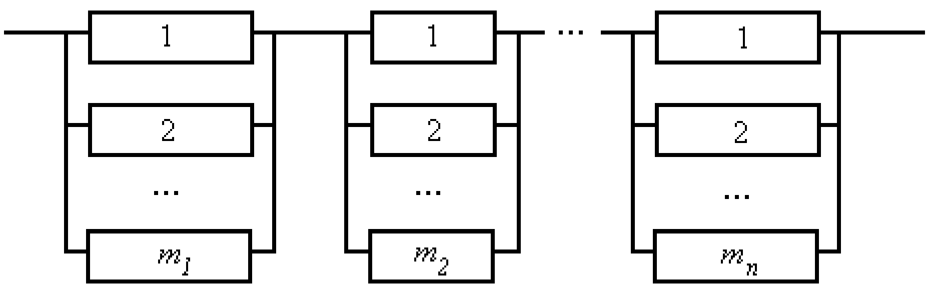


Рисунок 10 – Структурная схема системы с раздельным резервированием

Система может быть неремонтируемой или ремонтируемой, но при этом отдельные её подсистемы должны быть независимы по обслуживанию. Последнее означает, что имеет место неограниченное восстановление, то есть каждая подсистема имеет такое число ремонтных органов, чтобы не возникала очередь на восстановление отказавших элементов.

Обозначим через $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы, а через $Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ – вероятность отказа i-й подсистемы, $i = 1,2,...,n$. Тогда вероятность безотказной работы и средняя наработка до отказа всей системы соответственно равны:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t), \quad T_1 = \int_0^{\infty} P(t)dt. \tag{11}$$

Риск из-за отказа системы определяется по формуле:

$$R(t)=\sum_{i=1}^{n} r_i \int_0^t P_1(x)...Q_i'(x)...P_n(x)dx\,. \qquad (12)$$

3.1.5 Надежность и риск резервированной системы, состоящей из зависимых по восстановлению подсистем

Для систем, образованных из зависимых по восстановлению подсистем, не существует простых соотношений типа (11) и (12) для расчёта её показателей надёжности и риска. Здесь необходимо учитывать дисциплину обслуживания отказавших элементов, а именно: количество ремонтных органов и приоритет обслуживания, то есть порядок, в котором ремонтируются отказавшие элементы.

Описание функционирования системы осуществляется с помощью построения графа состояний и составления системы линейных алгебраических и дифференциальных уравнений.

Граф состояний системы строится в следующем порядке:

- намечаются в виде горизонтальных линий уровни графа, которые нумеруются сверху вниз, считая верхний уровень нулевым;
- возможным состояниям системы ставятся в соответствие узлы графа, располагаемые на определенных уровнях в виде точек (или кружков, или квадратов). На нулевом уровне помещается узел, соответствующий состоянию, когда все элементы системы исправны (состояние (0)); на первом уровне помещаются узлы, соответствующие состояниям, когда отказал один любой элемент системы; на втором уровне помещаются узлы, соответствующие состояниям, когда отказали любые два элементы системы и т.д.; на последнем уровне располагаются узлы, соответствующие только отказовым состояниям системы;
- узлы графа соединяются ветвями, которые соответствуют переходам системы из состояния в состояние. Ветви размечаются интенсивностями отказов (восстановлений) элементов, из-за которых осуществляются переходы из состояния в состояние;
- узлы графа, соответствующие отказовым состояниям системы, помечаются, например, крестами.

Разработаем математическую модель функционирования системы; для достижения этой цели получим, пользуясь графом состояний, выражения для показателей надежности и риска системы.

Пусть E − множество всех состояний системы; E_+ − множество исправных состояний системы; E_- − множество отказовых состояний системы; $p_i(t)$ − вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии i,

$i \in E$; $\lambda_{i,j}$ – интенсивность перехода из состояния i в состояние j. Если переход из состояния i в состояние j отсутствует, то $\lambda_{i,j} = 0$.

По графу состояний формально составляется система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающая процесс функционирования нерезервированной и резервированной технической системы:

$$p_i'(t) = -\sum_{j\in E}\lambda_{i,j}\,p_i(t) + \sum_{j\in E}\lambda_{j,i}\,p_j(t), \quad i \in E. \tag{13}$$

Предполагая, что в момент времени $t = 0$ система полностью исправна, запишем начальные условия функционирования:

$$p_0(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ i \in E \setminus \{0\}. \tag{14}$$

Решение системы (13) с заданными начальными условиями позволяет найти вероятность безотказной работы технической системы за время t при условии, что все состояния отказа являются поглощающими:

$$P(t) = \sum_{i\in E_+} p_i(t). \tag{15}$$

Для определения среднего времени безотказной работы по графу состояний составляется система линейных алгебраических уравнений относительно средних времен пребывания технической системы в исправных состояниях τ_i:

$$-\sum_{j\in E}\lambda_{i,j}\tau_i + \sum_{j\in E}\lambda_{j.i}\tau_j = -p_i(0), \qquad i \in E_+. \tag{16}$$

Тогда средняя наработка до отказа находится суммированием среднего времени пребывания системы в исправных состояниях:

$$T_1 = \sum_{i\in E_+}\tau_i. \tag{17}$$

Суммарный риск системы за время t находится по формуле:

$$R(t) = \sum_{i\in E_-} r_{k(i)}\,p_i(t), \tag{18}$$

где $r_{k(i)}$ – риск системы из-за отказа i-го элемента.

3.2 Задание к контрольной работе № 3

Контрольная работа выполняется в соответствии с приведённой методикой. Варианты заданий приведены в таблице 6.

Таблица 6 − Варианты заданий к контрольной работе № 3

Вар.	n	m	t, лет	Характ.	Эл-т 1	Эл-т 2	Эл-т 3	Эл-т 4	Эл-т 5
1	4	110	1,9	T, лет	12	2	16	2	–
				$T_в$, ч	24	24	120	50	–
				r, у.е.	1000	30	1000000	20	–
2	4	90	1,8	T, лет	10	16	5	3	–
				$T_в$, ч	120	240	60	90	–
				r, у.е.	10000	1000000	30	30	–
3	4	110	2,0	T, лет	5	3	16	14	–
				$T_в$, ч	100	100	240	100	–
				r, у.е.	50	30	100000	1000	–
4	5	110	1,6	T, лет	14	4	5	18	5
				$T_в$, ч	120	96	20	200	24
				r, у.е.	10000	10	40	100000	40
5	4	100	1,9	T, лет	14	20	3	4	–
				$T_в$, ч	100	200	50	50	–
				r, у.е.	1000	100000	10	20	–
6	4	120	1,1	T, лет	2	16	14	5	–
				$T_в$, ч	50	200	120	90	–
				r, у.е.	40	1000000	10000	40	–
7	5	120	1,4	T, лет	4	18	12	5	2
				$T_в$, ч	30	200	100	50	40
				r, у.е.	30	100000	1000	50	10
8	4	80	1,2	T, лет	2	14	10	2	–
				$T_в$, ч	60	180	96	40	–
				r, у.е.	30	100000	1000	30	–
9	4	80	1,1	T, лет	4	10	2	14	–
				$T_в$, ч	70	200	50	180	–
				r, у.е.	30	1000	10	100000	–
10	4	120	1,5	T, лет	3	12	12	4	–
				$T_в$, ч	40	150	120	90	–
				r, у.е.	50	100000	10000	40	–
11	4	90	1,2	T, лет	10	2	20	5	–
				$T_в$, ч	200	30	120	30	–
				r, у.е.	1000	50	100000	40	–

Продолжение таблицы 6

12	5	120	1,6	T, лет	4	16	4	5	16
				$T_{в}$, ч	80	180	50	40	130
				r, у.е.	20	10000	20	10	100000
13	5	90	1,3	T, лет	5	3	2	12	14
				$T_{в}$, ч	60	100	50	180	100
				r, у.е.	40	30	50	100000	1000
14	4	80	1,6	T, лет	2	20	4	12	–
				$T_{в}$, ч	60	150	100	80	–
				r, у.е.	10	100000	50	1000	–
15	4	90	1,8	T, лет	10	3	14	2	–
				$T_{в}$, ч	100	30	200	40	–
				r, у.е.	1000	30	1000000	50	–
16	5	90	1,6	T, лет	5	4	5	18	16
				$T_{в}$, ч	100	160	50	200	130
				r, у.е.	40	30	50	100000	1000
17	5	90	1,7	T, лет	4	16	4	3	18
				$T_{в}$, ч	60	120	60	80	150
				r, у.е.	40	10000	50	30	100000
18	4	120	1,0	T, лет	4	16	4	14	–
				$T_{в}$, ч	80	100	100	100	–
				r, у.е.	40	100000	40	1000	–
19	4	80	1,9	T, лет	4	4	14	20	–
				$T_{в}$, ч	100	30	200	40	–
				r, у.е.	30	20	1000	1000000	–
20	4	120	1,0	T, лет	4	3	20	18	–
				$T_{в}$, ч	100	160	50	200	–
				r, у.е.	50	20	100000	1000	–
21	5	80	1,6	T, лет	16	4	4	2	18
				$T_{в}$, ч	100	160	50	200	130
				r, у.е.	1000	40	30	20	100000
22	5	120	1,6	T, лет	3	3	4	18	12
				$T_{в}$, ч	60	120	60	200	150
				r, у.е.	40	10	20	100000	10000
23	4	9	1,8	T, лет	3	10	10	4	–
				$T_{в}$, ч	80	100	100	100	–
				r, у.е.	3	100000	10000	20	–

Продолжение таблицы 6

24	4	110	1,7	T, лет	16	3	18	2	−
				$T_в$, ч	100	30	200	40	−
				r, у.е.	10000	20	100000	20	−
25	4	100	1,6	T, лет	14	12	3	3	−
				$T_в$, ч	100	160	50	70	−
				r, у.е.	1000000	10000	20	10	−

3.3 Пример выполнения контрольной работы № 3

Рассмотрим один вариант выполнения контрольной работы со следующими исходными данными: $n = 4$, $t = 1$ год, $m = 100$, восстановление полностью ограниченное, приоритет обслуживания назначенный: первым ремонтируется элемент с б*о*льшим риском. Остальные данные приведены в таблице 7.

Таблица 7 − Исходные данные для примера к контрольной работе № 3

Характеристики элементов	Номера элементов			
	1	2	3	4
T, лет	3	15	6	10
$T_в$, ч	1	240	2	48
r, у.е.	10	100000	40	1000

3.3.1 Определение показателей надёжности исходной системы и суммарного риска из-за её отказа

Найдём интенсивности отказов элементов:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} = 0{,}33333\,\text{лет}^{-1},\ \lambda_2 = \frac{1}{15} = 0{,}06667\,\text{лет}^{-1},$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{6} = 0{,}16667\,\text{лет}^{-1},\ \lambda_4 = \frac{1}{10} = 0{,}10000\,\text{лет}^{-1}.$$

Определим суммарную интенсивность отказов системы:

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0{,}33333 + 0{,}06667 + 0{,}16667 + 0{,}10000 = 0{,}66667\,\text{лет}^{-1}.$$

По формулам (1) находим вероятность и среднее время безотказной работы системы за время $t = 1$ год:

$$P(1) = e^{-0,66667 \cdot 1} = 0,51342\,,\ T_1 = \frac{1}{0,66667} = 1,5\ \text{года}.$$

Суммарный риск системы определяется по формуле (2):

$$R(t) = \sum_{i=1}^{4} r_i \lambda_i \frac{1 - e^{-\Lambda t}}{\Lambda}.$$

На основании этой формулы риск системы в момент времени $t = 1$ год будет иметь значение:

$$R(1) = (10 \cdot 0,3333 + 100000 \cdot 0,06667 + 40 \cdot 0,16667 + 1000 \cdot 0,10000) \cdot \frac{1 - 0,51342}{0,66667} = 4946.$$

Мы видим, что исходная нерезервированная система имеет риск, равный 4946, что значительно превышает требуемый уровень, равный $\frac{4946}{m} = \frac{4946}{100} = 49,46$. Из этого следует, что необходимо структурное резервирование системы по описанной выше методике для снижения уровня риска до требуемого значения или ниже.

3.3.2 Разработка структурной схемы системы, риск которой в *m* раз меньше риска исходной системы

Второй элемент, отказ которого ведёт к отказу системы, имеет наибольший риск. Зарезервируем его идентичным по надёжности элементом. Тогда вероятность безотказной работы каждой группы элементов равна:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)^2,\ P_3(t) = e^{-\lambda_3 t},\ P_4(t) = e^{-\lambda_4 t}.$$

По формуле (12) находим риск за время $t = 1$ год:

$$R(1) = r_1 \int_0^1 Q_1'(t) P_2(t) P_3(t) P_4(t) dt + r_2 \int_0^1 P_1(t) Q_2'(t) P_3(t) P_4(t) dt +$$

$$+ r_3 \int_0^1 P_1(t) P_2(t) Q_3'(t) P_4(t) dt + r_4 \int_0^1 P_1(t) P_2(t) P_3(t) Q_4'(t) dt.$$

В результате расчётов с помощью системы MathCad получим:

$$R(1)=10\cdot 0{,}25036+100000\cdot 0{,}00283+40\cdot 0{,}12518+1000\cdot 0{,}07511=366.$$

Видим, что суммарный риск системы уменьшился более чем в 10 раз, однако он ещё не достиг требуемого уровня. Резервируем повторно второй элемент. Вероятность безотказной работы каждой группы элементов будет равна:

$$P_1(t)=e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t)=1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^3,\ P_3(t)=e^{-\lambda_3 t},\ P_4(t)=e^{-\lambda_4 t}.$$

Используя снова формулу (12) и систему MathCad, получим следующий суммарный риск системы за время $t=1$ год:

$$R(1)=10\cdot 0{,}25064+100000\cdot 0{,}00017+40\cdot 0{,}12532+1000\cdot 0{,}07519=100.$$

Риск из-за отказа системы снова не достиг требуемого значения. Зарезервируем теперь четвёртый элемент, отказ которого вызывает наибольшую опасность в отказе системы. Вероятность безотказной работы каждой группы элементов равна:

$$P_1(t)=e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t)=1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^3,\ P_3(t)=e^{-\lambda_3 t},\ P_4(t)=1-\left(1-e^{-\lambda_4 t}\right)^2.$$

В третий раз используя формулу (12) и систему MathCad, получим следующий суммарный риск системы за время $t=1$ год:

$$R(1)=10\cdot 0{,}26158+100000\cdot 0{,}00018+40\cdot 0{,}13079+1000\cdot 0{,}00656=32{,}41.$$

Риск из-за отказа системы достиг требуемого значения, поскольку

$$32{,}41<\frac{4946}{100}=49{,}46.$$

Таким образом, структурная схема системы имеет вид, представленный на рисунке 11.

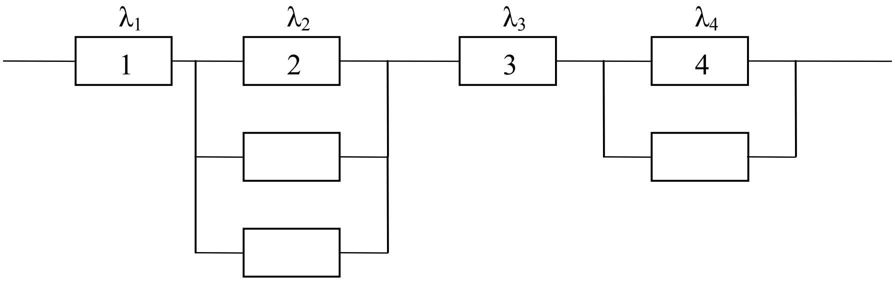


Рисунок 11 – Оптимальная структурная схема системы

3.3.3 Расчёт показателей надёжности усовершенствованной системы

Произведём расчёт показателей надёжности спроектированной системы. Вероятность безотказной работы можно найти по формуле (11):

$$P(t) = e^{-\lambda_1 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)^3\right)e^{-\lambda_3 t}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_4 t}\right)^2\right),$$

или после упрощения получим:

$$P(t) = e^{-\Lambda t}\left(3-3e^{-\lambda_2 t}+e^{-2\lambda_2 t}\right)\left(2-e^{-\lambda_4 t}\right).$$

Вычисляя значения функции $P(t)$ от 0 до 1 с шагом 0,1, получим таблицу 8.

Таблица 8 − Значения функции $P(t)$

t, лет	$P(t)$
0,000	1,00000
0,100	0,95113
0,200	0,90448
0,300	0,85995
0,400	0,81746
0,500	0,77692
0,600	0,73826
0,700	0,70140
0,800	0,66626
0,900	0,63278
1,000	0,60088

График вероятности безотказной работы, полученный в системе MathCad, изображён на рисунке 12.

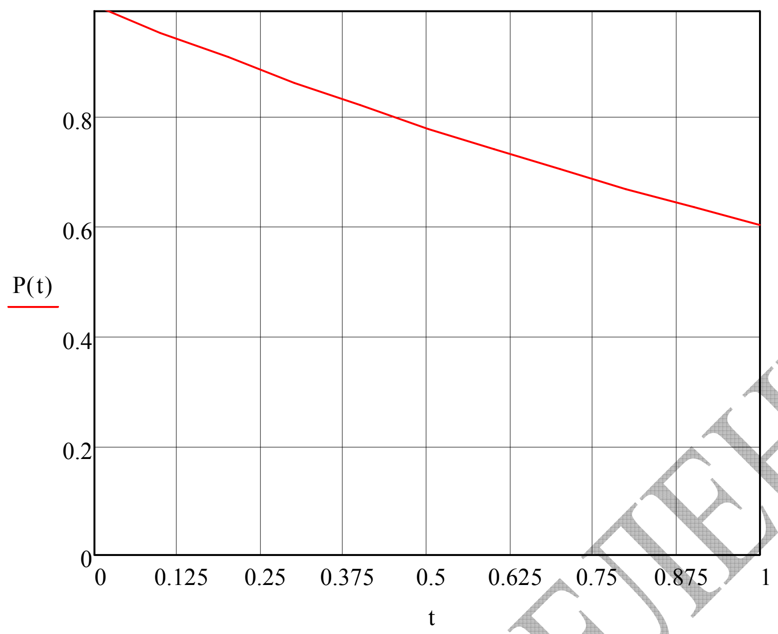


Рисунок 12 – График вероятности безотказной работы усовершенствованной системы

Рассчитаем наработку на отказ по формуле (11):

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\Lambda t}\left(3 - 3e^{-\lambda_2 t} + e^{-2\lambda_2 t}\right)\left(2 - e^{-\lambda_4 t}\right)dt,$$

откуда получим:

$$T_1 = \frac{6}{\Lambda} - \frac{6}{\Lambda + \lambda_2} + \frac{2}{\Lambda + 2\lambda_2} - \frac{3}{\Lambda + \lambda_4} + \frac{3}{\Lambda + \lambda_2 + \lambda_4} - \frac{1}{\Lambda + 2\lambda_2 + \lambda_4} = 1{,}89403 \text{ год.}$$

3.3.4 Расчёт показателей надёжности новой системы для резерва замещением

В соответствии с (5) вероятности безотказной работы подсистем вычисляются по формулам:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t) = \left(1 + \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2}\right)e^{-\lambda_2 t},\ P_3(t) = e^{-\lambda_3 t},\ P_4(t) = (1 + \lambda_4 t)e^{-\lambda_4 t}.$$

Вероятность и среднее время безотказной работы, а также риск системы определяются по формулам (11) и (12).

3.3.5 Вычисление показателей надёжности и риска системы при наличии восстановления

Предположим, что количество ремонтных органов достаточно для того, чтобы подсистемы были независимы по восстановлению (неограниченное восстановление). В этом случае можно воспользоваться формулами (11) и (12). Поскольку восстановление элементов значительно повышает надёжность системы и снижает риск из-за отказа элементов, то в каждой резервной группе можно оставить лишь по одному резервному элементу. Таким образом, для ремонтируемой системы её структурная схема имеет вид, показанный на рисунке 13.

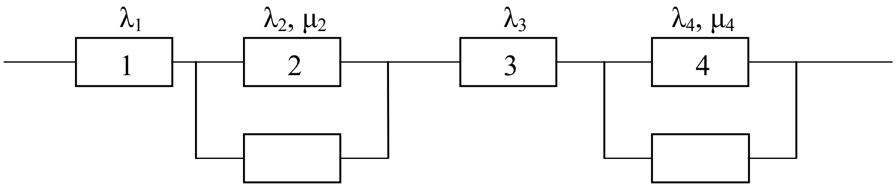


Рисунок 13 – Структурная схема восстанавливаемой системы

3.3.6 Постоянно включённый резерв

Поскольку первая и третья подсистемы являются нерезервированными, а вторая и четвёртая представляют собой дублированные подсистемы, то в соответствии с формулой (7) для постоянно включённого резерва получим следующие формулы для вероятности безотказной работы подсистем:

$$P_1(t)=e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t)=x_2e^{\alpha_2 t}+y_2e^{\beta_2 t},\ P_3(t)=e^{-\lambda_3 t}, P_4(t)=x_4e^{\alpha_4 t}+y_4e^{\beta_4 t},$$

где:

$$\alpha_i=\frac{-(\mu_i+3\lambda_i)+\sqrt{(\mu_i+3\lambda_i)^2-8\lambda_i^2}}{2},\ \beta_i=\frac{-(\mu_i+3\lambda_i)-\sqrt{(\mu_i+3\lambda_i)^2-8\lambda_i^2}}{2},$$

$$x_i = \frac{\alpha_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\alpha_i - \beta_i},\ y_i = \frac{\beta_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\beta_i - \alpha_i},$$

$\mu_i = \dfrac{8760}{T_{вi}}$ лет$^{-1}$ − интенсивность восстановления элементов i-ой подсистемы, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. (Множитель 8760 появился из-за необходимости перевода размерности интенсивностей восстановления элементов из часов в годы).

Теперь для вычисления показателей надёжности системы можно воспользоваться соотношениями (11). В результате получим:

$$P(t) = e^{-\lambda_1 t}\left(x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t}\right)e^{-\lambda_3 t}\left(x_4 e^{\alpha_4 t} + y_4 e^{\beta_4 t}\right),$$

$$T_1 = \frac{x_2 x_4}{\alpha_2 + \alpha_4 + \lambda_1 + \lambda_3} + \frac{y_2 x_4}{\beta_2 + \alpha_4 + \lambda_1 + \lambda_3} + \frac{x_2 y_4}{\alpha_2 + \beta_4 + \lambda_1 + \lambda_3} + \frac{y_2 y_4}{\beta_2 + \beta_4 + \lambda_1 + \lambda_3}.$$

Расчёты с помощью системы MathCad показывают, что:

$$P(1) = 0{,}60632,\ T_1 = 2{,}00142 \text{ года.}$$

Аналогично, используя (2), найдём риск системы в момент $t = 1$ год:

$$R(1) = 10 \cdot 0{,}26227 + 100000 \cdot 0{,}00018 + 40 \cdot 0{,}13114 + 1000 \cdot 0{,}00009 = 26{,}38.$$

3.3.7 Резерв замещением

В соответствии с формулой (9) для резерва замещением получим следующие формулы для вероятности безотказной работы подсистем:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t},\ P_2(t) = x_2 e^{\alpha_2 t} + y_2 e^{\beta_2 t},\ P_3(t) = e^{-\lambda_3 t}, P_4(t) = x_4 e^{\alpha_4 t} + y_4 e^{\beta_4 t},$$

где:

$$\alpha_i = \frac{-(\mu_i + 2\lambda_i) + \sqrt{(\mu_i + 2\lambda_i)^2 - 4\lambda_i^2}}{2},\ \beta_i = \frac{-(\mu_i + 2\lambda_i) - \sqrt{(\mu_i + 2\lambda_i)^2 - 4\lambda_i^2}}{2},$$

$$x_i = \frac{\alpha_i + \mu_i + 2\lambda_i}{\alpha_i - \beta_i},\ y_i = \frac{\beta_i + \mu_i + 2\lambda_i}{\beta_i - \alpha_i}.$$

Вычисление показателей надёжности и риска системы производится, как и ранее, на основе равенств (11) и (12).

3.3.8 Определение показателей надёжности и суммарного риска усовершенствованной системы

Рассмотрим структурную схему с постоянно включённым резервом, представленную на рисунке 13. Ориентированный граф состояний такой системы изображён на рисунке 14. Он имеет 21 узел. Направление стрелок сверху вниз соответствует отказовым переходам, а снизу вверх – восстановлению элементов. На графе кружками отмечены исправные состояния, а квадратами – отказовые.

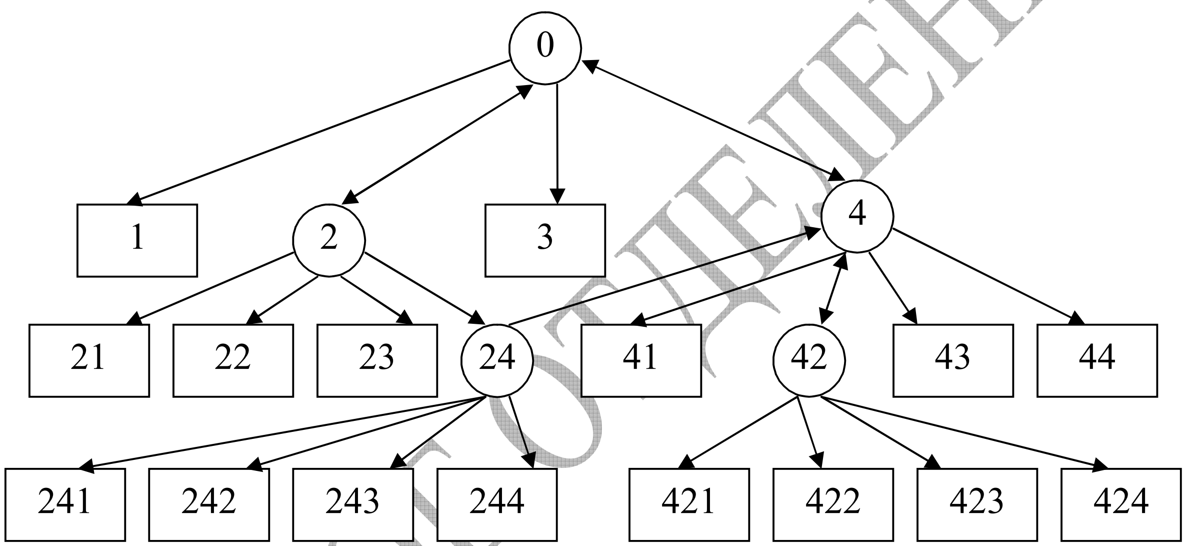


Рисунок 14 – Граф состояний восстанавливаемой системы

Интенсивности отказового перехода из каждого узла равны соответственно λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, умноженным на число исправных элементов данной резервной группы. Интенсивности ремонта для второй и четвёртой подсистем равны соответственно μ_2 и μ_4. Согласно заданной дисциплине обслуживания первыми восстанавливаются элементы второй подсистемы (так как риск отказа у второго элемента больше, чем у четвёртого), а затем – элементы четвёртой подсистемы.

Для удобства записи системы уравнений пронумеруем узлы графа в естественном порядке. Тогда узлы (0), (2), (4), (8), (10) соответствуют исправным, а остальные узлы – отказовым состояниям. По графу составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Считая, что при $t = 0$ все элементы системы исправны, получаем начальные условия: $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 20$.

Система уравнений может быть решена численно с использованием метода Рунге − Кутты. Для этого необходимо подготовить исходные данные, содержащие вектор-функцию системы дифференциальных уравнений, начальные значения искомых функций, начальное и конечное значение аргумента, шаг интегрирования.

В рассматриваемом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
p_0'(t) = -(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)p_0(t) + \mu_2 p_2(t) + \mu_4 p_4(t); \\
p_1'(t) = \lambda_1 p_0(t); \\
p_2'(t) = 2\lambda_2 p_0(t) - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2)p_2(t); \\
p_3'(t) = \lambda_3 p_0(t); \\
p_4'(t) = 2\lambda_4 p_0(t) - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_4)p_4(t) + \mu_2 p_8(t) + \mu_2 p_{10}(t); \\
p_5'(t) = \lambda_1 p_2(t); \\
p_6'(t) = \lambda_2 p_2(t); \\
p_7'(t) = \lambda_3 p_2(t); \\
p_8'(t) = 2\lambda_4 p_2(t) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2)p_8(t); \\
p_9'(t) = \lambda_1 p_4(t); \\
p_{10}'(t) = 2\lambda_2 p_4(t) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2)p_{10}(t); \\
p_{11}'(t) = \lambda_3 p_4(t); \\
p_{12}'(t) = \lambda_4 p_4(t); \\
p_{13}'(t) = \lambda_1 p_8(t); \\
p_{14}'(t) = \lambda_2 p_8(t); \\
p_{15}'(t) = \lambda_3 p_8(t); \\
p_{16}'(t) = \lambda_4 p_8(t); \\
p_{17}'(t) = \lambda_1 p_{10}(t); \\
p_{18}'(t) = \lambda_2 p_{10}(t); \\
p_{19}'(t) = \lambda_3 p_{10}(t); \\
p_{20}'(t) = \lambda_4 p_{10}(t).
\end{cases}
$$

Заметим, что при вводе исходных данных необходимо привести значения интенсивности переходов к одной размерности. Для этого следует интенсивности восстановления элементов умножить на 8760, что соответствует переводу 1 часа в годы.

Поэтому

$$\mu_2 = \frac{8760}{240} = 36{,}5\,\text{лет}^{-1},\ \mu_4 = \frac{8760}{48} = 182{,}5\,\text{лет}^{-1}.$$

В результате вычислений надо получить два массива величин. В первом массиве содержатся значения всех 21 функций $p_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 20$ в зависимости от значения аргумента t, изменяющегося от 0 до 1 года с шагом 0,1 года. Далее представлены значения искомых функций только для конечного значения $t = 1$ год:

$$p_0(1) = 0{,}60345,\ p_1(1) = 0{,}26106,\ p_2(1) = 0{,}00219,$$
$$p_3(1) = 0{,}13054,\ p_4(1) = 0{,}00066,\ p_5(1) = 0{,}00092,$$
$$p_6(1) = 0{,}00018,\ p_7(1) = 0{,}00046,\ p_8(1) = 0{,}00001,$$
$$p_9(1) = 0{,}00029,\ p_{10}(1) = 0{,}00000,\ p_{11}(1) = 0{,}00014,$$
$$p_{12}(1) = 0{,}00009,\ p_{13}(1) = 0{,}00001,\ p_{14}(1) = 0{,}00000,$$
$$p_{15}(1) = 0{,}00000,\ p_{16}(1) = 0{,}00000,\ p_{17}(1) = 0{,}00000,$$
$$p_{18}(1) = 0{,}00000,\ p_{19}(1) = 0{,}00000,\ p_{20}(1) = 0{,}00000.$$

Приведённые значения используются дальше при нахождении риска системы. Во втором массиве результатов содержатся значения вероятности безотказной работы системы для значений t от 0 до 1 года с шагом 0,1 года. Эти значения получены суммированием вероятностей $p_i(t)$ по всем исправным состояниям, то есть

$$P(t) = p_0(t) + p_2(t) + p_4(t) + p_8(t) + p_{10}(t).$$

Данные этого массива приведены в таблице 9.

Таблица 9 − Вероятность безотказной работы системы

t, лет	$P(t)$
0,000	1,00000
0,100	0,95120
0,200	0,90478
0,300	0,86062
0,400	0,81862
0,500	0,77867
0,600	0,74067
0,700	0,70452
0,800	0,67014
0,900	0,63743
1,000	0,60632

Из таблицы 9 следует, что $P(1)=0{,}60632$ для ремонтируемой системы несколько больше, чем $P(1)=0{,}60088$ для неремонтируемой системы.

Для определения наработки на отказ составим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4)\tau_0+\mu_2\tau_2+\mu_4\tau_4=-1; \\ 2\lambda_2\tau_0-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+\mu_2)\tau_2=0; \\ 2\lambda_4\tau_0-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\mu_4)\tau_4=0; \\ 2\lambda_4\tau_2-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\mu_2)\tau_8=0; \\ 2\lambda_2\tau_4-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\mu_2)\tau_{10}=0. \end{cases}$$

Решение этой системы даёт следующие результаты:

$$\tau_0=1{,}98926,\ \tau_2=0{,}00712,\ \tau_4=0{,}00218,\ \tau_8=0{,}00004,\ \tau_{10}=0{,}00001.$$

Следовательно, среднее время безотказной работы системы будет равно:

$$T_1=\tau_0+\tau_2+\tau_4+\tau_8+\tau_{10}=1{,}99860\ \text{год},$$

что также больше, чем $T_1=1{,}89403$ лет для неремонтируемой системы.

Найдём суммарный риск системы в соответствии с формулой (18). Для этого по графу необходимо найти все состояния отказа и для каждого из них определить номер элемента, отказ которого привёл к отказу системы. Соответствие отказовых состояний и номеров отказавших элементов приведено в таблице 10.

Таблица 10 − Номера элементов и их состояний

Номер состояния	Номер элемента
1	1
3	3
5	5
6	2
7	3
9	1
11	3
12	4
13	1
14	2
15	3
16	4
17	1

Продолжение таблицы 10

18	2
19	3
20	4

По формуле (18) получим:

$$R(t) = r_1\left(p_1(t) + p_5(t) + p_9(t) + p_{13}(t) + p_{17}(t)\right) + r_2\left(p_6(t) + p_{14}(t) + p_{18}(t)\right) +$$
$$+ r_3\left(p_3(t) + p_7(t) + p_{11}(t) + p_{15}(t) + p_{19}(t)\right) + r_4\left(p_{12}(t) + p_{16}(t) + p_{20}(t)\right).$$

Следовательно,

$$R(1) = 10(0{,}26106 + 0{,}00092 + 0{,}00029 + 0{,}00001 + 0{,}00000) +$$
$$+ 100000(0{,}00018 + 0{,}00000 + 0{,}00000) +$$
$$+ 40(0{,}13054 + 0{,}00046 + 0{,}00014 + 0{,}00000 + 0{,}00000) +$$
$$+ 1000(0{,}00009 + 0{,}00000 + 0{,}00000) = 25{,}96.$$

Суммарный риск из-за отказа системы, равный $R(1) = 25{,}96$, стал меньше риска, полученного для системы без восстановления и равного 32,41.

3.3.9 Выводы по работе

По результатам проведённых исследований составлена таблица 11, в которой содержатся значения показателей надёжности и риска резервированной системы для постоянно включённого резерва.

Таблица 11 – Значения показателей резервированной системы

Система	Показатели надёжности		Риск системы $R(1)$
	$P(1)$	T_1, лет	
Неремонтируемая	0,60088	1,89403	32,41
Ремонтируемая (неограниченное восстановление)	0,60632	2,00142	26,38
Ремонтируемая (ограниченное восстановление)	0,60632	1,99860	25,96

На основании данной таблицы необходимо сделать выводы о целесообразности мероприятий по восстановлению отказавших элементов. Следует отметить, что возможность ремонта элементов приводит к уменьшению кратности резервирования и сокращению объёма оборудования.

Далее приводится решение рассмотренного примера в среде MathCad (рисунки 15 − 20). Как и в предыдущих случаях, оно не содержит комментариев; необходимо лишь отметить, что для решения системы дифференциальных уравнений используется встроенная функция Radau (рисунок 19).

$n := 4$

$m := 100$

$t := 1$

$$T := \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Tv := \begin{pmatrix} 1 \\ 240 \\ 2 \\ 48 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 10 \\ 100000 \\ 40 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \frac{1}{T} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 0.06667 \\ 0.16667 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda := \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \qquad \Lambda = 0.66667$$

$$P(t) := e^{-\Lambda \cdot t}$$

$$P(t) = 0.51342$$

$$T_1 := \frac{1}{\Lambda} \qquad T_1 = 1.5$$

$$R(t) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(r_i \cdot \lambda_i\right) \cdot \frac{1 - e^{-\Lambda \cdot t}}{\Lambda}$$

$$R(t) = 4946.1$$

$$Rt := \frac{R(t)}{m}$$

$$Rt = 49.4611$$

$$P1(t) := e^{-\lambda_0 \cdot t} \qquad P2(t) := 1 - \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right)^2 \qquad P3(t) := e^{-\lambda_2 \cdot t} \qquad P4(t) := e^{-\lambda_3 \cdot t}$$

$$Q1(t) := 1 - P1(t) \qquad Q2(t) := 1 - P2(t) \qquad Q3(t) := 1 - P3(t) \qquad Q4(t) := 1 - P4(t)$$

Рисунок 15 – Расчёт риска нерезервированной системы

$$R(t) := r_0\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q1(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_1\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q2(t)\right)P1(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_2\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q3(t)\right)P2(t)\cdot P1(t)\,P4(t)\,dt + r_3\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q4(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\,P1(t)\,dt$$

$R(t) = 365.2812$

$P1(t) := e^{-\lambda_0\cdot t}$ $\quad P2(t) := 1-\left(1-e^{-\lambda_1\cdot t}\right)^3$ $\quad P3(t) := e^{-\lambda_2\cdot t}$ $\quad P4(t) := e^{-\lambda_3\cdot t}$

$Q1(t) := 1 - P1(t)$ $\quad Q2(t) := 1 - P2(t)$ $\quad Q3(t) := 1 - P3(t)$ $\quad Q4(t) := 1 - P4(t)$

$$R(t) := r_0\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q1(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_1\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q2(t)\right)P1(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_2\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q3(t)\right)P2(t)\cdot P1(t)\,P4(t)\,dt + r_3\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q4(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\,P1(t)\,dt$$

$R(t) = 99.9919$

$$R(t) := r_0\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q1(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_1\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q2(t)\right)P1(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_2\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q3(t)\right)P2(t)\cdot P1(t)\,P4(t)\,dt + r_3\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q4(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\,P1(t)\,dt$$

$P1(t) := e^{-\lambda_0\cdot t}$ $\quad P2(t) := 1-\left(1-e^{-\lambda_1\cdot t}\right)^3$ $\quad P3(t) := e^{-\lambda_2\cdot t}$ $\quad P4(t) := 1-\left(1-e^{-\lambda_3\cdot t}\right)^2$

$Q1(t) := 1 - P1(t)$ $\quad Q2(t) := 1 - P2(t)$ $\quad Q3(t) := 1 - P3(t)$ $\quad Q4(t) := 1 - P4(t)$

$R(t) = 32.8873$

$$P(t) := e^{-\lambda_0 t}\cdot\left[1-\left(1-e^{-\lambda_1\cdot t}\right)^3\right]e^{-\lambda_2\cdot t}\cdot\left[1-\left(1-e^{-\lambda_3\cdot t}\right)^2\right]$$

t_tmp := t $\quad$ t_tmp = 1

t := 0, 0.1.. t_tmp

t =	P(t) =
0	1
0.1	0.95113
0.2	0.90448
0.3	0.85995
0.4	0.81746
0.5	0.77692
0.6	0.73826
0.7	0.7014
0.8	0.66626
0.9	0.63278
1	0.60088

$P(t) := P1(t)\cdot P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)$

$$T_1 := \int_0^\infty P(t)\,dt$$

$T_1 = 1.89403$

Рисунок 16 – Расчёт риска резервированной системы

$$P1(t) := e^{-\lambda_0 \cdot t} \qquad P2(t) := \left[1 + \lambda_1 \cdot t + \frac{(\lambda_1)^2 t^2}{2}\right] \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \qquad P3(t) := e^{-\lambda_2 \cdot t}$$

$$P4(t) := (1 + \lambda_3 \cdot t) \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t}$$

$$P(t) := P1(t) \cdot P2(t) \cdot P3(t) \cdot P4(t)$$

$$P(t) = 0.60366$$

$$T_1 := \int_0^{\infty} P(t)\,dt \qquad T_1 = 1.94175$$

$$Q1(t) := 1 - P1(t) \qquad Q2(t) := 1 - P2(t) \qquad Q3(t) := 1 - P3(t) \qquad Q4(t) := 1 - P4(t)$$

$$R(t) := r_0 \cdot \int_0^t \left(\frac{d}{dt} Q1(t)\right) P2(t) \cdot P3(t) \cdot P4(t)\,dt + r_1 \cdot \int_0^t \left(\frac{d}{dt} Q2(t)\right) P1(t) \cdot P3(t) \cdot P4(t)\,dt + r_2 \cdot \int_0^t \left(\frac{d}{dt} Q3(t)\right) P2(t) \cdot P1(t) \cdot P4(t)\,dt + r_3 \cdot \int_0^t \left(\frac{d}{dt} Q4(t)\right) P2(t) \cdot P3(t) \cdot P1(t)\,dt$$

$$R(t) = 14.48426$$

$$i := 0..n-1$$

$$\mu_i := \frac{1 \cdot 8760}{Tv_i}$$

$$\mu_0 = 8.76 \times 10^3$$

$$\mu_1 = 36.5$$

$$\mu_2 = 4.38 \times 10^3$$

$$\mu_3 = 182.5$$

$$\alpha_i := \frac{-(\mu_i + 3\lambda_i) + \sqrt{(\mu_i + 3\lambda_i)^2 - 8(\lambda_i)^2}}{2} \qquad \beta_i := \frac{-(\mu_i + 3\lambda_i) - \sqrt{(\mu_i + 3\lambda_i)^2 - 8(\lambda_i)^2}}{2}$$

$$x_i := \frac{\alpha_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\alpha_i - \beta_i} \qquad y_i := \frac{\beta_i + \mu_i + 3\lambda_i}{\beta_i - \alpha_i}$$

$$P1(t) := e^{-\lambda_0 \cdot t} \qquad P2(t) := x_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + y_1 e^{\beta_1 \cdot t} \qquad P3(t) := e^{-\lambda_2 \cdot t} \qquad P4(t) := x_3 \cdot e^{\alpha_3 \cdot t} + y_3 e^{\beta_3 \cdot t}$$

$$P(t) := P1(t) \cdot P2(t) \cdot P3(t) \cdot P4(t)$$

$$P(t) = 0.60632$$

Рисунок 17 – Расчёт показателей надёжности усовершенствованной системы

$$T_1 := \int_0^{\infty} P(t)\,dt$$

$$T_1 = 1.99861$$

$Q1(t) := 1 - P1(t)$ $\quad Q2(t) := 1 - P2(t)$ $\quad Q3(t) := 1 - P3(t)$ $\quad Q4(t) := 1 - P4(t)$

$$R(t) := r_0\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q1(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_1\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q2(t)\right)P1(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_2\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q3(t)\right)P2(t)\cdot P1(t)\,P4(t)\,dt + r_3\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q4(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\,P1(t)\,dt$$

$R(t) = 26.3597$

$$\alpha_i := \frac{-\left(\mu_i + 2\lambda_i\right) + \sqrt{\left(\mu_i + 2\lambda_i\right)^2 - 4\left(\lambda_i\right)^2}}{2} \qquad \beta_i := \frac{-\left(\mu_i + 2\lambda_i\right) - \sqrt{\left(\mu_i + 2\lambda_i\right)^2 - 4\left(\lambda_i\right)^2}}{2}$$

$$x_i := \frac{\alpha_i + \mu_i + 2\lambda_i}{\alpha_i - \beta_i} \qquad y_i := \frac{\beta_i + \mu_i + 2\lambda_i}{\beta_i - \alpha_i}$$

$P1(t) := e^{-\lambda_0\cdot t}$ $\quad P2(t) := x_1\cdot e^{\alpha_1\cdot t} + y_1 e^{\beta_1\cdot t}$ $\quad P3(t) := e^{-\lambda_2\cdot t}$ $\quad P4(t) := x_3\cdot e^{\alpha_3\cdot t} + y_3 e^{\beta_3\cdot t}$

$P(t) := P1(t)\cdot P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)$

$P(t) = 0.60643$

$$T_1 := \int_0^{\infty} P(t)\,dt$$

$T_1 = 1.9993$

$Q1(t) := 1 - P1(t)$ $\quad Q2(t) := 1 - P2(t)$ $\quad Q3(t) := 1 - P3(t)$ $\quad Q4(t) := 1 - P4(t)$

$$R(t) := r_0\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q1(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_1\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q2(t)\right)P1(t)\cdot P3(t)\cdot P4(t)\,dt + r_2\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q3(t)\right)P2(t)\cdot P1(t)\,P4(t)\,dt + r_3\cdot\int_0^t \left(\frac{d}{dt}Q4(t)\right)P2(t)\cdot P3(t)\,P1(t)\,dt$$

$R(t) = 17.13145$

$i := 0..\,n - 1$

$$\mu_i := \frac{8760}{Tv_i}$$

Рисунок 18 – Расчёт показателей надёжности усовершенствованной системы

$\mu_i =$

$8.76\cdot10^3$
36.5
$4.38\cdot10^3$
182.5

$$D(t,p) := \begin{bmatrix} -(\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + 2\cdot\lambda_3)\cdot p_0 + \mu_1\cdot p_2 + \mu_3\cdot p_4 \\ \lambda_0\cdot p_0 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot p_0 - (\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + \mu_1)\cdot p_2 \\ \lambda_2\cdot p_0 \\ 2\lambda_3\cdot p_0 - (\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3)\cdot p_4 + \mu_1\cdot p_8 + \mu_1\cdot p_{10} \\ \lambda_0\cdot p_2 \\ \lambda_1\cdot p_2 \\ \lambda_2\cdot p_2 \\ 2\lambda_3\cdot p_2 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1)\cdot p_8 \\ \lambda_0\cdot p_4 \\ 2\lambda_1\cdot p_4 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1)\cdot p_{10} \\ \lambda_2\cdot p_4 \\ \lambda_3\cdot p_4 \\ \lambda_0\cdot p_8 \\ \lambda_1\cdot p_8 \\ \lambda_2\cdot p_8 \\ \lambda_3\cdot p_8 \\ \lambda_0\cdot p_{10} \\ \lambda_1\cdot p_{10} \\ \lambda_2\cdot p_{10} \\ \lambda_3\cdot p_{10} \end{bmatrix} \qquad p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = 1$$

$$Z := \mathrm{Radau}[p, 0, t, (t\cdot10), D]$$

$$r_0(Z_{10,2} + Z_{10,6} + Z_{10,10} + Z_{10,14} + Z_{10,18}) + r_1(Z_{10,7} + Z_{10,15} + Z_{10,19}) + r_2(Z_{10,4} + Z_{10,8} + Z_{10,12} + Z_{10,16} + Z_{10,20}) + r_3(Z_{10,13} + Z_{10,17} + Z_{10,21}) = 26.32648$$

Рисунок 19 – Расчёт показателей надёжности восстанавливаемой системы

$$A := \begin{bmatrix} -(\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + 2\cdot\lambda_3) & \mu_1 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1 & -(\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + \mu_1) & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda_3 & 0 & -(\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_3 & 0 & -(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & -(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1) \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1.98501 \\ 0.00709 \\ 0.00217 \\ 0.00004 \\ 0.00001 \end{pmatrix} \qquad T1 := \sum_{i=0}^{4} X_i$$

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad T1 = 1.99431$$

$$\begin{pmatrix} Z_{10,1} \\ Z_{10,2} \\ Z_{10,3} \\ Z_{10,4} \\ Z_{10,5} \\ Z_{10,6} \\ Z_{10,7} \\ Z_{10,8} \\ Z_{10,9} \\ Z_{10,10} \\ Z_{10,11} \\ Z_{10,12} \\ Z_{10,13} \\ Z_{10,14} \\ Z_{10,15} \\ Z_{10,16} \\ Z_{10,17} \\ Z_{10,18} \\ Z_{10,19} \\ Z_{10,20} \\ Z_{10,21} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.60332
1	0.26104
2	0.00218
3	0.13052
4	0.00066
5	0.00091
6	0.00018
7	0.00046
8	0.00001
9	0.00028
10	$2.41163\cdot10^{-6}$
11	0.00014
12	0.00009
13	$4.80504\cdot10^{-6}$
14	$9.61008\cdot10^{-7}$
15	$2.40252\cdot10^{-6}$
16	$1.44151\cdot10^{-6}$
17	$1.00035\cdot10^{-6}$
18	$2.00071\cdot10^{-7}$
19	$5.00177\cdot10^{-7}$
20	$3.00106\cdot10^{-7}$
21	

Рисунок 20 – Значения вероятностей нахождения системы в разных состояниях

ЛИТЕРАТУРА

основная

1 Половко, А. М. Основы теории надёжности / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 702 с.

2 Половко А. М. Основы теории надёжности. Практикум / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 560 с.

3 Острейковский, В. А. Теория надёжности: учеб. для вузов / В. А. Острейковский. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2008. – 463 с.

4 Шишмарёв, В. Ю. Надёжность технических систем: учеб. для студ. вузов / В. Ю. Шишмарёв. – М. : ИЦ «Академия», 2010. – 304 с.

5 Сборник задач по теории надёжности / Под ред. А. М. Половко, И. М. Маликова. – М. : Советское радио, 1972. – 408 с.

6 Голинкевич, Т. А. Прикладная теория надёжности: учеб. для вузов / Т. А. Голинкевич. – М. : Наука, 1985.– 168 с.

7 Лисицын, Н. В. Основы инженерной безопасности химических производств / Н. В. Лисицын, И. В. Чалей, А. Н. Веригин. – СПб. : Изд-во Менделеев, 2005. – 170 с.

8 Марцулевич, Н. А. Надёжность химико-технологических систем: учеб. пособие / Н. А. Марцулевич, В. З. Борисов. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2002.– 149 с.

дополнительная

9 Гасов, В. М. Надёжность, эргономика и качество АСОИУ: учеб. пособие для вузов / В. М. Гасов, А. М. Цыганенко. – М. : МГУП, 2006. – 302 с.

10 Черкесов, Г. Н. Надёжность аппаратно-программных комплексов: учеб. пособие / Г. Н. Черкесов. – СПб. : Питер, 2005. – 479 с.

11 Кирьянов, Д. В. MathCad 13 / Д. В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

Надёжность, эргономика и качество автоматизированных систем

Андрей Васильевич Козлов
Андрей Николаевич Полосин
Пётр Иванович Комаров
Владимир Никифорович Уланов
Алла Александровна Чиркова

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$
Печ. л. 3,69. Тираж 100 экз. Заказ №

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Санкт - Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)"

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел. 494-93-65