Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

Кафедра Высшей математики

Т.В. Слободинская

В.С. Капитонов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения**

Санкт-Петербург
2006

ББК 22.1

Высшая математика: Учебное пособие / Слободинская Т.В., Капитонов В.С. - СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2006. – 104 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой курса «Высшая математика».

В учебное пособие включены учебная программа курса «Высшая математика», задания для контрольных работ и примеры их решения.

Учебное пособие предназначено для студентов 1 курса заочной формы обучения изучающих дисциплину «Высшая математика».

рис.7, табл.3, библиогр. 41 назв.

Рецензент: 1 Крауклис П.В., доктор физ.-мат. наук, проф, ведущий научный сотрудник петербургского отделения математического института Российской Академии наук.

Утверждено на заседании физико-матетматического отделения 03.04.2006.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Высшая математика» относится к циклу общенаучных учебных дисциплин. Цель курса - формирование научного мировоззрения у студентов, формирование математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, самостоятельного изучения специальной литературы, математического исследования прикладных вопросов, правильного истолкования и оценки получаемых результатов, а также формирования навыков самостоятельной работы.

Дисциплина «Высшая математика» для студентов заочного отделения читается на 1 курсе в первом и во втором семестрах. Студенты решают шесть контрольных работ, сдают два зачета и два экзамена.

В учебном пособии составлены шесть контрольных работ, включающие в себя содержание работы, варианты и примеры решения.

Студент самостоятельно выбирает вариант контрольной работы в соответствии с начальной буквой фамилии студента

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е, Ё	Ж	З	И, Й	К	Л	М	Н	О	П
№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Буква	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц, Ю	Ч	Ш, Щ	Э, Я
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Контрольная работа может быть написана от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном варианте; листы должны быть скреплены.

На титульном листе указывается фамилия, имя, отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта и ставится личная подпись студента.

1 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Содержание работы:

Задание №1 для нечетных вариантов, т.е. для вариантов 1, 3, 5, …., 25.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной данной прямой L.

Задание №1 для четных вариантов, т.е. для вариантов 2, 4, 6, …, 24

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C.

Задание №2 для нечетных вариантов.

Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

Задание №2 для четных вариантов.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной данной плоскости α.

Задание №3.

Даны матрицы A, B, C. Найти, если возможно, A+2B, B+2C, AB, BC.

Задание №4.

Решить систему уравнений по формулам Крамера.

Задание №5.

Исследовать и решить систему уравнений методом Гаусса.

Указания

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Методическое указание №382. Составители: Зайцева Л.В., Крючков А.Ф./ЛТИ-Л.,1987;
2. Линейная алгебра. Методические указания №206.Составители: Поникаровский И.Г., Слободинская Т.В. / ЛТИ-Л. 1989;
3. Определители. Формулы Крамера. Методические указания №185. Составители: Поникаровский И.Г., Слободинская Т.В., Зайцева Л.В. / ЛТИ – Л.,1991.

Вариант №1.

1. $A\,(2;\,0;\,1);\qquad L:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}.$
2. $A\,(2;\,0;\,1);\qquad B\,(3;\,2;\,-1).$
3. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}2x+3y+5z=10,\\ 3x+7y+4z=3,\\ x+2y+2z=3.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4,\\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9,\\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5.\end{cases}$

Вариант №2

1. $A\,(1;\,1;\,1);\qquad B\,(2;\,2;\,2);\qquad C\,(2;\,0;\,1).$
2. $A\,(1;\,1;\,1);\qquad \alpha:-x+2y+3z=4.$
3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}5x-6y+4z=3,\\ 3x-3y+2z=2,\\ 4x-5y+3z=2.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5,\\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9,\\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4.\end{cases}$

Вариант №3.

1. $A\,(2;\,1;\,1);\qquad L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{2}.$
2. $A\,(2;\,1;\,1);\qquad B\,(3;\,3;\,-1).$
3. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}4x-3y+2z=-4,\\ 6x-2y+3z=-1,\\ 5x-3y+2z=-3.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1,\\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4,\\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3.\end{cases}$

Заочное отделение

Вариант №4.

1. $A\,(1;2;1);\qquad B\,(2;3;2);\qquad C\,(2;1;1).$
2. $A\,(1;2;1);\qquad \alpha: -x+2y+2z=8.$
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2, \\ 2x-2y+5z=0, \\ 3x+4y+2z=-10. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7, \\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$

Вариант №5.

1. $A\,(2;1;2);\qquad L: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}.$
2. $A\,(2;1;2);\qquad B\,(3;3;0).$
3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ 3x+y+2z=3, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2. \end{cases}$

Вариант №6.

1. $A\,(1;1;2);\qquad B\,(2;2;3);\qquad C\,(2;0;2).$
2. $A\,(1;1;2);\qquad \alpha: -x+2y+z=11.$
3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases} 2x+y+2z=1, \\ x+2y+2z=2, \\ 2x+2y+z=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1. \end{cases}$

Вариант №7.

1. $A\,(2;\,2;\,1)$; $L: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.
2. $A\,(2;\,2;\,1)$; $B\,(3;\,4;\,-1)$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+2y+z=2, \\ 2x+y+z=1, \\ x+y+2z=2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1. \end{cases}$

Вариант №8.

1. $A\,(1;\,2;\,2)$; $B\,(2;\,3;\,3)$; $C\,(2;\,1;\,2)$.
2. $A\,(1;\,2;\,2)$; $\alpha: -x+y+z=21$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} 2x+2y+3z=3, \\ 4x+5y+6z=7, \\ 7x+8y+9z=13. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1. \end{cases}$

Вариант №9.

1. $A\,(1;\,1;\,1)$; $L: \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.
2. $A\,(1;\,1;\,1)$; $B\,(2;\,3;\,-1)$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 3x+y+2z=6, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$

Вариант №10.

1. $A\ (1;1;1)$; $B\ (2;2;2)$; $C\ (2;0;1)$.
2. $A\ (1;1;1)$; $\alpha: -x+3y+2z=15$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$

Вариант №11.

1. $A\ (0;1;1)$; $L: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.
2. $A\ (0;1;1)$; $B\ (1;3;-1)$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} 2x+y+3z=3, \\ 4x+2y+5z=5, \\ 3x+4y+7z=2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7, \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3. \end{cases}$

Вариант №12.

1. $A\ (0;1;1)$; $B\ (1;2;2)$; $C\ (1;0;1)$.
2. $A\ (0;1;1)$; $\alpha: x+2y+3z=4$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ x+5y+2z=5, \\ 2x+3y+4z=3. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1. \end{cases}$

Вариант №13.

1. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}.$
2. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad B\,(1;\,4;\,-1).$
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}x+3y+2z=4,\\ 2x+6y+z=2,\\ 4x+8y-z=2.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2,\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5,\\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3.\end{cases}$

Вариант №14.

1. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad B\,(1;\,3;\,2);\qquad C\,(1;\,1;\,1).$
2. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad \alpha: x+2y+2z=11.$
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}x+y+z=4,\\ 2x-3y+4z=-4,\\ 5x-7y+8z=-7.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2,\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5,\\ x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=3.\end{cases}$

Вариант №15.

1. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad L:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{1}.$
2. $A\,(0;\,2;\,1);\qquad B\,(1;\,4;\,-1).$
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$
4. $\begin{cases}2x+y+z=0,\\ 2x-3y+4z=5,\\ 4x-11y+10z=11.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+4x_4=0,\\ 2x_1-2x_2+2x_3+x_4=1,\\ 4x_1-3x_2+8x_3+9x_4=1.\end{cases}$

Вариант №16.

1. $A\,(0;\,2;\,2)$; $B\,(1;\,3;\,3)$; $C\,(1;\,1;\,2)$.
2. $A\,(0;\,2;\,2)$; $\alpha : x+2y+z=18$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 6x+3y+z=-9, \\ 8x-4y+2z=5. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2. \end{cases}$

Вариант №17.

1. $A\,(0;\,2;\,3)$; $L : \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.
2. $A\,(0;\,2;\,3)$; $B\,(1;\,4;\,1)$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+y=1, \\ x-2y+z=1, \\ x-2z=2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=4. \end{cases}$

Вариант №18.

1. $A\,(0;\,2;\,3)$; $B\,(1;\,3;\,4)$; $C\,(1;\,1;\,3)$.
2. $A\,(0;\,2;\,3)$; $\alpha : x+y+2z=5$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_5=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-4x_4+3x_5=5. \end{cases}$

Вариант №19.

1. $A\,(1;\,2;\,3);\qquad L:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-14}{1}$.
2. $A\,(1;\,2;\,3);\qquad B\,(2;\,4;\,1)$.
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases}2x-4y+3z=1,\\ x-2y+4z=3,\\ 3x-y+5z=2.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4,\\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7,\\ x_1-4x_2-x_3-3x_4=3.\end{cases}$

Вариант №20.

1. $A\,(1;\,2;\,3);\qquad B\,(2;\,3;\,4);\qquad C\,(2;\,1;\,3)$.
2. $A\,(1;\,2;\,3);\qquad \alpha:2x+y+z=16$.
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases}2x-y+z=2,\\ 3x+2y+2z=-2,\\ x-2y+z=1.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1,\\ 3x_1+7x_2-2x_3+x_5=4,\\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3.\end{cases}$

Вариант №21.

1. $A(2;2;1);\qquad L:\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.
2. $A\,(2;\,2;\,1);\qquad B\,(3;\,4;\,-1)$.
3. $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases}x+2y+3z=5,\\ 2x-y-z=1,\\ x+3y+4z=6.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1+x_2+4x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1,\\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=1.\end{cases}$

Заочное отделение

Вариант №22.

1. $A\,(2;\,2;\,1)$; $B\,(3;\,3;\,2)$; $C\,(3;\,1;\,1)$.
2. $A\,(2;\,2;\,1)$; $\alpha : 2x+2y+z=18$.
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x-y+z=13, \\ -x+y+z=7. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_5=2. \end{cases}$

Вариант №23.

1. $A\,(2;\,1;\,3)$; $L : \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.
2. $A\,(2;\,1;\,3)$; $B\,(3;\,3;\,1)$.
3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-x_4=1. \end{cases}$

Вариант №24.

1. $A\,(2;\,1;\,3)$; $B\,(3;\,2;\,4)$; $C\,(3;\,0;\,3)$.
2. $A\,(2;\,1;\,3)$; $\alpha : 2x+2y+3z=11$.
3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1. \end{cases}$

Заочное отделение

Вариант №25.

1. $A\,(2;\,2;\,3)$; $\quad L: \dfrac{x+7}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{3}$.

2. $A\,(2;\,2;\,3)$; $\quad B\,(3;\,4;\,1)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

Примеры решения

Задание №1.

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки *A (3; 2; 1), B (4; 5; -1)* и *C (5; 4; 2).*

Решение.

Уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz = D,$$

здесь *A, B, C* – координаты любого ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, а

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0,$$

причем $M_0\,(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – любая точка, принадлежащая плоскости.

В качестве точки, принадлежащей плоскости, возьмем точку *A (3; 2; 1).*

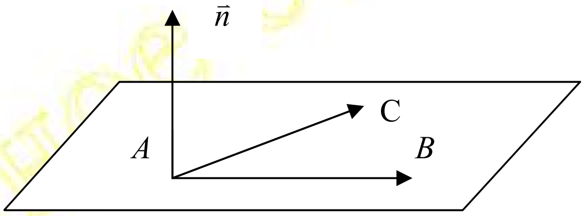

Рисунок 1

Векторы $\overrightarrow{AB} = (4-3)\cdot\vec{i} + (5-2)\cdot\vec{j} + (-1-1)\cdot\vec{k} = \vec{i} + 3\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 2\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + \vec{k}$ лежат в искомой плоскости, следовательно, их векторное произведение и будет вектором $\vec{n}$, перпендикулярным плоскости (смотри рисунок 1).

Вычислим его:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=7\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$$

Тогда $D=7\cdot 3-5\cdot 2-4\cdot 1=7$.

Уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$7x - 5y - 4z = 7.$$

Ответ: $7x - 5y - 4z = 7$.

Задание №2.

Написать уравнение прямой, проходящей через точки *A (3; 2; 1)* и *B (4; 5; -1)*.

Решение.

Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где l, m, n – координаты любого ненулевого вектора $\vec{S}$, параллельного прямой (направляющего вектора прямой), а x_0, y_0, z_0 – координаты любой точки, лежащей на прямой.

Возьмем в качестве точки, лежащей на прямой, точку *A (3; 2; 1)*, а за направляющий вектор $\vec{S}$ примем вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на прямой.

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(4-3)\cdot\vec{i}+(5-2)\cdot\vec{j}+(-1-1)\cdot\vec{k}=\vec{i}+3\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}.$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Ответ: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

Задание №3.

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -8\end{pmatrix}$.

Найти. Если возможно, *A + 2B, B +2C, AB, BC.*

Решение.

Сумма матриц определена только для матриц, имеющих равное число строк и столбцов, следовательно, А +2В – не определена.

Вычислим:

$$B+2\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 10\\ 6 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 1+0\\ 4+4 & 3+10\\ -1+6 & 2-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & 13\\ 5 & -14\end{pmatrix}.$$

Произведение матриц определено только если в первом сомножителе столько столбцов, сколько во втором строк. Следовательно, произведение *AB* – определено, а *BC* – нет.

Вычислим:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\Big[\text{элемент матрицы произведения, стоящий в } i-\text{ой строке и } j-\text{ом столбце равен } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\Big]=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot4+1\cdot(-1) & 2\cdot1+3\cdot3+1\cdot2\\ -3\cdot2+4\cdot4+2\cdot(-1) & -3\cdot1+4\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 13\\ 8 & 13\end{pmatrix}.$$

Задание №4.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x-y+z=-2,\\ 2x+2y-z=6,\\ 3x-y+2z=-2.\end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение.

Составим и вычислим главный определитель системы, т.е. определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= 4 - 2 + 3 - 6 - 1 + 4 = 2.$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получаются, если в определителе Δ заменить столбец коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot(-2) -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot 6\cdot 2 = 2.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x = \frac{2}{2} = 1;\quad y = \frac{2}{2} = 1;\quad z = \frac{-4}{2} = -2.$$

Проверка.

Подставим *x, y* и *z* в уравнения системы.

$$\begin{cases} 1 - 1 - 2 = -2, \\ 2 + 2 + 2 = 6, \\ 3 - 1 - 4 = -2. \end{cases}$$

Ответ: *x = 1, y = 1, z = –2.*

Задание №5.

Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 + 2\cdot x_5 = 1, \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_4 + 2\cdot x_5 = 1. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение.

Выпишем расширенную матрицу системы и, путем элементарных преобразований, приведем ее к трапециевидной форме.

$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$ [Вычтем из второй строки первую, умноженную на три, а из третьей – первую, умноженную на пять] $\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$ [Вычтем из третьей строки вторую] $\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$ [исключим нулевую строку] $\sim$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Ранг матрицы основной системы равен рангу расширенной матрицы и равен двум. Это можно символически записать так:

rgB = rgA = 2.

Число неизвестных равно 5, следовательно, 2 неизвестные – базисные, а 3 – свободные.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$ состоит из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2, значит, именно они – базисные, а x_3, x_4, x_5 – свободные.

Пусть $x_3 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$, $x_5 = \alpha_3$,

где α_1, α_2, α_3 – произвольные числа.

Тогда имеем (смотри вторую строку полученной после преобразований матрицы):

$$-7x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \text{ т.е.}$$

$$-7x_2 + 5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$$

Откуда

$$x_2 = \frac{5}{7}\cdot\alpha_1 - \frac{3}{7}\cdot\alpha_2 + \frac{2}{7}\cdot\alpha_3 - \frac{1}{7}$$

Далее первая строка преобразованной матрицы означает, что

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{10}{7}\cdot\alpha_1 + \frac{6}{7}\cdot\alpha_2 - \frac{4}{7}\cdot\alpha_3 + \frac{2}{7} - \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$x_1 = -\frac{17}{7}\cdot\alpha_1 + \frac{13}{7}\cdot\alpha_2 - \frac{4}{7}\cdot\alpha_3 + \frac{2}{7}.$$

Для удобства можно обозначить $\frac{\alpha_1}{7} = c_1$, $\frac{\alpha_2}{7} = c_2$, $\frac{\alpha_3}{7} = c_3$, где c_1, c_2, c_3 – тоже произвольные числа.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x_{1_1} = -17\cdot c_1 + 13\cdot c_2 - 4\cdot c_3 + \frac{2}{7}, \\ x_{2_1} = 5\cdot c_1 - 3\cdot c_2 + 2\cdot c_3 - \frac{1}{7}, \\ x_3 = 7\cdot c_1, \\ x_4 = 7\cdot c_2, \\ x_5 = 7\cdot c_3. \end{cases}$$

это и есть общее решение системы.

2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Содержание работы:

Задание №1

Вычислите пределы.

Задание №2

Найдите производные.

Задание №3

Вычислите интегралы.

Задание №4

Исследуйте функцию и постройте ее график.

Указание.

Перед решением заданий контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Теория пределов. Методические указания №485. Составители: Крючков А.Ф., Нечаева Л.В., Сорокин Г.М. / ЛТИ.-Л.,1990;
2. Основы дифференциального исчисления функций одной переменной. Методические указания №342. Составители: Демьянова Е.М., Курицын А.Ф., Абаньшин А.М. / ЛТИ. – Л.,1986;
3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Методические указания №443. Составители: Жузе А.Г., Заяев А.Б., Сорокин Г.М./ЛТИ.-Л.,1988;
4. Исследование поведения функций и построение графиков. Методические указания №878. Составители: Слободинская Т.В., Гизлерн Н.Н. и др. / СПбГТИ(ТУ)-СПб., 2001;
5. Интегралы функций одной переменной. Методические указания №347. Составители: Зубова А.Ф., Капитонов В.С., Крючков А.Ф. / ЛТИ. -Л.,1987.

Вариант №1.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3+8}{3x^4+2x^2+5}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{8x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{(2^x-1)^6}{\log_2 2x}$; 2.2. $y=(2\sin 3x+3\cos 3x)arctg\dfrac{4x+1}{2x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1 3^{2-3x}dx$; 3.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)\cos 2xdx$; 3.3. $\int\limits_1^6\dfrac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{3x+5}$.

Вариант №2.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+2x^2+7}{5x^4+3x^2+1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+16x+12}{x^3+8x^2+21x+18}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{6x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\sin 3x}{2x^2+3}$; 2.2. $y=(3e^{2x}+\ln 2x)\arccos\dfrac{2x+1}{x+2}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{x^4+1}$; 3.2. $\int\limits_0^1(x+1)e^{2x}dx$; 3.3. $\int\limits_1^5\dfrac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Вариант №3.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+8x^2+5x}{7x^3+2x+4}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 5x}{10x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{(3^x-1)^5}{\log_3 3x}$; 2.2. $y=(4\cos 2x-5\sin 2x)arcctg\dfrac{3x+1}{3x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$; 3.2. $\int\limits_1^e x\ln xdx$; 3.3. $\int\limits_{-1}^2\dfrac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$.

4. $y=\dfrac{1}{x}-x$.

Вариант №4.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^3+1}{4x^5+2x^2+3}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 4x}{8x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\cos 5x}{4x^3+3}$; 2.2. $y=(3e^{4x}+\log_2 3x)\arcsin\dfrac{4x+1}{3x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$; 3.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-5x)\sin xdx$; 3.3. $\int\limits_3^8\dfrac{dx}{1-\sqrt{x+1}}$.

4. $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Вариант №5.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+11}{x^3+2x+4}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x^2}-1}{9x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{(4^x-2)^3}{\log_4 4x}$; 2.2. $y=(2\cos3x-3\sin3x)arctg\dfrac{x+1}{x-1}$.

3. 3.1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3.2. $\displaystyle\int_0^1(3x-1)e^{3x}dx$; 3.3. $\displaystyle\int_1^5\frac{dx}{2+\sqrt{x+4}}$.

4. $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Вариант №6.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+8x+5}{2x^6+3x^2+x}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-8x+12}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+3x)}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{4x^2+1}{arctg2x}$; 2.2. $y=(5\sin5x-4\cos5x)ctg\dfrac{x+1}{x+2}$.

3. 3.1. $\displaystyle\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$; 3.2. $\displaystyle\int_{-2}^0(x+2)\cos3xdx$; 3.3. $\displaystyle\int_3^6\frac{dx}{2+\sqrt{x-2}}$.

4. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Вариант №7.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^3+1}{9x^5+11x+2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3^{2x}-1)^2}{4x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\ln^6x}{x^2+x}$; 2.2. $y=(4\cdot3^{2x}+2^{3x})\arccos\dfrac{x-2}{x+2}$.

3. 3.1. $\displaystyle\int_0^{\ln2}\frac{e^xdx}{1+e^x}$; 3.2. $\displaystyle\int_0^1 arctgxdx$; 3.3. $\displaystyle\int_2^7\frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}$.

4. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

Вариант №8.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+x^2+1}{2x^5+2x-1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 6x}{36x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{e^{3x}-1}{\ln3x}$; 2.2. $y=(5tg5x-3ctg5x)\arcsin\dfrac{x+3}{x-1}$.

3. 3.1. $\displaystyle\int_0^{\ln2}\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$; 3.2. $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{8}}(x-1)\sin4xdx$; 3.3. $\displaystyle\int_0^7\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Вариант №9.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5+11x-1}{2x^6+x+2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 4x}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\sin 4x}{4x^2+x}$; 2.2. $y=(3e^{2x}-22\ln 2x)arctg\dfrac{x-2}{x+1}$.

3. 3.1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(2+ctgx)^2}{\sin^2 x}dx$; 3.2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$; 3.3. $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

4. $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.

Вариант №10.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+2x^2+11}{2x^4+x-1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x}{x^4+3x^2-x}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3 2x}{3x^3}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{4^{2x}-1}{\log_4 2x}$; 2.2. $y=(2ctg2x-3tg3x)\arcsin\dfrac{x+1}{x+2}$.

3. 3.1. $\int\limits_1^{e^2}\dfrac{(2+\ln x)^2dx}{x}$; 3.2. $\int\limits_1^e(x+1)\ln xdx$; 3.3. $\int\limits_0^3\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$.

4. $y=\dfrac{4-x^2}{2x-1}$.

Вариант №11.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5+3x^4+2}{5x^5+x-1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+9x)}{81x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\log_3 3x}{3^{2x}-1}$; 2.2. $y=(3\cos 4x-4\sin 4x)arctg\dfrac{2x+1}{2x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin xdx$; 3.2. $\int\limits_{-3}^0(x+3)\sin xdx$; 3.3. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{2+\sqrt[3]{x}}$.

4. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Вариант №12.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+2x^2+5}{6x^4+x-3}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x^2}-1}{10x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\cos 5x}{3x^2+x}$; 2.2. $y=(2\cdot 3^{4x}-\ln 3x)\arcsin\dfrac{x-3}{x+4}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx$; 3.2. $\int\limits_{-4}^0(x+4)\cos 2xdx$; 3.3. $\int\limits_8^{27}\dfrac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

4. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Вариант №13.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+2x^4+3}{3x^6+x^2+x}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+6x)}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{ctg 2x}{\sin 4x}$; 2.2. $y=(3\cdot 4^{3x}+\log_4 3x)arctg\dfrac{2x-1}{2x+2}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x dx$; 3.2. $\int\limits_0^1(1-3x)e^{3x}dx$; 3.3. $\int\limits_1^9\dfrac{dx}{3+\sqrt[3]{x-1}}$.

4. $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Вариант №14.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7+2x+1}{2x^7+4x+3}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3+2x^2-1)^2}{x^4+2x+1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)^2}{6x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{4^{3x}}{\cos 3x}$; 2.2. $y=(2\sin 5x-\ln 5x)\arccos\dfrac{3x+1}{3x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1\dfrac{x^3dx}{1+x^4}$; 3.2. $\int\limits_1^e\ln x dx$; 3.3. $\int\limits_0^7\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $y=\dfrac{x}{4(x^2+1)}$.

Вариант №15.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^7+3x^2+1}{5x^8+2x+3}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{\log_2(1+3x)}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{ctg 11x}{x^2+3x}$; 2.2. $y=(4\cos 8x+8\sin 4x)arcctg\dfrac{5x+1}{5x-1}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$; 3.2. $\int\limits_0^{\pi}(2-3x)\sin 3x dx$; 3.3. $\int\limits_6^{25}\dfrac{dx}{2+\sqrt[3]{x+2}}$.

4. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Вариант №16.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^{12}+2x^5+x}{6x^{12}+x^4+6}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{8x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{7^{3x}-1}{\log_7 3x}$; 2.2. $y=(8ctg 2x+3tg 2x)arctg\dfrac{3x+2}{3x-2}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; 3.2. $\int\limits_0^1(3x+1)e^{3x}dx$; 3.3. $\int\limits_0^3\dfrac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}dx$.

4. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Вариант №17.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4+3x+2}{10x^3+3x^2+2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{\arcsin 3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{x^2+6x}{\sqrt{x+3}}$; 2.2. $y=(6^{3x}+2\sin 4x)\arccos\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

3. 3.1. $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$; 3.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos 2x dx$; 3.3. $\int\limits_0^3\dfrac{dx}{4+\sqrt{x+1}}$.

4. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Вариант №18.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^9+3x^3+x}{3x^9+9x^3+1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 4x}{4x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{e^x+2}}$; 2.2. $y=(9\cos 2x+2\sin 2x)arcctg\dfrac{5x+2}{5x-2}$.

3. 3.1. $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 3.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4x+1)\sin 4x dx$; 3.3. $\int\limits_7^{26}\dfrac{dx}{4+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

Вариант №19.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+3x^3+x}{3x^{10}+3x+1}$; 1.2 . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 10x}{5x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{2^{5x}-1}{\log_2(1+5x)}$; 2.2. $y=(4\cos 3x+3\sin 4x)arctg\dfrac{4x+3}{4x-3}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\sin x^2 dx$; 3.2. $\int\limits_0^1(4x+3)e^{4x}dx$; 3.3. $\int\limits_{26}^{63}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}$.

4. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.

Вариант №20.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8+x^4+2}{x^6+x^3+1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{6^{2x}-1}{\log_6 2x}$; 2.2. $y=(4\cos\dfrac{x}{4}+2\sin\dfrac{x}{2})arctg\dfrac{5x+2}{5x-2}$.

3. 3.1. $\int\limits_1^{\sqrt{e}}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 3.2. $\int\limits_0^2 (x-2)e^{\frac{x}{2}}dx$; 3.3. $\int\limits_4^{23}\dfrac{dx}{3+\sqrt[3]{x+4}}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

Вариант №21.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^8+x+11}{2x^8+x^2+2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x-4}{x^3+3x^2-4}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{7x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\log_9 8x}{9^{8x}-1}$; 2.2. $y=(3\sin\dfrac{x}{3}+6\cos\dfrac{x}{3})arcctg\dfrac{2x+5}{2x-5}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$; 3.2. $\int\limits_{-2}^0 (x+2)\sin\dfrac{x}{2}dx$; 3.3. $\int\limits_4^5\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x-4}}$.

4. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

Вариант №22.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{3x^3+2x^2+x}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 6x}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{10^{3x}-1}{\lg 3x}$; 2.2. $y=(5\sin\dfrac{x}{5}+2\cos\dfrac{x}{2})\arcsin\dfrac{4x+3}{4x-3}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$; 3.2. $\int\limits_0^3 (x-3)\sin\dfrac{x}{3}dx$; 3.3. $\int\limits_{10}^{29}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x-2}-1}$.

4. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$.

Вариант №23.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{4x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+x}}$; 2.2. $y=(3\cos\dfrac{x}{3}+2ctg\dfrac{x}{2})\arcsin\dfrac{2x-3}{2x+3}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; 3.2. $\int\limits_0^2 (2x+3)e^{\frac{x}{2}}dx$; 3.3. $\int\limits_0^1\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$.

4. $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$.

Вариант №24.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 8x}{4x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{3^{5x}-1}{\log_3 5x}$; 2.2. $y=(4ctg\dfrac{x}{4}+3tg\dfrac{x}{3})\arccos\dfrac{3x-2}{3x+2}$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx$; 3.2. $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)\ln(x+2)dx$; 3.3. $\int\limits_1^5\dfrac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

4. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Вариант №25.

1. 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2\frac{x}{2}}{3x^2}$.

2. 2.1. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 2.2. $y=(3ctg\dfrac{x}{3}+2\cos\dfrac{x}{2})\ln(1+\dfrac{2x+1}{2x-1})$.

3. 3.1. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\dfrac{xdx}{\cos^2x^2}$; 3.2. $\int\limits_0^{\pi}(3x-1)\cos\dfrac{x}{3}dx$; 3.3. $\int\limits_1^5\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}dx}$.

4. $y=\dfrac{-x^2}{(x+2)^2}$.

Примеры решения

Задание №1.

Вычислите пределы:

1.1

$$\lim_{x->\infty}\frac{4x^6+5x^3+7}{2x^6+x^2+12}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{поделим числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя, т.е. на } x^6]=\lim_{x->\infty}\frac{\frac{4x^6}{x^6}+\frac{5x^3}{x^6}+\frac{7}{x^6}}{\frac{2x^6}{x^6}+\frac{x^2}{x^6}+\frac{12}{x^6}}=$$

$$=\lim_{x->\infty}\frac{4+\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^6}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{12}{x^6}}=\frac{4+0+0}{2+0+0}=2.$$

1.2

$$\lim_{x->3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\left[\frac{0}{0}\right]=A.$$

Поделим числитель и знаменатель на критический множитель *(x – 3)*

Заочное отделение

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-4x^2-3x+18 & \;x-3 \\
\underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-x-6} \\
-\;-x^2-3x \qquad & \\
\underline{-x^2+3x\qquad} & \\
-\;-6x+18 & \\
\underline{-6x+18} & \\
0\quad &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-5x^2+3x+9 & \;x-3 \\
\underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-2x-3} \\
-\;-2x^2+3x \qquad & \\
\underline{-2x^2+6x\qquad} & \\
-\;-3x+9 & \\
\underline{-3x+9} & \\
0\quad &
\end{array}
$$

$A=\lim\limits_{x->3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$[*разложим числитель и знаменатель на множители, один из которых заведомо равен* $(x-3)$]$=\lim\limits_{x->3}\dfrac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x->3}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3+2}{3+1}=\dfrac{5}{4}$.

1.3

$\lim\limits_{x->0}\dfrac{\ln^2(1+6x)}{3x^2}$ = [используем эквивалентные бесконечно малые

$\ln(1+6x)\underset{x\to 0}{\sim}6x$] $=\lim\limits_{x->0}\dfrac{(6x)^2}{3x^2}=\lim\limits_{x->0}\dfrac{36x^2}{3x^2}=12$.

Задание №2.

Найдите производные.

2.1

$$y=\frac{9^{8x}-1}{\log_9(1+8x)}.$$

$$y'=\frac{(9^{8x}-1)'\log_9(1+8x)-(9^{8x}-1)(\log_9(1+8x))'}{\log_9^2(1+8x)}=$$

$$=\frac{9^{8x}\cdot\ln 9\cdot(8x)'\log_9(1+8x)-(9^{8x}-1)\cdot\dfrac{1}{(1+8x)\ln 9}\cdot(8x)'}{\log_9^2(1+8x)}=$$

$$=\frac{8(9^{8x}\cdot\ln 9\cdot\log_9(1+8x)-\dfrac{9^{8x}-1}{(1+8x)\ln 9})}{\log_9^2(1+8x)}=$$

$$=8\cdot\frac{9^{8\cdot x}\cdot\left(\ln^2 9\right)\cdot\left(1+8\cdot x\right)\cdot\log_9\left(1+8\cdot x\right)-9^{8\cdot x}+1}{\left(1+8\cdot x\right)\cdot\left(\ln 9\right)\cdot\log^2{}_9\left(1+8\cdot x\right)}.$$

2.2. $y=\left[5\cdot\cos(10\cdot x)+10\cdot\sin(5\cdot x)\right]\cdot\arcsin\left(\dfrac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)$.

Заочное отделение

$$y' = [5\cdot\cos(10\cdot x)+10\cdot\sin(5\cdot x)]'\cdot\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)+[5\cdot\cos(10\cdot x)+10\cdot\sin(5\cdot x)]\cdot\left(\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)\right)' =$$

$$=\left(5\cdot[\cos(10\cdot x)]'+10\cdot[\sin(5\cdot x)]'\right)\cdot\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)+$$

$$+[5\cdot\cos(10\cdot x)+10\cdot\sin(5\cdot x)]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)^2}}\cdot\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)'=$$

$$=\left[-5\cdot\sin(10\cdot x)\cdot(10\cdot x)'+10\cdot\cos(5\cdot x)\cdot(5\cdot x)'\right]\cdot\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)+$$

$$+[5\cdot\cos(10\cdot x)+10\cdot\sin(5\cdot x)]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)^2}}\cdot\frac{(4\cdot x+1)'\cdot(4\cdot x-1)-(4\cdot x+1)\cdot(4\cdot x-1)'}{(4\cdot x-1)^2}=$$

$$=50\cdot[\cos(5\cdot x)-\sin(10\cdot x)]\cdot\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)+$$

$$+5\cdot[\cos(10\cdot x)+2\cdot\sin(5\cdot x)]\cdot\frac{4\cdot x-1}{\sqrt{(4\cdot x-1)^2-(4\cdot x+1)^2}}\cdot\frac{4\cdot(4\cdot x-1)-4\cdot(4\cdot x+1)}{(4\cdot x-1)^2}=$$

$$=50\cdot[\cos(5\cdot x)-\sin(10\cdot x)]\cdot\arcsin\left(\frac{4\cdot x+1}{4\cdot x-1}\right)-10\cdot[\cos(10\cdot x)+2\cdot\sin(5\cdot x)]\cdot\frac{1}{(4\cdot x-1)\cdot\sqrt{-x}}.$$

Задание №3.

Вычислите интегралы.

3.1.

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\cdot\sin x^3 dx=\left[x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3\right)\right]=\frac{1}{3}\cdot\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}\sin x^3 d\left(x^3\right)=\left[\int\sin t dt=-\cos t+C\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\cos x^3\Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}}=-\frac{1}{3}\cdot(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{3}\cdot(-1-1)=\frac{2}{3}$$

3.2.

$$\int_0^1 (4\cdot x+3)\cdot e^{4\cdot x}dx=\left[\text{применим метод интегрирования по частям}: \int_a^b UdV=U\cdot V\Big|_a^b-\int_a^b VdU\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l} U=4\cdot x+3;\ dU=(4\cdot x+3)'dx=4dx \\ dV=e^{4\cdot x}dx;\ V=\int e^{4\cdot x}dx=\frac{1}{4}\cdot\int e^{4\cdot x}d(4\cdot x)=\frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x}\end{array}\right]=\frac{(4\cdot x+3)\cdot e^{4\cdot x}}{4}\Bigg|_0^1-\int_0^1 4\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x}\cdot(4\cdot x+3-1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot e^{4\cdot x}\cdot(2\cdot x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot e^4-1\right)\cdot$$

3.3.

$$\int_6^{30}\frac{dx}{3+\sqrt{x-5}}=\left[\begin{array}{l} t=3+\sqrt{x-5};\ x=(t-3)^2+5;\ t_{нижн}=3+\sqrt{6-5}=4; \\ dx=\left((t-3)^2+5\right)'dt=2\cdot(t-3)dt;\ t_{верхн}=3+\sqrt{30-5}=8.\end{array}\right]=\int_4^8\frac{2\cdot(t-3)dt}{t}=$$

$$=2\cdot\int_4^8\left(1-\frac{3}{t}\right)dt=2\cdot(t-3\cdot\ln|t|)\Big|_4^8=2\cdot(8-3\cdot\ln 8-4+3\cdot\ln 4)=2\cdot\left(4-3\cdot\ln\frac{8}{4}\right)=8-2\cdot\ln 8.$$

Задание №4.

Исследуйте функцию $y=\frac{x^4}{x^3-1}$ и постройте её график.

Решение.

1) Область определения функции $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Функция не является периодической.

$$y(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x)^3-1}=\frac{x^4}{-x^3-1},$$

$$y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x),$$

Следовательно, функция $y(x)$ - общего вида.

3) Функция непрерывна во всех точках оси, кроме точки $x=1$.

4) Выясним, будет ли прямая $x=1$ вертикальной асимптотой графика функции. Для этого вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty \quad , \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty \, .$$

Итак, график функции имеет одну вертикальную асимптоту $x=1$.
Найдем асимптоты графика функции при $x\to\pm\infty$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(x^3-1)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-1}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

Таким образом, прямая $y=k\cdot x+b$, т.е. $y=x$, является наклонной асимптотой одновременно для правой и левой ветвей графика функции.

5) Исследуем функцию на возрастание и убывание и найдём точки её экстремумов.

$$y'=\frac{4\cdot x^3\cdot(x^3-1)-3\cdot x^2\cdot x^4}{(x^3-1)^2}=\frac{x^3\cdot(x^3-4)}{(x^3-1)^2}.$$

Производная y' существует и конечна везде в области определения функции. Поэтому точки, “подозрительные” на экстремум находим из условия $y'=0$, т.е. $x^3\cdot(x^3-4)=0$. Получаем две точки: $x=0$, $x=\sqrt[3]{4}$.

Для определения промежутков монотонности и точек экстремума графика функции строим таблицу (смотри таблицу 1), выделяя в ней точки, в которых производная равна нулю или не существует (заметим, что поведение функции может измениться не только в точках экстремума, но и после разрыва графика функции).

Таблица 1

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4};+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y	↗	max	↘		↘	min	↗

Таким образом, функция возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(\sqrt[3]{4};+\infty)$ и функция убывает при $x\in(0;1)\cup(1;\sqrt[3]{4})$.

Вычислим значения функции в экстремальных точках:

$$y(0)=0; \qquad y\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{4}.$$

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найдем вторую производную функции:

$$y''=\frac{6\cdot\left(x^3+2\right)\cdot x^2}{\left(x^3-1\right)^3}.$$

Вторая производная тоже существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому “подозрительные” на перегиб точки находим из условия $y''=0.$ Решая уравнения $x^2\cdot\left(2+x^3\right)=0,$ получим две точки: $x=0$ и $x=-\sqrt[3]{2}.$ Однако, точка $x=0$ - точка гладкого максимума, поэтому остается исследовать только точку $x=-\sqrt[3]{2}.$ Для исследования направления выпуклости графика функции строим таблицу (смотри таблицу 2):

Таблица 2

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$	$-\sqrt[3]{2}$	$\left(-\sqrt[3]{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y''	+	0	-		+
y	$\cup$	перег.	$\cap$		$\cup$

Заметим, что в таблицу необходимо включать и точку разрыва графика функции.

Итак, график функции будет выпуклым при $x\in\left(-\sqrt[3]{2};1\right)$ и вогнутым при $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)\cup(1;+\infty).$ Точка $x=-\sqrt[3]{2}$ будет точкой перегиба графика функции $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{4}{3},$ т.е. перегиб под углом $arctg\,\frac{4}{3}.$ Значение функции в точке перегиба будет равно $y\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{2}.$

7) Используя результаты исследования, строим функции (смотри рисунок 2).

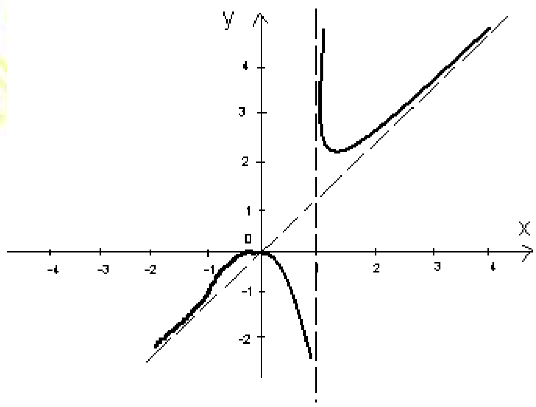

Рисунок 2 – График функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}.$

3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Содержание работы

Задание№1

Найдите полный дифференциал функции.

Задание №2

Исследуйте функцию на экстремум.

Задание №3

Найдите общее решение дифференциального уравнения. Найдите решение задачи Коши с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ и изобразите интегральную кривую.

Задание №4

Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Указания

Перед решением заданий контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Методические указания №924. Составители: Березникова В.В., Паульсен А.Н., Романовская Л. Н. / СПбГТИ(ТУ). – СПб., 2002;
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Методические указания №895. Составители: Демьянова Е.М., Купчиненко М. Б., Баскакова П. Е. / СПбГТИ(ТУ). – СПб., 2002;
3. Дифференциальные уравнения n-го порядка и линейные системы. Методические указания №87. Составители: Зубова А.Ф., Крючков А.Ф./ ЛТИ. – Л., 1987.

Вариант №1

1. $z = 2x^3 y - 4xy^3$.
2. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.
3. $(x-3)y' - 2y = 1;\quad y(1) = 2$.
4. $y'' + y' = x^2 + 6$.

Вариант №2

1. $z = arctgx + \sqrt{y}$.
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
3. $y' = \dfrac{2y}{x} + 3;\quad y(1) = 0$.
4. $y'' + 2y' + y = 10e^x$.

Вариант №3

1. $z = x^2 y \sin x - 3y$.
2. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.
3. $(x+1)y' - y = 1;\quad y(1) = 3$.
4. $y'' - 2y' = 3x + 2$.

Вариант №4

1. $z = \arcsin xy - 3xy^2$.
2. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
3. $(x-1)y' - 2y = 2;\quad y(2) = 1$.
4. $y'' - 3y' + 2y = 2x$.

Вариант №5

1. $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$.
2. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
3. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x};\quad y(1) = e^2$.
4. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$.

Вариант №6

1. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$.
2. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
3. $(x+1)y' - 2y = 4;\quad y(1) = 2$.
4. $y'' + y = -8\cos 3x$.

Заочное отделение

Вариант №7

1. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
2. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
3. $y' = \dfrac{2y}{x} + 1;\ \ y(1) = 0$.
4. $y'' - y = 2x$.

Вариант №8

1. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
2. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
3. $y'ctgx + y = 2;\ \ y(0) = -1$.
4. $y'' + y = 4xe^x$.

Вариант №9

1. $z = \arcsin(x + y)$.
2. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
3. $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ \ y(2) = 0$.
4. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

Вариант №10

1. $z = arctg(2x - y)$.
2. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
3. $y' = -2xy;\ \ y(0) = 1$.
4. $2y'' + 5y' = e^x$.

Вариант №11

1. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$.
2. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
3. $xdy + ydx = 0;\ \ y(1) = 1$.
4. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

Вариант №12

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 1}$.
2. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
3. $\dfrac{dx}{y + 1} + \dfrac{dy}{x} = 0;\ \ y(0) = 0$.
4. $y'' - 2y' = 2 - 2x$.

Вариант №13

1. $z = e^{x+y-4}$.
2. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
3. $(x+2)y' - 2y = 6;\quad y(-1) = -2$.
4. $y'' - y = 4e^x$.

Вариант №14

1. $z = \cos(3x + y) - x^2$.
2. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.
3. $(y+4)dx + (x-1)dy = 0;\quad y(2) = -3$.
4. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x$.

Вариант №15

1. $z = tg\dfrac{x+y}{x-y}$.
2. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
3. $(x-3)y' - 2y = 8;\quad y(4) = -3$.
4. $y'' + y = 6\sin 2x$.

Вариант №16

1. $z = ctg\dfrac{y}{x}$.
2. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.
3. $(y-4)dx + (x-9)dy = 0;\quad y(10) = 5$.
4. $y'' - y = x^2 - x + 1$.

Вариант №17

1. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.
2. $z = xy(12 - x - y)$.
3. $(y-2)dx - (x-3)dy = 0;\quad y(4) = 4$.
4. $y'' + y = \cos 2x$.

Вариант №18

1. $z = \ln(x + xy - y^2)$.
2. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.
3. $(y-3)dx - (x-2)dy = 0;\quad y(3) = 5$.
4. $y'' - 3y' = -18x$.

Заочное отделение

Вариант №19

1. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.
2. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
3. $(y+2)dx - (x-4)dy = 0;\;\; y(5) = 0$.
4. $y'' - 3y' = e^{3x}$.

Вариант №20

1. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$.
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
3. $y'x^3 = 2y;\;\; y(1) = \dfrac{1}{e}$.
4. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

Вариант №21

1. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{x}$.
2. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
3. $y' = -\dfrac{y}{x};\;\; y(1) = 2$.
4. $y'' + 2y' + y = e^x$.

Вариант №22

1. $z = arctg(x - y)$.
2. $z = xy(6 - x - y)$.
3. $y' = \dfrac{3y}{x} + 2;\;\; y(1) = -1$.
4. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

Вариант №23

1. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$.
2. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
3. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln\dfrac{y}{x});\;\; y(1) = e$.
4. $y'' - y = e^{-x}$.

Вариант №24

1. $z = y^2 + 3xy - x^4$.
2. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
3. $y'tgx - y = 1;\;\; y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.
4. $y'' - y' = e^x$.

Вариант №25

1. $z = \arcsin(x^2 + y^3)$.
2. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
3. $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$; $y(1) = 2$.
4. $y'' - y' = x$.

Примеры решения

Задание №1.

Найдите полный дифференциал функции $z = \sin(4 \cdot x + 3 \cdot y) - x^2 + x \cdot y + y^2 + 3$.

Решение.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left[\cos(4 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot \frac{\partial (4 \cdot x + 3 \cdot y)}{\partial x} - 2 \cdot x + y\right] dx +$$

$$+ \left[\cos(4 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot \frac{\partial (4 \cdot x + 3 \cdot y)}{\partial y} + x + 2 \cdot y\right] dy = [4 \cdot \cos(4 \cdot x + 3 \cdot y) - 2 \cdot x + y] dx +$$

$$+ [3 \cdot \cos(4 \cdot x + 3 \cdot y) + x + 2 \cdot y] dy.$$

Задание №2.

Исследуйте на экстремум функцию $z = x^3 + 3 \cdot x \cdot y^2 - 15 \cdot x - 12 \cdot y$.

Решение.

Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6 \cdot x \cdot y - 12.$$

Поскольку $z(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в любой точке плоскости, то для нахождения стационарных точек функции составим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 15 = 0, \\ 6 \cdot x \cdot y - 12 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x \cdot y = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 9, \\ x \cdot y = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x + y)^2 = 9, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Таким образом мы получили четыре стационарные точки $M_1(-2\ ;\ -1)$, $M_2(-1\ ;\ -2)$, $M_3(1;\ 2)$, $M_4(2\ ;\ 1)$.

Находим вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 6 \cdot y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot x.$$

Проверяем выполнение достаточных условий экстремума в каждой стационарной точке:

1. $M_1(-2;\ -1)$.

$$A_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-2;-1)} = 6 \cdot (-2) = -12 < 0; \qquad B_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right|_{(-2;-1)} = 6 \cdot (-1) = -6;$$

$$C_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-2;-1)} = 6 \cdot (-2) = -12;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = A_1 \cdot C_1 - B_1^2 = (-12) \cdot (-12) - (-6)^2 = 108 > 0,$$

следовательно, в точке $M_1(-2\ ;\ -1)$ данная функция имеет экстремум и поскольку $A_1 = -12<0$, то это локальный максимум. $z_{\max}(-2;-1) = 28.$

2. $M_2(-1;\ -2)$

$$A_2 = 6 \cdot (-1) = -6, \qquad B_2 = 6 \cdot (-2) = -12, \qquad C_2 = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-6) - (-12)^2 = -108 < 0,$$

следовательно, в точке $M_2(-1; -2)$ экстремума функция не имеет.

3. $M_3(1 ; 2)$

$$A_3 = 6 \cdot 1 = 6, \qquad B_3 = 6 \cdot 2 = 12, \qquad C_3 = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0,$$

т.е. в точке $M_3(1; 2)$ функция не имеет экстремума.

4. $M_4(2; 1)$

$$A_4 = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \qquad B_4 = 6 \cdot 1 = 6, \qquad C_4 = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0,$$

следовательно, в точке $M_4(2; 1)$ данная функция имеет экстремум, причем A_4 = 12>0, т.е. это локальный минимум. $z_{\min}(2; 1) = -28.$

Задание №3.

Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$(x-3) \cdot y' - 2 \cdot y = 1.$$

Найдите решение задачи Коши с начальными условиями $y(2) = \frac{1}{2}$ и изобразите интегральную кривую.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(x-3)\frac{dy}{dx} = (1 + 2 \cdot y),$$

$$(x-3)\,dy = (1 + 2 \cdot y)\,dx.$$

Разделим переменные, предположив, что $x \neq 3,\ y \neq -\frac{1}{2}$.

Получим

$$\frac{dy}{2 \cdot y + 1} = \frac{dx}{x-3}; \qquad \frac{2dy}{2 \cdot y + 1} = \frac{2dx}{x-3}.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\int \frac{2dy}{2 \cdot y + 1} = \int \frac{2dx}{x-3} + \ln|\,C\,|;$$

$$\ln|\,2 \cdot y + 1\,| = \ln\,(x-3)^2 \cdot |\,C\,|;$$

$$2 \cdot y + 1 = C \cdot (x-3)^2;$$

$$y = \frac{C \cdot (x-3)^2 - 1}{2}.$$

- общее решение дифференциального равнения.

Найдем теперь частное решение уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(2) = \frac{1}{2}.$$

Подставим эти условия в общее решение:

$$\frac{1}{2} = \frac{C \cdot (2-1)^2 - 1}{2}.$$

Откуда имеем: С = 2.
Частное решение уравнения имеет вид

$$y = (x-3)^2 - \frac{1}{2}.$$

Начертим интегральную кривую (смотри рисунок 3).

Заочное отделение

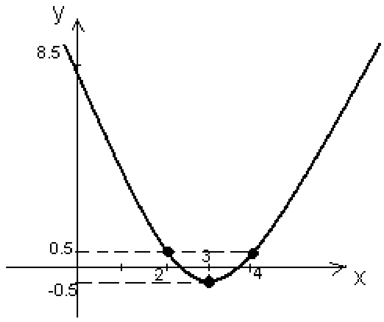

Рисунок 3.

Задание №4.

Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' - 4 \cdot y' = 4 \cdot x^2 + x + 2.$$

Решение.

Составим линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному уравнению и найдём его общее решение.

$$Y'' - 4 \cdot Y' = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 4 \cdot \lambda = 0,$$
$$\lambda \cdot (\lambda - 4) = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4.$

Фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^{0 \cdot x}, \text{ т.е. } y_1 = 1,$$
$$y_2 = e^{4 \cdot x}.$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$Y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, т.е.

$$Y = c_1 + c_2 \cdot e^{4x}.$$

Найдём теперь частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4 \cdot y' = 4 \cdot x^2 + x + 2.$$

методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения

$$P_2(x) = 4 \cdot x^2 + x + 2,$$

т.е. многочлен второй степени, причём число “0” является корнем характеристического уравнения, кратность корня равна 1, т.е. корень простой. Следовательно, частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_r = x \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x,$$
$$y' = 3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C,$$
$$y'' = 6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B.$$

Подставим y″ и y′ в уравнение:

$$6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B - 12 \cdot A \cdot x^2 - 8 \cdot B \cdot x - 4 \cdot C = 4 \cdot x^2 + x + 2.$$

Приравняем коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях уравнения:

$$x^2 : -12A = 4 \Rightarrow A = -\frac{1}{3};$$
$$x^1 : 6 \cdot A - 8 \cdot B = 1 \Rightarrow B = \frac{6}{8} \cdot A - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8};$$
$$x^0 : 2 \cdot B - 4 \cdot C = 2 \Rightarrow C = \frac{B}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{11}{16}.$$

Итак, частное решение уравнения:

$$y_r = -\frac{x^3}{3} - \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{11}{16} \cdot x.$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = Y + y_r.$$

Тогда

$y = c_1 + c_2 \cdot e^{4 \cdot x} - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{11}{16} \cdot x$ – общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

4 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

<u>Содержание работы</u>

Задание№1
Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд.

Задание №2
Исследовать на сходимость числовой знакочередующийся ряд.

Задание №3
Найти область сходимости степенного ряда.

Задание №4
Вычислить двойной интеграл.

Задание №5
Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

<u>Указания</u>

Перед решением заданий контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Числовые ряды. Методические указания №576. Составители: Волков Ю. П., Крючкова А. Ф., Сорокин Г. М. / СПбГТИ. – СПб., 1994;
2. Функциональные ряды. Методические указания №577. Составители: Волков Ю. П., Крючкова А. Ф., Сорокин Г. М./СПбГТИ. – СПб., 1994;
3. Кратные интегралы. Методические указания №324. Составители: Шаршукова Э. Д., Капитонов В. С. И др. / ЛТИ. – Л., 1986.

Заочное отделение

Вариант №1

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x+2)^n}{n2^n}$;

4. $\iint\limits_D (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy;\quad D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=x^2; \\ y=-\sqrt{x}. \end{matrix}\right\}$;

5. $y=16\sqrt{2x}; y=\sqrt{2x}; z=0; x+z=2.$

Вариант №2

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2+n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$;

4. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy;\quad D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=x^3; \\ y=-\sqrt[3]{x}. \end{matrix}\right\}$;

5. $y=5\sqrt{x}; y=\dfrac{5x}{3}; z=0; z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}.$

Вариант №3

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+n+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^n}$;

4. $\iint\limits_D (12xy+9x^2y^2)dxdy;\quad D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt{x}; \\ y=-x^2. \end{matrix}\right\}$;

5. $x^2+y^2=2; y=\sqrt{x}; z=0; z=15x.$

Вариант №4

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+3^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n3^n}$;

4. $\iint\limits_D (8xy+9x^2y^2)dxdy;\quad D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt[3]{x}; \\ y=-x^2. \end{matrix}\right\}$;

5. $x+y=2; y=\sqrt{x}; z=12y; z=0.$

Заочное отделение

Вариант №5

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+n+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n4^n}$;

4. $\iint_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy;\ D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt[3]{x}; \\ y=-x^2. \end{matrix}\right\}$;

5. $x=20\sqrt{2y}; x=5\sqrt{2y}; z=0; z+y=\frac{1}{2}$.

Вариант №6

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+3}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x+2)^n}{3^n}$;

4. $\iint_D (27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy;\ D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt{x}; \\ y=-x^3. \end{matrix}\right\}$;

5. $x=\frac{5\sqrt{y}}{2}; x=\frac{5y}{6}; z=0; z=\frac{5}{6}(3+\sqrt{y})$.

Вариант №7

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n3^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}$;

4. $\iint_D (4xy+3x^2y^2)dxdy;\ D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=x^2; \\ y=-\sqrt{x}. \end{matrix}\right\}$;

5. $x^2+y^2=2; x=\sqrt{y}; z=0; z=30y$.

Вариант №8

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n+4}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+3)^n}{2n+1}$;

4. $\iint_D (8xy+18x^2y^2)dxdy;\ D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt[3]{x}; \\ y=-x^2. \end{matrix}\right\}$;

5. $x+y=2; x=\sqrt{y}; z=\frac{12x}{5}; z=0$.

Вариант №9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{2n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{4^n}$;

4. $\iint\limits_D(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2)dxdy$; $D:\begin{Bmatrix} x=1; y=\sqrt{x}; \\ y=-x^3. \end{Bmatrix}$;

5. $y=17\sqrt{2x}; y=2\sqrt{2x}; z=0; x+z=\frac{1}{2}$.

Вариант №10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n^2+4}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n4^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)4^n}$;

4. $\iint\limits_D(6xy+24x^3y^3)dxdy$; $D:\begin{Bmatrix} x=1; y=\sqrt{x}; \\ y=-x^2. \end{Bmatrix}$;

5. $y=\frac{5\sqrt{x}}{3}; y=\frac{5x}{9}; z=0; z=\frac{5(3+\sqrt{x})}{9}$.

Вариант №11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{10n+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{10n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n}$;

4. $\iint\limits_D(4xy+16x^3y^3)dxdy$; $D:\begin{Bmatrix} x=1; y=x^3; \\ y=-\sqrt[3]{x}. \end{Bmatrix}$;

5. $x^2+y^2=8; y=\sqrt{2x}; z=0; z=\frac{15x}{11}$.

Вариант №12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+4^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n}$;

4. $\iint\limits_D(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4)dxdy$; $D:\begin{Bmatrix} x=1; y=x^2; \\ y=-\sqrt{x}. \end{Bmatrix}$;

5. $x+y=4; y=\sqrt{2x}; z=3y; z=0$.

Вариант №13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4n+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n-1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n4^n}$;

4. $\iint\limits_D (xy-4x^3y^3)dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=x^3; \\ y=-\sqrt{x}. \end{matrix}\right\}$;

5. $x=\frac{5}{6}\sqrt{y}; x=\frac{5}{18}y; z=0; z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{y})$.

Вариант №14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2+n}$;

4. $\iint\limits_D (3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4)dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=\sqrt[3]{x}; \\ y=-x^3. \end{matrix}\right\}$;

5. $x=19\sqrt{2y}; x=4\sqrt{2y}; z=0; z+y=2$.

Вариант №15

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+n+4}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n5^n}$;

4. $\iint\limits_D (44xy+16x^3y^3)dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=1; y=x^2; \\ y=-\sqrt[3]{x}. \end{matrix}\right\}$;

5. $x^2+y^2=8; x=\sqrt{2y}; z=0; z=\frac{30y}{11}$.

Вариант №16

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{3n+2}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{6n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-5)^n}{5^n}$;

4. $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} y=\frac{\pi}{2}; y=\pi; \\ x=1; x=2. \end{matrix}\right\}$;

5. $x+y=4; x=\sqrt{2y}; z=\frac{3x}{5}; z=0$.

Вариант №17

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6n+5}{3n+2}\right)^n$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n+1}$;

4. $\iint_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=0; y=\sqrt{\pi}; \\ y=\frac{x}{2}. \end{matrix}\right\}$;

5. $y=6\sqrt{3x}; y=\sqrt{3x}; z=0; x+z=3.$

Вариант №18

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+4)^n}{3^n}$;

4. $\iint_D y^2e^{-\frac{xy}{4}}dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=0; y=2; \\ y=x. \end{matrix}\right\}$;

5. $y=\frac{5}{6}\sqrt{x}; y=\frac{5}{18}x; z=0; z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x}).$

Вариант №19

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{3n+5}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+5}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-6)^n}{6^n}$;

4. $\iint_D 4ye^{2xy}dxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} y=\ln 3; y=\ln 4; \\ x=\frac{1}{2}; x=1. \end{matrix}\right\}$;

5. $x^2+y^2=18; y=\sqrt{3x}; z=0; z=\frac{5x}{11}.$

Вариант №20

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+11}{2n+3}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n+13}$;

4. $\iint_D 4y^2\sin xydxdy$; $D:\left\{\begin{matrix} x=0; y=x; \\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{matrix}\right\}$;

5. $x+y=6; y=\sqrt{3x}; z=4y; z=0.$

Вариант №21

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n}{n+3}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n+3}$;

4. $\iint_D y\sin xydxdy;\ D:\begin{Bmatrix} y=\frac{\pi}{2}; y=\pi \\ x=1; x=2. \end{Bmatrix}$;

5. $x=7\sqrt{3y}; x=2\sqrt{3y}; z=0; z+y=3.$

Вариант №22

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{8n-1}{4n+3})^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n+7^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{n8^n}$;

4. $\iint_D y^2e^{-\frac{xy}{2}}dxdy;\ D:\begin{Bmatrix} x=0; y=\sqrt{2} \\ y=x. \end{Bmatrix}$;

5. $z=x^2+y^2; y=x^2; y=1; z=0.$

Вариант №23

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{8^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{8n+5}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n6^n}(x-3)^n$;

4. $\iint_D 2y\cos 2xydxdy;\ D:\begin{Bmatrix} y=\frac{\pi}{4}; y=\frac{\pi}{2} \\ x=1; x=2. \end{Bmatrix}$;

5. $z+y=2; y=x^2; x=0; z=0.$

Вариант №24

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n-2}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)5^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$;

4. $\iint_D 8ye^{4xy}dxdy;\ D:\begin{Bmatrix} y=\ln 3; y=\ln 4 \\ x=\frac{1}{4}; x=\frac{1}{2}. \end{Bmatrix}$;

5. $y+z=1; x=y^2+1; x=0; y=0; z=0.$

Вариант №25

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n+5}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{8^n}$;

4. $\iint_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy;\ D:\left\{\begin{aligned} &y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}};x=0;\\ &y=\frac{2}{3}x.\end{aligned}\right\}$;

5. $z=\sqrt{1-y};x^2=y;z=0.$

Примеры решения

Задание № 1.

Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\cdot n+3}{2\cdot n+5}\right)^n$.

Решение.

Общий член ряда $U_n=\left(\frac{8\cdot n+3}{2\cdot n+5}\right)^n$.

Применим для исследования ряда на сходимость радикальный признак сходимости Коши. Вычислим

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{8\cdot n+3}{2\cdot n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot n+3}{2\cdot n+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\text{поделим числитель и знаменатель на } n\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{8+0}{2+0}=4>1.$$

следовательно, данный числовой ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задание № 2.

Исследовать на сходимость числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{7\cdot n-3}$.

Решение.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{7\cdot n-3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7\cdot n-3}.$$

Применим для исследования предельный признак сравнения. В качестве эталона для сравнения выберем расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Вычислим предел отношения общих членов ряда

$$k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{7\cdot n-3}}{\dfrac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{7\cdot n-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\text{\textit{поделим числитель и знаменатель на n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7-\dfrac{3}{n}}=\frac{1}{7-0}=\frac{1}{7}.$$

Получили, что 0 < k < ∞, следовательно, ряды имеют одинаковую сходимость. Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{7\cdot n-3}$ расходится. Таким образом, абсолютной сходимости знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{7\cdot n-3}$ не имеет. Исследуем ряд на условную сходимость. Применим для исследования признак Лейбница. Проверим выполнение условий признака.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7\cdot n-3}=0$, т.е. предел общего члена ряда равен нулю.

2. $\dfrac{1}{7\cdot n-3}>\dfrac{1}{7\cdot(n+1)-3}=\dfrac{1}{7\cdot n+4}$, т.е. абсолютные величины членов ряда монотонно убывают.

Вывод: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{7\cdot n-3}$ сходится условно.

Задание № 3.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(x+6)^n}{n\cdot 4^n}$.

Решение.

Общий вид степенного ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$.

Радиус сходимости степенного ряда может быть вычислен по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Для данного ряда $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$.

Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot 4^{n+1}}{n\cdot 4^n\cdot(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot(n+1)}{n}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=4.$$

Итак, радиус сходимости ряда R = 4. Интервал сходимости ряда ищется из неравенства

$$|x-x_0|<R.$$

Для данного ряда имеем:

$$|x+6|<4\Leftrightarrow -4<x+6<4\Leftrightarrow -10<x<-2.$$

Итак, интервал сходимости степенного ряда (–10; –2). Исследуем ряд на сходимость в граничных точках x = –10 и x = –2.

1. Пусть x = –10. Подставим x в ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-10+6)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-4)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2\cdot n-1}\cdot 4^n}{n\cdot 4^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – это гармонический расходящийся ряд, следовательно, сходимости в точке x = –10 степенной ряд не имеет.

2. Пусть x = –2. Подставим x в ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-2+6)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Получим знакочередующийся ряд, который не имеет абсолютной сходимости, так как ряд из абсолютных значений – это гармонический расходящийся ряд. Условия признака условной сходимости (признака Лейбница) выполняются, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и последовательность абсолютных значений членов ряда $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывает. Итак, в точке x = –2 степенной ряд сходится условно.

Вывод: область сходимости степенного ряда D = (–10; –2], причём в граничной точке “–2” ряд сходится условно.

Задание № 4.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (12\cdot x^2\cdot y^2+16\cdot x^3\cdot y^3)\,dxdy$ по области $D: y=x^2;\ x=1;\ y=-\sqrt{x}$.

Изобразим область интегрирования (смотри рисунок 4).

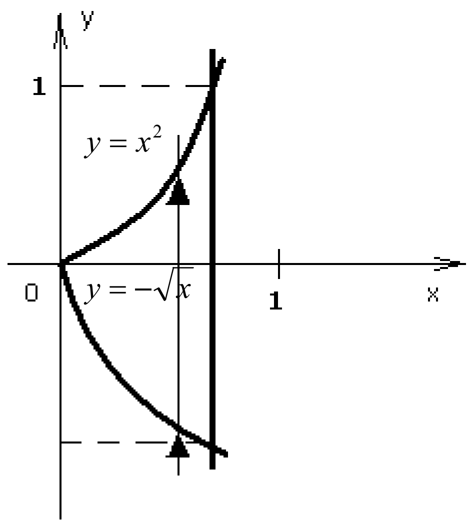

Рисунок 4.

Из чертежа видим, что 0 ≤ x ≤ 1, а y изменяется от $y=-\sqrt{x}$ до $y=x^2$

Тогда

$$\iint\limits_D (12\cdot x^2\cdot y^2+16\cdot x^3\cdot y^3)\,dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}(12\cdot x^2\cdot y^2+16\cdot x^3\cdot y^3)\,dxdy=$$

$$=12\cdot\int_0^1 x^2dx\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}y^2dy+16\cdot\int_0^1 x^3\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}y^3dy=$$

$$=12\cdot\int_0^1 x^2\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^2}dx+16\cdot\int_0^1 x^3\cdot\frac{y^4}{4}\bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^2}dx=$$

$$=4\cdot\int_0^1 (x^8+x^{\frac{7}{2}})\,dx+4\cdot\int_0^1 (x^{11}-x^5)\,dx=$$

$$=4\cdot\left(\frac{x^9}{9}+\frac{2\cdot x^{\frac{9}{2}}}{9}+\frac{x^{12}}{12}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=4\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)=1.$$

Итак, $\iint\limits_D (12\cdot x^2\cdot y^2+16\cdot x^3\cdot y^3)\,dxdy=1$.

Задание № 5.

Найти объём тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$x = 17 \cdot \sqrt{2 \cdot y}; x = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot y}; z = 0; z + y = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$x = 17 \cdot \sqrt{2 \cdot y}$ и $x = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot y}$ - это полупараболические цилиндры, $z + y = \frac{1}{2}$ - плоскость, параллельная оси Ox, z = 0 - плоскость xOy (смотри рисунки 5 и 6).

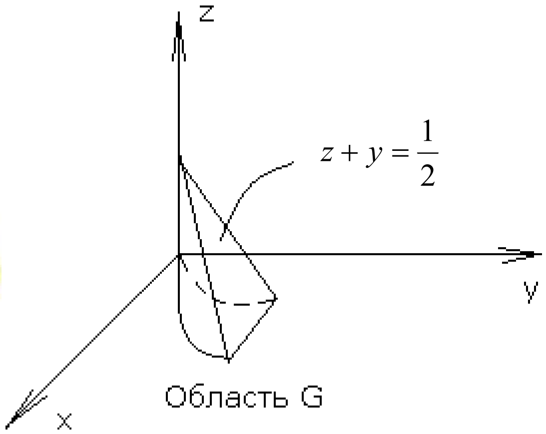

Рисунок 5.

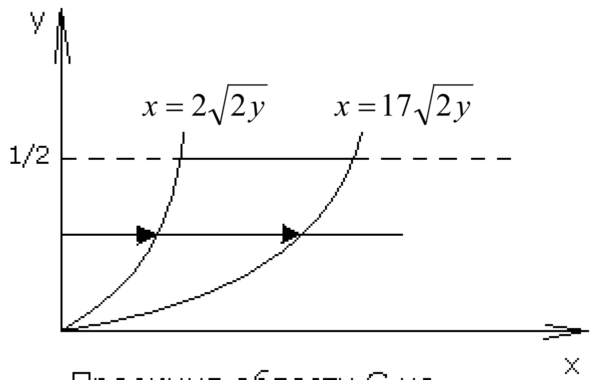

Рисунок 6.

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2\cdot\sqrt{2\cdot y}}^{17\cdot\sqrt{2\cdot y}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-y} dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2\cdot\sqrt{2\cdot y}}^{17\cdot\sqrt{2\cdot y}} z\Big|_0^{\frac{1}{2}-y} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2\cdot\sqrt{2\cdot y}}^{17\cdot\sqrt{2\cdot y}} \left(\frac{1}{2} - y\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y\right) dy \int_{2\cdot\sqrt{2\cdot y}}^{17\cdot\sqrt{2\cdot y}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y\right) \cdot x\Big|_{2\cdot\sqrt{2\cdot y}}^{17\cdot\sqrt{2\cdot y}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y\right) \cdot (17 \cdot \sqrt{2 \cdot y} - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot y})\, dy =$$

$$= 15 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy = 15 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2 \cdot y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = 15 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot \sqrt{2}} - \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2}}\right) = 1.$$

Ответ: объём тела равен 1.

5 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

<u>Содержание работы</u>

Задание 1

Найти вероятность по формуле Бейеса или формуле полной вероятности.

Задание 2

Найти вероятность по формуле Бернулли, Пуассона или Лапласа.

Задание 3

Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (a, b] ($P(a<X\leq b)$), построить график функции распределения F(x), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей.

Задание 4.

Считая, что X - нормально распределенная величина, которая задается плотностью вероятности $f(x)=A\cdot e^{-a\cdot(x-x_0)^2}$

найти A, M(X), D(X), $P(|X-x_0|<b)$.

Для выполнения контрольной работы №5 рекомендуется предварительно изучить:

1. Методические указания по решению задач теории вероятностей, ЛТИ, 1977. Комаров Л.Б. (№78);
2. Теория вероятностей и математическая статистика, «Высшая школа», Москва, 1972. Гмурман В.Е.; главы 4, 5, 7, 8, 12.

Вариант 1

1. В двух одинаковых урнах содержатся черные и красные шары: в первой - 2 черных и 7 красных, во второй - 5 черных и 10 красных. Из наудачу выбранной урны извлечен шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что извлеченный шар оказался из первой урны.

2. Найти вероятность наступления события в двадцати независимых испытаниях не менее шести раз, если вероятность наступления его в каждом испытании равна 0.8.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-3,2] ($P(-3<X\leq 2)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-3	-2	0	3	4

P	0,1	0,1	0,2	0,1	0,5

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X- нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-2\cdot x^2}$, найти A, P(|X|>0.5), M(X), D(X).

Вариант 2

1. На складе 200 деталей, из которых 100 изготовлено цехом №1, 60 – цехом №2 и 40 - цехом №3. Вероятность брака для цеха №1 – 3%, для цеха №2 – 2% и для цеха №3 -1%. Наудачу взятая со склада деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена цехом №2.

2. Вероятность выхода из строя каждого элемента в течение часа равна 0.002. Найти вероятность того, что в течение часа из пятисот элементов выйдут из строя три элемента.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-3,5] ($P(-3<X\leq 5)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-3	-1	2	5	6
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-2\cdot x^2}$, найти A, P(|X-1|<1.5), M(X), D(X).

Вариант 3

1. Предприятие выпускает за смену изделия трех типов в количестве 160, 430 и 360 штук каждого типа. ОТК ставит штамп либо «БРАК», либо «ЭКСПОРТ». Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие пойдет на экспорт, если вероятности этого для каждого изделия вида 1,11 и 111 соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,6.

2. Вероятность попадания при каждом выстреле по движущейся мишени равна 0,6. Какова вероятность того, что из 25 выстрелов десять окажутся удачными?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-4,7] ($P(4<X\leq 7)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	1	4	5	6	8
P	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}$, найти A, M(X), D(X), P(0<X<5).

Вариант 4

1. С двух швейных фабрик поступают на базу внешне одинаковые изделия. С первой фабрики поступает втрое больше изделий, чем со второй. Вероятность брака для изделий первой фабрики 0,1, для изделий второй фабрики – 0,05. Найти вероятность того, что наудачу взятое на базе изделие окажется небракованным.

2. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы равна 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-1; 0,5] ($P(-1<X\leq 0{,}5)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{x^2}{5}}$, найти A, M(X), D(X), P(|X-M(X)|<2).

Вариант 5

1. С трех конвейеров поступили на склад детали в количестве 150, 300 и 350 штук соответственно. Вероятность брака для детали с первого конвейера – 0,3, со второго – 0,2, и с третьего – 0,2. Наудачу взятая деталь поступила оказалась небракованной. Найти вероятность того, что эта деталь поступила с третьего конвейера.

2. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что число попаданий при 900 выстрелах будет от 690 до 740.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (6,9] ($P(6<X\leq 9)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-1	5	6	8	10
P	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x) = A \cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(-3<X<0).

Вариант 6

1. В классе 30 учеников, из которых 8 отличников и два отстающих. Вероятность решить предложенную задачу для отличника – 0,9, для отстающего – 0,3, для остальных учеников – 0,7. Наудачу вызванный ученик решил задачу. Какова вероятность того, что это был отличник?

2. Вероятность брака для каждого изделия равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести отобранных изделий число небракованных будет не меньше трех?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-3,0] (P(-3<X≤0)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-5	-4	-2	0	1
P	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x) = A \cdot e^{-(x-2)^2}$, найти A, M(X), D(X), P(1,5<X<3).

Вариант 7

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 бегунов и 4 велосипедиста. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника – 0,8, для бегуна – 0,9, для велосипедиста – 0,7. Наудачу выбранный спортсмен выполнил норму. Найти вероятность того, что этот спортсмен – лыжник.

2. Вероятность попадания по мишени при каждом выстреле 0,6. Найти вероятность того, что при 30 выстрелах число попаданий будет от 15 до 20.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-2,3] (P(-2<X≤3)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-5	-4	-3	0	2
P	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$, найти A, M(X), D(X), P(-2<X<3).

Вариант 8

1. В двух урнах содержатся по 6 белых и 4 красных шара в каждой, в трех других урнах по 5 белых и 3 красных шара в каждой. Из наудачу выбранной урны наудачу извлекли шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что шар оказался из урны первого состава.

2. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,001. Какова вероятность отказа трех элементов?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (1,4] (P(1<X≤4)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	0	1	2	3	5
P	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$, найти A, M(X), D(X), вероятность того, что при трех независимых испытаниях X дважды попадет в интервал (0,2).

Вариант 9

1. Из 14 стрелков пять попадают в мишень с вероятностью 0,8, шесть с вероятностью 0,6 и три с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. Какова вероятность того, что стрелок принадлежал ко второй группе стрелков?

2. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Каковы вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет не менее четырех?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (0,6] (P(0<X≤6)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-4	0	1	3	6
P	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$, найти A, M(X), D(X), вероятность того, что X попадет в интервал (-2,3).

Вариант 10

1. На чемпионате по хоккею учрежден приз «лучший бомбардир». Участвуют четыре команды по 12 форвардов в каждой. Вероятность получения приза для форвардов из первой команды – ½, из второй – 1/3, из третьей – ¼ и из четвертой – 1/6. Какова вероятность, что обладатель приза представляет команду №2?

2. По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, 30 приходится сзазубринами. Найти вероятность того, что из случайно отобранных 7 брусков без дефекта окажутся не более двух.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-5,2] (P(-5<X≤2)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-7	-5	0	1	3
P	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), вероятность того, что при четырех независимых испытаниях X ни разу не попадет в интервал (0,2).

Вариант 11

1. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4 и 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

2. Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна 0,6. Найти вероятность того, что в результате 7 опытов событие A появилось не менее двух раз.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-7,4] (P(-7<X≤4)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-8	-3	0	1	5
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x) = A \cdot e^{-3x^2}$, найти A, M(X), D(X), P(|X|<0,5).

Вариант 12

1. Три зенитки выстрелили одновременно по самолету, и в результате произошло одно попадание. Найти вероятность того, что самолет сбит второй зениткой, если вероятности попадания для каждого орудия соответственно 0,2, 0,3, 0,4.

2. Стрелок стреляет по мишени 7 раз. Вероятность попадания при отдельном выстреле 0,8. определить вероятность того, что произошло не менее 2 и не более 5 попаданий.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-3,4] (P(-3<X≤4)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-5	-2	-1	0	4
P	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x) = A \cdot e^{-2(x+4)^2}$, найти A, M(X), D(X), P(|X+4|<0,5).

Вариант 13

1. В трех одинаковых ящиках – шары двух цветов: в первом – 10 шаров, из них 7 зеленых, во втором – 20 (8 зеленых), в третьем - 30 (15 зеленых). Из наудачу выбранного ящика взяли два шара. Определить вероятность того, что они одного цвета.

2. Игральная кость бросается 6 раз. Определить вероятность того, что грань с тремя очками выпадет не менее двух и не более четырех раз.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-1,4] (P(-1<X≤4)), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-2	-1	0	4	6
P	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+5)^2}{18}}$, найти A, M(X), D(X), $P(-10<X<3)$.

Вариант 14

1. Стрелок делает столько выстрелов, сколько «орлов» выпадает на двух монетах. Вероятность попадания при каждом выстреле у него равна 0,8. Какова вероятность того, что он не попадет ни разу?

2. Для поражения цели достаточно двух попаданий. Произведено три выстрела. Определить вероятность поражения цели, если при одном выстреле вероятность попадания 0,8.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-8,0] ($P(-8<X\leq 0)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-10	-8	-5	0	6
P	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-(x-5)^2}$, найти A, M(X), D(X), $P(|X-5|\geq 0{,}7)$.

Вариант 15

1. Имеется 3 одинаковых урны. В первой 11 белых и 7 красных шаров, во второй 4 белых и 5 красных, в третьей 8 белых и 10 красных шаров. Из наудачу выбранной урны взяли 2 шара. Они оказались белыми. Найти вероятность того, что извлечение произведено из первой урны.

2. Вероятность брака для каждого изделия равна 0,3. Какова вероятность, что при проверке серии изделий первое бракованное изделие окажется шестым из проверенных?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-7,4] ($P(-7<X\leq 4)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-7	-2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-x^2}$, найти A, M(X), D(X), $P(-1<X<1)$.

Вариант 16

1. Стрелок сделал столько выстрелов, сколько «орлов» выпало на двух монетах, и попал ровно 1 раз. Вероятность попадания у него равна 0,7. Какова вероятность, что был сделан только один выстрел?

2. Какова вероятность, что в записи семизначного числа содержится ровно 3 единицы?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (6,9] ($P(6<X\le 9)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-1	0	2	4	7
P	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$, найти A, M(X), D(X), $P(0<X<3)$.

Вариант 17

1. Баскетболист, бросив игральную кость, делает столько бросков по корзине, сколько очков выпало на игральной кости. Какова вероятность, что при этом будет ровно три попадания, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,6?

2. Баскетболист делает 6 бросков по корзине. Вероятность попадания при каждом броске 0,8. Определить вероятность того, что произошло не менее двух попаданий.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (6,9] ($P(6<X\le 9)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-3	-1	2	4	5
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{4}}$, найти A, M(X), D(X), $P(-3<X<1)$.

Вариант 18

1. С первого автомата поступает 45% деталей, со второго – 30%, с третьего – 25%. Поступившие на сборку деталь годная. Какова вероятность того, что она изготовлена на втором автомате, если брак на 1 автомате – 6%, на втором – 5%, а на третьем – 8%?

2. Игральную кость бросают 125 раз. Какова вероятность, что шестерка выпадет 20 или 21 раз?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (6,9] ($P(6<X\leq 9)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	1	3	4	7	8
P	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-9\frac{(x+3)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(-3<X<3).

Вариант 19

1. Бросили три монеты. Стрелок делает столько выстрелов, сколько выпало на них «орлов». Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность, что стрелок попадет ровно два раза?

2. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель равна 0,8. Найти вероятность того, что 21-е попадание будет ровно в 26-ом выстреле.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (2,5] ($P(2<X\leq 5)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	0	2	3	5	6
P	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(0<X<2).

Вариант 20

1. Вероятность попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,4 0,5 и 0,6. При одновременном

выстреле всех трех стрелков имелось два промаха. Определить вероятность того, что попал третий стрелок.

2. Игральную кость бросают 5 раз. Какова вероятность того, что «двойка» выпадет меньше двух раз?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-4,5] ($P(-4<X\le 5)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-4	-3	0	5	7
P	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(|X|<3).

Вариант 21

1. Имеется три одинаковых урны. В первой 12 зеленых и 8 красных шаров, во второй 8 зеленых и 8 красных шаров, в третьей 12 зеленых и 4 красных шара. Из наудачу выбранной урны взяли 2 шара. Они оказались разноцветными. Найти вероятность того, что извлечение произведено из второй урны.

2. Для поражения танка достаточно трех попаданий. Произведено 5 выстрелов. Определить вероятность поражения танка, если при одном выстреле вероятность попадания 0,6.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (1,5] ($P(1<X\le 5)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	1	4	5	8	10
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-0,5)^2}{4}}$, найти A, M(X), D(X), P(|X|<2).

Вариант 22

1. В урне 10 белых и 15 черных шаров. Стрелок вытаскивает 2 шара, затем делает столько выстрелов, сколько среди них белых. Вероятность попадания при отдельном выстреле для него 0,8. Определить вероятность того, что он не попал ни разу.

2. Вероятность попадания в корабль при одном выстреле равна 0,05. Для поражения корабля необходимо 4 попадания. Произведено 100 выстрелов. Какова вероятность того, что корабль остался на плаву?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-5,4] ($P(-5<X\le 4)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-9	-5	-3	0	4
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{6}}$, найти A, M(X), D(X), P(1<X<4).

Вариант 23

1. В трех одинаковых ящиках шары двух цветов: в первом ящике 8 шаров, из них 5 белых, во втором – 7 (4 белых), в третьем – 9 (6 белых). Их наудачу выбранного ящика взяли 2 шара разного цвета. Найти вероятность того, что шары из третьего ящика.

2. Какова вероятность, что при бросании шести монет «орел» откроется более чем на двух?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (3,9] ($P(3<X\le 9)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	1	3	4	7	9
P	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+0,2)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(-1<X<2).

Вариант 24

1. Два автомата производят детали, поступающие на общий конвейер. Вероятность изготовления дефектной детали первым автоматом равна 0,15, вторым – 0,2. Производительность второго автомата вдвое больше первого. Найти вероятность того, что поступившая на конвейер деталь годная.

2. Электронный экзаменатор задает 5 вопросов. Вероятность правильного ответа на любой из них равна 0,8. Какова вероятность, что будут правильные ответы более чем на три вопроса?

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-5,4] ($P(-5<X\le 4)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-5	-3	0	4	6
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-25\frac{(x-0,2)^2}{2}}$, найти A, M(X), D(X), P(-0,1<X<0,4).

Вариант 25

1. Бросили три монеты. Баскетболист сделал столько бросков, сколько на них выпало «орлов». Вероятность попадания при одном броске 0,6. Какова вероятность того, что баскетболист попал только 1 раз?

2. Производятся испытания прибора. При каждом из них прибор может дать отказ с вероятностью 0,1. После первого отказа прибор ремонтируется, после второго признается негодным. Найти вероятность того, что прибор будет признан негодным на шестом испытании.

3. Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (1,4] ($P(1<X\le 4)$), если закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-3	1	2	4	8
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения F(x).

4. Считая, что X - нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{8}}$, найти A, M(X), D(X), P(|X|<3).

<u>Примеры решения</u>

Задание 1

Два автомата выпускают одинаковые детали, которые попадают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое выше производительности второго. Первый автомат выпускает 60% , а второй 80% деталей первого сорта. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найти вероятность того, что она произведена 1-м автоматом.

Решение

Обозначим события:

А-деталь 1-го сорта,

B_1- деталь произведена 1-м автоматом,

B_2-деталь произведена 2-м автоматом.

По формуле Бейеса

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)}$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)$$

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\ P(B_2)=\frac{1}{3},\ P(A/B_1)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(A/B_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5},$$

Следовательно

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$P(B_1/A)=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задание 2

Вероятность появления некоторого события в каждом из 5 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события, по крайней мере, 3 раза.

Решение

Искомая вероятность равна сумме

$$P = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)\ ,$$

где по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k};\ \ p = 0{,}2;\ \ q = 0{,}8\ .$$

Тогда найдем

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 10\cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512,$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2 = 5\cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064,$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032,$$

$$P = 0{,}05792.$$

Задание 3

Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), вероятность попадания в интервал (-1,4] (P(-1<X≤4)), если закон распределения дискретной случайной величины х задан таблицей

X	-1	0	2	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Построить график функции распределения F(x).

Решение

Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = (-1)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}2 = -0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}8 + 1 = 2{,}3.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$M(X^2) = (-1)^2\cdot 0{,}1 + 0^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}2 + 5^2\cdot 0{,}2 = 0{,}1 + 1{,}2 + 3{,}2 + 5 = 9{,}5 \quad ,$$

$$D(X) = 9{,}5 - (2{,}3)^2 = 9{,}5 - 5{,}29 = 4{,}21.$$

Вероятность попадания в интервал равна сумме вероятностей всех значений случайной величины, которые попадают в этот интервал:

P(-1<X≤4)=0,2+0,3+0,2=0,7.

Функция распределения F(x) случайной величины X определяется формулой F(x)=P(X < x), следовательно:

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le -1 \\ 0{,}1\ , & -1 < x \le 0 \\ 0{,}3\ , & 0 < x \le 2 \\ 0{,}6\ , & 2 < x \le 4 \\ 0{,}8\ , & 4 < x \le 5 \\ 1\ , & 5 < x \end{cases}$$

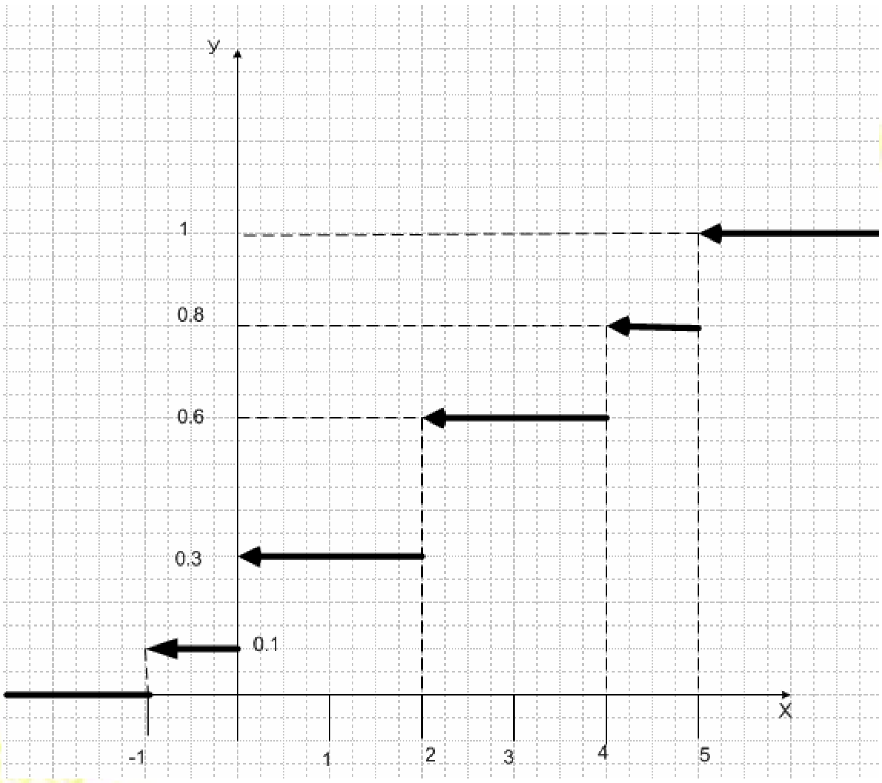

Рисунок 7 - График y=F(x).

Задание 4

Считая, что X- нормально распределенная случайная величина, которая задается функцией плотности вероятности

$$f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{50}}.$$

Найти A, M(X), D(X), P(|X+3|<2).

Решение

Для нормально распределенной случайной величины плотность вероятности определяется формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)}{2\cdot\sigma^2}},$$

где m – математическое ожидание, σ^2 - дисперсия.

В нашем случае

$m=-3,\ 2\cdot\sigma^2=50,\ \sigma^2=25$, значит $\sigma=5$, а коэффициент A будет равен:

$$A=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{2\pi}}.$$

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу(α, β), P(α<X<β)=Φ($\frac{\beta-m}{\sigma}$)-Φ($\frac{\alpha-m}{\sigma}$) , где Ф(х)=$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2/2}dx$ – функция Лапласа.

В нашем случае применима формула:

$P(|X-m|<\delta)=2\cdot\Phi(\delta/\sigma)$,

$P(|X+3|<2)=2\cdot\Phi(2/5)=2\cdot\Phi(0{,}4)$.

По таблице значений функции Ф(х) найдем Ф(0,4)=0,1554 ,

Тогда $P(|X+3|<2)=0{,}318$.

Ответ: А=$\frac{1}{5\cdot\sqrt{2\pi}}$, M(X)= -3 , D(X)=25, $P(|X+3|<2)=0{,}318$.

6 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6

Содержание работы

Задание 1

По заданной выборке найти выборочное среднее $\tilde{m}$, выборочную дисперсию $\tilde{s}^2$, исправленную выборочную дисперсию $\tilde{\sigma}^2$.

Задание 2

Считая, что исследуемый качественный признак является непрерывной нормально распределенной величиной с неизвестными параметрами m и σ;

а) составить функцию плотности вероятности теоретического распределения генеральной совокупности на основе найденных параметров выборки;

б) найти доверительный интервал для оценки математического ожидания *m* с надежностью γ = 0,95.

Задание 3.

Найти выборочное уравнение регрессии и коэффициент регрессии $r_в$.

Указания

Для выполнения контрольной работы №6 рекомендуется предварительно изучить:

1) Методические указания по решению задач математической статистики, ЛТИ, 1977. Комаров Л.Б.;

2) Теория вероятностей и математическая статистика, “Высшая школа”, Москва, 1972. Гмурман В.Е.; глава 16 §§ 4, 9, 15, 16; глава 18 §6.

Вариант 1

Задания 1, 2

x	152	156	160	164	168	172	176	180	184
m	10	30	105	230	250	220	115	30	10

Задание 3

y \ *x*	1	2	3	4	5
14	1	1			
15		1	1		
16			2	1	
17				1	
18					2

Вариант 2

Задания 1, 2

x	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	+2,5	+7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
m	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Задание 3

y \ *x*	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8
14	5					
15	4	12				
16		8	5	4		
17		1	5	7	12	
18					1	1

Вариант 3

Задания 1, 2

x	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55
m	5	11	15	42	88	81	36	20	8	4

Задание 3

y \ *x*	1	3	5	7	9
7				2	4
10			3	4	6
13		1	8	3	2
16		2	9	6	
19	3	5	7	2	
21	8	4	1		

Вариант 4

Задания 1, 2

x	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
m	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Задание 3

y \ *x*	5	15	25	35	45	55	65
4	2		2				
8		1	4				
12		4	3	10			
16		2		2	3	6	
20					5	4	2
24					1	1	

Заочное отделение

Вариант 5

Задания 1, 2

x	24	27	33	33	36	39	42	45	48	51
m	2	3	1	16	18	20	16	11	9	4

Задание 3

y \ x	5	10	15	20	25	30	35	40
100	2	1						
120	3	4	3					
140			5	10	8			
160				1		6	1	1
180							1	

Вариант 6

Задания 1, 2

x	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11,0	11,2	11,3
m	1	1	2	2	2	4	4	2	1	1

Задание 3

y \ x	18	23	28	33	38	43	48
125		1					
150	1	2	5				
175		3	2	12			
200			1	8	7		
225				3	3		
250					1	1	

Вариант 7

Задания 1, 2

x	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	+2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
m	8	10	15	25	48	40	27	17	7	3

Задание 3

y \ *x*	5	10	15	20	25	30	35
100						6	1
120						4	2
140			8	10	5		
160	3	4	3				
180	2	1		1			

Вариант 8

Задания 1, 2

x	4,764	4,766	4,768	4,770	4,772	4,774	4,776	4,778	4,780	4,782
m	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1

Задание 3

y \ *x*	35	45	55	65	75	85	95
3						4	6
9				6	6	8	
15		1	2	14	3		
21	1	5	18	2			
27		4	10	2			
33	1	5	2				

Вариант 9

Задания 1, 2

x	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
m	6	7	12	19	30	10	8	6	4	2

Задание 3

y \ x	90	95	105	115	125	135	140
90	2	2	2				
95	3	4	5	2	1		
105		4	22	6	2		
115		3	10	13	2	1	
125	2	1	5	5	5		
130	1	1	2	3	3	2	3

Вариант 10

Задания 1, 2

x	150,7	155,7	160,7	165,7
m	10	30	40	20

Задание 3

y \ x	1	2	3	4	5
14	10	8			
15		12	7		
16			28	6	
17				8	9
18					12

Заочное отделение

<u>Вариант 11</u>

Задания 1, 2

x	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
m	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5

Задание 3

y \ x	20	30	40	50	60	70	80
20	19	5					
30	23	110	11				
40	1	41	98	9			
50		4	32	65	7		
60		1	4	21	36	3	
70			1	2	11	13	1
80					1	3	2

<u>Вариант 12</u>

Задания 1, 2

x	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
m	4	6	16	36	24	10	4

Задание 3

y \ x	1	2	3	4
1	1			
2	2	1		
3	1	2	1	
4		1	2	1
5			1	2

Заочное отделение

Вариант 13

Задания 1, 2

x	130	150	170	190	210	230	250	270
m	1	4	10	14	12	6	2	1

Задание 3

y \ x	1	2	3	4
1	1	3	3	1
2	1	3	3	1
3	1	3	3	1
4	1	3	3	1
5	1	3	3	1

Вариант 14

Задания 1, 2

x	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
m	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Задание 3

y \ x	75	85	95	105	115	125	135	145
170	1	3						
175	2	6	4	1		1		
180		4	13	11	1	3		
185			5	4	2	5		
190				8	5	4	3	1
195				2	2	7	1	1

Заочное отделение

Вариант 15

Задания 1, 2

x	-7,5	-2,5	2,5	7,5	12,5	17,5
m	10	19	32	23	12	14

Задание 3

y \ x	50	60	70	80	90
10	2	2			
15	2	4	2		
20		5	7		
25		6	12	10	8
30		4	10	10	
35			4	5	6

Вариант 16

Задания 1, 2

x	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
m	2	3	1	4	2	3	1	2	1	1

Задание 3

y \ x	30	60	90	120	120	150	200
100	3	2	2	1			
250	1	4	3	1			
300		1	5	2			
400		1	4	4	1		
500				2	3		
600				1	4	1	
700				1	3	2	1
800					1	4	5

Заочное отделение

<u>Вариант 17</u>

Задания 1, 2

x	4	8	12	16	20	24
m	4	5	17	13	9	2

Задание 3

y \ x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
12	4								
18	6	10	2						
24		8	13	1					
30		4	7	9	3	4	2		
36		1	2	3	12	4	8		
42				1	13	18	24	1	
48							7	12	3
54								9	18

<u>Вариант 18</u>

Задания 1, 2

x	10	12	14	16	20	24
m	10	16	17	27	24	6

Задание 3

y \ x	200	300	400	500	600
140			1	2	4
150	1	2	3	3	1
160	4	3	1	1	
170	1				

Вариант 19

Задания 1, 2

x	5	15	25	35	45	55	65
m	2	7	9	12	8	11	1

Задание 3

y \ *x*	25	45	65
2	20	1	
3	2	30	1
5			48

Вариант 20

Задания 1, 2

x	144,5	147,5	150,5	153,5	156,5	159,5	162,5	165,5	168,5
m	1	2	8	26	65	120	181	201	170

Задание 3

y \ *x*	7	8	9	10
200	41	7		
300	1	52	1	
400			40	2

Заочное отделение

Вариант 21

Задания 1, 2

x	171,5	174,5	177,5	180,5	183,5	186,5
m	120	64	28	10	3	1

Задание 3

y \ x	200	300	400
7	41	1	
8	7	52	8
9		1	40

Вариант 22

Задания 1, 2

x	14	15	16	17	18
m	18	19	34	17	12

Задание 3

y \ x	0	1	2	3	4
10	20				
11	7	15	3		
12		3	17	4	
13			8	13	7
14					42

Заочное отделение

Вариант 23

Задания 1, 2

x	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310
m	11	9	11	19	34	67	93	75	39	26	7	5

Задание 3

$y \backslash x$	0	25	50	75	100
10	3				
12	1	2	1		
14		4	2	3	
16				2	5

Вариант 24

Задания 1, 2

x^*_i	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
m_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Задание 3

$y \backslash x$	0	10	20	30
10	4			
12	1	2	1	
14			4	2
16				5

Вариант 25

Задания 1, 2

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
n_i	1	3	25	54	69	60	32	4	2

Задание 3

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	2					
2	1	2				
3		3	4	1		
4				4	1	
5					2	1
6						1

Примеры решения

Задание №1.

По заданной выборке найти выборочное среднее $\widetilde{m}$, выборочную дисперсию $\widetilde{s}^2$, исправленную выборочную дисперсию $\widetilde{\sigma}^2$.

x	2	4	6	8	10
m	1	3	10	3	1

Решение.

Объём выборки: $n = \sum_{i=1}^{l} m_i = 1+3+10+3+1 = 18$

Выборочное среднее:

$$\widetilde{m} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{l} m_i \cdot x_i = \frac{1}{18} \cdot (1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 10\cdot 6 + 3\cdot 8 + 1\cdot 10) = \frac{1}{18} \cdot 108 = 6$$

Выборочная дисперсия:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{l} m_i \cdot x_i^2 \right) - (\tilde{m})^2$$

$$\sum_{i=1}^{l} m_i \cdot x_i^2 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 10 \cdot 36 + 3 \cdot 64 + 1 \cdot 100 = 704$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{18} \cdot 704 - 36 = 39,(1) - 36 = 3,(1) = 3\frac{1}{9} \approx 3,11$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \tilde{s}^2 = \frac{18}{17} \cdot \frac{28}{9} = \frac{56}{17} \approx 3,29$$

Задание №2.

а) Составить функцию плотности вероятности теоретического распределения генеральной совокупности на основе найденных параметров выборки;

б) Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надёжностью $\gamma = 0,95$.

Решение.

а) $$f(x) = \frac{1}{\tilde{\sigma} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{m})^2}{2 \cdot \tilde{\sigma}^2}} = \frac{1}{1,8 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{6,6}}$$

б) При известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности доверительный интервал с надежностью γ определяется формулой

$$\tilde{m} - t \cdot \left(\sigma / \sqrt{n}\right) < m < \tilde{m} + t \cdot \left(\sigma / \sqrt{n}\right),$$

где $t \cdot \left(\sigma / \sqrt{n}\right) = \delta$ - точность оценки,
n – объём выборки,
t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma / 2.$

Если объём выборки $n > 30$, то можно заменить σ на $\tilde{\sigma}$. Для малого объёма выборки, т.е. $n < 30$ и неизвестном σ следует пользоваться формулой

$$\widetilde{m}-t_{\gamma}\cdot\frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{n}}<m<\widetilde{m}+t_{\gamma}\cdot\frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

где t_{γ} находят по таблице.

В нашем случае объём выборки $n=18<30,$ следовательно для нахождения доверительного интервала используем последнюю формулу. Из таблиц $t_{\gamma}(0{,}95\,;18)=\;2{,}11$ тогда

$$\widetilde{m}-2{,}11\cdot\frac{1{,}8}{\sqrt{18}}<m<\widetilde{m}+2{,}11\cdot\frac{1{,}8}{\sqrt{18}},\quad \widetilde{m}=6,$$

окончательно найдём:

$$5{,}1<m<6{,}9$$

Задание №3.

Найти выборочное уравнение регрессии и коэффициент корреляции $r_{в}$.

y \ x	5	10	15	n_y
2	3	1		4
3		4	1	5
4			2	2
n_x	3	5	3	11

Решение.

Найдём выборочные средние:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum n_x\cdot x=\frac{1}{11}\cdot(3\cdot 5+5\cdot 10+3\cdot 15)=\frac{1}{11}\cdot 110=10,$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\cdot\sum n_y\cdot y=\frac{1}{11}\cdot(4\cdot 2+5\cdot 3+2\cdot 4)=\frac{1}{11}\cdot 31=\frac{31}{11}.$$

Затем выборочные дисперсии:

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n}\cdot\sum n_x\cdot x^2-\overline{x}^2=\frac{1}{11}\cdot\left(3\cdot 5^2+5\cdot 10^2+3\cdot 15^2\right)-100=\frac{150}{11}\approx 13{,}6\,.$$

$$\sigma_y{}^2=\frac{1}{n}\cdot\sum n_y\cdot y^2-\overline{y}^2=\frac{1}{11}\cdot(4\cdot 4+5\cdot 9+2\cdot 16)-\left(\frac{31}{11}\right)^2=\frac{62}{121}\approx 0{,}512,$$

тогда

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{0,512}{13,6}} \approx 0,20\,.$$

Коэффициент корреляции:

$$r_в = \left(\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}\right) / \left(n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y\right),$$

Здесь

$$\sum n_{xy} \cdot x \cdot y = 3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 10 \cdot 2 + 4 \cdot 10 \cdot 3 + 1 \cdot 15 \cdot 3 + 2 \cdot 15 \cdot 4 = 335,$$

$$n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = 11 \cdot 10 \cdot \frac{31}{11} = 310\,.$$

Искомый коэффициент корреляции равен:

$$r_в = (335 - 310)/29 = \frac{25}{29} \approx 0,86\,.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}),$$

в нашем случае:

$$\overline{y}_x - 2,82 = 0,86 \cdot 0,20 \cdot (x - 10),$$

окончательно

$$\overline{y}_x = 0,17 \cdot x + 1,10..$$

Заочное отделение

7 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)
(СПбГТИ-ТУ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе, проф.

_____________И.Г. Масленников

________________ 2006г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

учебной дисциплины ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Для химико- технологических специальностей (заочная форма обучения)
Отделение Физико-математическое
Кафедра высшей математики

Курс 1

Семестры 1, 2

Лекции	30 ч.	Экзамены	1, 2 семестры
Практические занятия	30 ч.	Зачеты	1, 2 семестры
Всего	60 ч.	Самостоятельная работа 510 ч.	

Санкт-Петербург 2006

Рабочая программа составлена на основании Государственного общеобразовательного стандарта высшего профессионального образования.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики «   » марта 2006 г.
Заведующий кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ______________ Т.В. Слободинская

Одобрено учебно-методической комиссией физико-математического отделения «   » _____________ 2006 г.

Председатель, доктор тех. наук, проф. _____________Ю.А.Иванов

Программу составили к.ф.-м.н., доц. Слободинская Т. В., к.ф.-м.н., доц. Капитонов В. С., к.ф.-м.н., доц. Климовицкая Н. М.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» И ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Дисциплина «Высшая математика» относится к циклу общенаучных учебных дисциплин. Цель курса - формирование научного мировоззрения у студентов, формирование математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, самостоятельного изучения специальной литературы, математического исследования прикладных вопросов, правильного истолкования и оценки получаемых результатов, а также формирования навыков самостоятельной работы.

Основная часть теоретического материала, перечисленного в программе, излагается на лекциях. Главной задачей практических занятий является формирование и развитие умений и навыков, необходимых для практического применения математического аппарата. Данный курс является математической основой для многих разделов большинства общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин.

При построении курса реализуется принцип преемственности обучения,- он опирается на математические знания, умения и навыки студентов, приобретенные ими в общеобразовательной школе и средних специальных учебных заведениях

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ 2.1. ТЕМЫ ЛЕКЦИЙ

2.1.1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия (2ч.).

- Векторы. Линейные операции над векторами. Теоремы о линейной зависимости Базисы на плоскости и в пространстве. Координаты векторов. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.
- Уравнения плоскости. Прямая линия в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей.

2.1.2. Алгебра (2ч.)

- Матрицы. Операции над матрицами. Определители. Обратная матрица.
- Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобразования матриц.
- Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера. Теорема Кронекера - Капелли. Однородные системы линейных алгебраических уравнений.
- Преобразование координат на плоскости и в пространстве. Канонические уравнения кривых второго порядка. Приведение

общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

- Комплексные числа. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители.

2.1.3. Введение в математический анализ (2 ч.)

- Окрестности точек на числовой оси. Числовые функции. Предел непрерывность функции в точке. Предел числовой последовательности.
- Число е.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке. Основные теоремы о пределах.
- Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.
- Функции, непрерывные на промежутке и их свойства.

2.1.4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной (2 ч.)

- Производная функции. Дифференцируемая функция. Дифференциал. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Правила дифференцирования.
- Производная сложной и обратной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
- Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена.
- Исследование функций и построение графиков.

2.1.5. Интегралы функций одной переменной (3 ч.).

- Первообразная и неопределенный интеграл. Их свойства. Методы интегрирования.
- Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений.
- Определенный интеграл, его свойства. Интегрируемые функции.
- Формула Ньютона - Лейбница. Методы вычисления определенны интегралов.
- Приложения определенного интеграла.

2.1.6.Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (2ч.).

- Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Частные производные. Дифференцируемые функции. Дифференциал.
- Дифференцирование сложной функции. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

- Экстремумы функций двух переменных.
- Неявные функции. Дифференцирование неявных функций.
- Производная по направлению, градиент.

2.1.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения(3 ч.).

- Общие понятия о дифференциальных уравнениях и их решениях. Уравнения первого порядка y' = f(x,y). Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
- Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах.
- Уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Понижение порядка дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения п -го порядка. Линейные однородные уравнения п -го порядка, свойства их решений.
- Структура общего решения линейного однородного уравнения п -го порядка. Неоднородные линейные уравнения п -го порядка. Структура общего решения. Нахождение частного решения методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
- Однородные линейные уравнения п -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение фундаментальной системы решений. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов.

2.1.8. Ряды.(2 ч.)

- Числовые ряды. Сходимость ряда. Сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Остаток сходящегося ряда. Общие свойства сходящихся рядов, действия над ними. Критерий сходимости Коши.
- Ряды с положительными членами. Обобщенный гармонический ряд. Признаки сравнения. Признак Даламбера.
- Числовые ряды с членами любого знака. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Действия с рядами. Функциональные ряды. Сходимость в точке. Область сходимости. Сумма функционального ряда.
- Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости и его вычисление. Основные свойства сходящихся степенных рядов.
- Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора.

Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Единственность такого разложения. Ряд Маклорена. Достаточное условие разложимости функции в ряд Маклорена. Разложение в ряд Маклорена функций: sin x; cos x e^x; $(1+x)^\alpha$

- Ортогональные системы функций. Обобщенные коэффициенты и ряд Фурье. Ортогональные системы тригонометрических функций. Ряд Фурье для четных и нечетных, для периодических функций. Ряд Фурье для функций, заданных на интервале (0,L). Сходимость рядов Фурье. Формулировка теоремы Дирихле.

2.1.9. Интегралы функций нескольких переменных и элементы теории поля(4 ч.).

- Площадь и объем как мера плоской и пространственной областей. Определение двойных интегралов. Формулировка теоремы существования. Основные свойства, теорема о среднем. Задача вычисления объема цилиндрического тела.
- Определение тройных интегралов. Задача вычисления массы тела. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах для случая прямоугольной и произвольной областей.
- Вычисление масс, статических моментов и координат центров масс плоских фигур и пространственных тел.
- Криволинейные интегралы первого рода. Задача о массе дуги. Теорема существования. Свойства и вычисление криволинейных интегралов первого рода
- Криволинейные интегралы второго рода. Задача о работе переменной силы на криволинейном пути. Теорема существования. Свойства и вычисление криволинейных интегралов второго рода. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.
- Поверхностные интегралы первого рода. Теорема существования. Свойства и вычисление поверхностных интегралов первого рода.
- Ориентация поверхностей. Поверхностные интегралы второго рода. Теорема существования. Свойства и вычисление поверхностных интегралов второго рода. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.
- Вычисление масс, статических моментов и координат центров масс дуг и поверхностей.
- Скалярные и векторные поля. Циркуляция векторного поля. Формула Грина.
- Поток векторного поля, его физический смысл. Дивергенция. Формула Остроградского. Физический смысл дивергенции. Источники векторного поля. Ротор векторного поля. Формула

Стокса. Физический смысл циркуляции.

- Специальные векторные поля. Потенциальные поля. Условия потенциальности поля. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Понятие о соленоидальных полях. Операторы Гамильтона и Лапласа.
-

2.1.10. Теория вероятностей (4ч.)

- Случайные события, операция над событиями. Вероятность событий и способы ее определения.
- Аксиоматическое построение теории вероятностей. Теорема сложения вероятностей
- Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей.
- Случайные величины. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности и ее свойства. Вероятность попадания случайной величины в интервал.
- Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства. Понятие о начальных и центральных моментах. Нормальный закон распределения, вероятностный смысл его параметров. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал, правило "трех сигм".
- Системы случайных величин. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Двумерная дискретная случайная величина и ее матрица распределения. Двумерная плотность вероятности и ее свойства. Независимость случайных величин. Условные законы распределения.
- Числовые характеристики системы случайных величин. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Условное математическое ожидание, функция регрессии.
- Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел. Теоремы
- Чебышева и Бернулли. Понятие о центральной предельной теореме.

2.1.11 Математическая статистика(4ч.)

- Математическая статистика и ее основные задачи. Выборочный метод. Вариационный ряд и выборочная функция распределения.
- Оценивание параметров распределения. Общие требования к оценкам: несмещенность, состоятельность, эффективность.

Несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии. Метод моментов.

- Доверительный интервал и доверительная вероятность. Понятие о распределениях хи-квадрат и Стьюдента. Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии.
- Задача регрессии. Метод наименьших квадратов. Построение доверительных интервалов для коэффициентов и значений функции регрессии.
- Проверка статистических гипотез. Критическая область, уровень значимости. Ошибки первого и второго рода. Проверка гипотеза о равенстве математических ожиданий нормально распределенных случайных величин в случае известной и неизвестной дисперсии. Проверка гипотезы о виде закона распределения.
- Проверка гипотезы о нормальности распределения. Проверка гипотезы об адекватности модели в задаче регрессий.

2.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

2.2.1. Аналитическая геометрия и алгебра (4ч.)

- Определители и их свойства.
- Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Линейные операции над векторами.
- Скалярное произведение векторов. Метод координат. Плоскость.
- Векторное произведение. Прямая в пространстве.
- Смешанное произведение. Взаимное расположение прямых и плоскостей.
- Матрицы. Операции над матрицами.
- Ранг матрицы. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений.
- Однородные системы.
- Собственные векторы и собственные значения матрицы.
- Контрольная работа № 1 по алгебре и геометрии.

2.2.2. Предел функций и последовательностей(1 ч.).

- Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.
- Эквивалентные бесконечно малые.

2.2.3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной(1 ч.).

- Техника дифференцирования. Производные сложной и обратной
- Производные высших порядков.
- Дифференциал функции. Касательная и нормаль к графику функции.
- Правило Лопиталя.
- Исследование функций и построение графиков.

2.2.4. Интегралы функций одной переменной(2 ч.).

- Неопределенный интеграл. Непосредственное вычисление неопределенных интегралов. Подведение под знак дифференциала.
- Замена переменной и интегрирование по частям.
- Определенный интеграл. Формула Ньютона - Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям.
- Приложения определенного интеграла к задачам геометрии.
- Контрольная работа №2 (пределы, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной).

2.2.5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (1 ч.).

- Частные производные и полные дифференциалы функций нескольких переменных.
- Экстремумы функций двух переменных. Наименьшее и наибольшее значения функции двух переменных.

2.2.6. Дифференциальные уравнения (3 ч.).

- Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися
- Переменными, линейных, однородных, в полных дифференциалах.
- Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
- Контрольная работа(дифференциальное исчисление функций нескольких переменных и дифференциальные уравнения).

2.2.7.Ряды (4ч.)

- Числовые ряды. Исследование сходимости.
- Степенные ряды. Область сходимости.
- Разложение функций в степенной ряд.
- Ряды Фурье.

2.2.8. Интегралы функций нескольких переменных. (6 ч.)

- Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
- Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
- Приложения кратных интегралов.
- Криволинейные интегралы первого и второго рода.
- Поверхностные интегралы первого и второго рода. Приложения криволинейных и поверхностных интегралов.
- Векторное поле. Циркуляция. Поток. Дивергенция. Формулы Грина и Остроградского – Гаусса. Ротор. Формула Стокса. Потенциальные поля. Восстановление функции по ее полному интегралу.
- Контрольная работа №4 (ряды и интегралы функций нескольких переменных).

2.2. 9. Теория вероятностей (4 ч.)

- Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
- Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема испытаний Бернулли.Формула Бернулли.
- Непрерывные случайные величины. Функция распределения и

плотность вероятности. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

- Равномерный и показательный законы распределения. Нормальный закон распределения. Понятие о законах распределения Стьюдента и хи-квадрат.
- Дискретные системы случайных величин.
- Контрольная работа № 5 (теория вероятности).

2.2.10. Математическая статистика (4 ч.)

- Статистическое определение вероятности. Частота как состоятельная оценка деления. (теорема Бернулли)
- Метод моментов. Оценивание параметров закона распределения. Выборочная функция распределения.
- Проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий нормально распределенных случайных величин.
- Задача регрессии. Метод наименьших квадратов.
- Контрольная работа №6 (математическая статистика).

2.3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Самостоятельная работа предусмотренная программой в общем объеме 600 часа выполняется по указанным в программе темам.

Распределение часов самостоятельной работы по темам соответствует объему часов аудиторных занятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемешев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1984.
2. Беклемешева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб., Прогрессия, 2001.
4. Клетенник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 2001.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа. 1988. - Т. 1-2., 1989. - Т. 3.
6. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. М., Наука, 1998. Т. 1-2.
7. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) М., Высшая школа., 1986.
8. Михайлов О. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.
9. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1984.
10. IIIипачев В. С., Высшая математика. М., Высшая школа, 1990. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Азизов А.М., Курицын А.Г., Никитенко В.Г. Основы прикладной математики. Теория вероятностей и математическая статистика. - СПб.: Химия, 1994.
12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учебное пособие для ВУЗов. - М.: Высшая школа, 2000.
13. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 2002.
14. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для ВУЗов. - М.: Высшая школа, 2002
15. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. - М.: Высшая школа, 2001.
16. Волков И.К.Случайные процессы: Учебник для вузов. - М.: Изд. МГТУ им. Баумана. Серия: Математика в техническом университете, 2000.
17. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика:
Учебное пособие для ВУЗов. - М.: Высшая школа, 2002.
18. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
19.Фигурин В.А., Оболонкин В.В. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Новое знание, 2000.
20. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей.-М.: Агар, 2000.

Дополнительная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1997.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1988.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, ряды. ФКП. М., Наука, 1989.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник. М. Наука, 1982.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.

6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., Наука, 1966.

7. Данко П. Е., Высшая математика в уравнениях и задачах. М. Высшая школа, 1986 - 4.1-2.

8. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. М. Высшая школа. 1988.

9. Доброхотова Г. П. интегралы функций одной переменной. СПБГТИ, 1989.

10. Жузе А.Г. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. ЛТИ, 1988.

11. Демьянова Е.М. Введение в анализ. ЛТИ, 1986.

12. Ржонсницкий А.В. Задачи студенческих олимпиад по математике с решениями. СПбТИ, 1995.

13. Крючков А.Ф. Комплексные числа и многочлены. ЛТИ, 1988.

14. Доброхотова Г.П. Интегралы функций одн

15. Шаршукова Э.Д. Кратные интегралы. ЛТИ, 1986.

16. Шаршукова Э.Д. Криволинейные и поверхностные интегралы. ЛТИ, 1987.

17. Поникаровский И. Г. Определители. Формулы Крамера. СПбГТИ, 1991.

18. Слободинская Т. В. Ряды Фурье. СПбГТИ, 2000.

19. Методические указания по решению задач теории вероятностей. /ЛТИ им. Ленсовета - Л., 1977. - 72 с.

20. Теория вероятностей. Вероятность событий. /СПБГТИ. - СПб., 1992. - 48 с.

21. Интегрирование. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. ЛТИ им. Ленсовета. - Л., 1988 - 35 с.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Татьяна Васильевна Слободинская
Валерий Степанович Капитонов

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60х90. $^{1}/_{16}$
Печ. л. 6,5. Тираж 100 экз. Заказ № от .04.2006г.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет), ИК «Синтез»

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26