Министерство связи РФ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов-заочников второго курса
(4 семестр)

Санкт-Петербург
1996

УДК 51.517

Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов-заочников второго курса (4 семестр)/ *С. В. Керов, Г. М. Полевая, Г. И. Рудинская, В. С. Стукалова, А. Л. Черниховская*; СПбГУТ.— СПб, 1996.

План 1996 г., п. 5.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательской комиссией университета.

Методические указания содержат варианты контрольных работ по математике для студентов второго курса заочного факультета, а также указания по их выполнению, вопросы и упражнения для самопроверки.

Ответственный редактор *Б. А. Пламеневский*
Рецензент *К. В. Лопухов*

Корректор *М. Г. Кострыкина*

Подписано к печати 19.04.96 г. ЛР № 020475 от 10.03.92 г.
Объем 3,75 печ. л. Тираж 500 экз. Зак. 330

РИО СПбГУТ. 191186, СПб, наб. р. Мойки, 61
Тип. СПбГУТ. 198320, СПб, Свободы, 31

В в е д е н и е

В четвертом семестре студент выполняет контрольные работы 7 и 8.Для успешного выполнения контрольных работ и при подготовке к собеседованию и экзамену необходимо изучить теоретический материал, ориентируясь на приведенную програму курса.Вопросы програмны соответствуют вопросам экзаменационных билетов.

В табл. I указаны номера задач для каждого варианта. В случае безошибочно выполненной работы студент допускается к собеседованию,где будет предложено решить несколько задач, и только тогда студент получает зачет и допускается к экзамену.Получив тетрадь с надписью "На повторное рецензирование",студент обязан исправить все ошибки (в той же тетради,после подписи преподавателя) и в кратчайший срок выслать ее в деканат.Зачтенные контрольные работы предъявляются преподавателю на собеседовании вместе с настоящими "Методическими указаниями". Номера задач с индексами "а" (46Iа - 470а) выполняют только студенты Минского филиала взамен задач 46I - 470.

Таблица I

Вариант	Контрольная работа 7									Контрольная работа 8					
I	39I	40I	4II	42I	43I	44I	45I	46I	46Iа	47I	48I	49I	50I	5II	52I
2	392	402	4I2	422	432	442	452	462	462а	472	482	492	502	5I2	522
3	393	403	4I3	423	433	443	453	463	463а	473	483	493	503	5I3	523
4	394	404	4I4	424	434	444	454	464	464а	474	484	494	504	5I4	524
5	395	405	4I5	425	435	445	455	465	465а	475	485	495	505	5I5	525
6	396	406	4I6	426	436	446	456	466	466а	476	486	496	506	5I6	526
7	397	407	4I7	427	437	447	457	467	467а	477	487	497	507	5I7	527
8	398	408	4I8	428	438	448	458	468	468а	478	488	498	508	5I8	528
9	399	409	4I9	429	439	449	459	469	469а	479	489	499	509	5I9	529
I0	400	4I0	420	430	440	450	460	470	470а	480	490	500	5I0	520	530

ПРОГРАММА КУРСА "ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА", IУ СЕМЕСТР

Дифференциальные уравнения первого порядка

I.Основные определения: дифференциальное уравнение,его порядок, общее и частное решения,задача Коши.Примеры составления дифференциального уравнения.

2.Уравнения с разделяющимися переменными (решить предлагаемый пример).

3.Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.Примеры задач,приводящих к линейным уравнениям (решить предлагаемый пример).

4.Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера.

5.Однородные дифференциальные уравнения (для студентов Минского филиала).

Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

I.Способы понижения порядка дифференциальных уравнений (на примерах).

2.Однородные линейные дифференциальные уравнения (второго порядка).Фундаментальная система решений и общее решение (без доказательства).

3.Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.Характеристическое уравнение,характеристические корни и построение фундаментальной системы решений. Случай совпадающих характеристических корней.

4.Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.Принцип суперпозиции.

5.Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.Свободные и вынужденные колебания.Резонанс (решить конкретный пример).

6.Системы двух линейных однородных уравнений первого порядка. Их решение с помощью уравнения второго порядка.

[I,гл.XIII, § I-4,7,I6-I8,20,2I,23,I4,27-29,32; 2,гл.XII,§I-4,7].

Ряды Тейлора

I. Определение числового ряда, частичные суммы; определение сходящихся рядов и суммы ряда. Примеры. Степенные ряды, радиус сходимости.

2. Разложение функции в ряд Тейлора. Ряды Маклорена основных элементарных функций. Оценка остатка ряда Тейлора (без доказательства).

[I, гл.XУI, § I,2,I3-22; 2, гл.XIII, § I,4-6].

Ряды Фурье

I. Основные свойства тригонометрической системы функций (ортогональность). Тригонометрические многочлены и ряды.

2. Ряд Фурье 2π-периодической функции. Формулы Фурье для коэффициентов ряда. Теорема Дирихле (без доказательства).

3. Ряды Фурье непериодических функций и функций с произвольным периодом 2ℓ.

4. Разложение функций в ряд Фурье только по синусам или по косинусам

5. Амплитудно-фазовая форма записи ряда Фурье.

[I, гл.XУII, § I-6; 2, гл.XIУ, § I-4].

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В отличие от алгебраических уравнений, изучаемых в школе, в дифференциальных уравнениях (ДУ) неизвестным является не число, а функция $y = y(t)$. ДУ - это уравнение, связывающее независимую переменную t, неизвестную функцию y и ее производные различных порядков y', y'' и т.д. Наибольший из порядков производных, входящих в уравнение, называется **порядком** ДУ. Например, ДУ первого порядка можно записать в виде $F(t,y,y')=0$, а ДУ второго порядка - в виде $F(t,y,y',y'')=0$.

Частным решением ДУ называется функция $y=y(t)$, удовлетворяющая этому уравнению. Как правило, дифференциальное уравнение имеет бесконечно много частных решений.

ПРИМЕР. Функция $y(t)=A\cos(t-\varphi)$ при любых значениях амплитуды A и фазы φ является частным решением ДУ 2-го порядка $y''+y=0$. Действительно, $y'(t)=-A\sin(t-\varphi)$, $y''=-A\cos(t-\varphi)$ и $y''(t)+y(t)=0$.

Из примера видно, что решение $y=A\cos(t-\varphi)$ зависит от двух параметров A и φ. Такое решение называется общим решением ДУ второго порядка.

Для ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

общим решением называется любая функция

$$y = y(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) , \qquad (1)$$

которая n раз дифференцируема, зависит от n произвольных параметров C_1, C_2, ..., C_n и удовлетворяет этому уравнению. Число независимых параметров в общем решении равно порядку ДУ. При подстановке их числовых значений получают различные частные решения ДУ.

ПРИМЕР. Общим решением простейшего ДУ первого порядка $y'=f(t)$ служит неопределенный интеграл $y=\int f(t)dt$. Как известно, такой интеграл задан лишь с точностью до произвольной постоянной C:

$$y(t) = \int_0^t f(t)dt + C .$$

Так, уравнение $y'=t^3$ имеет общее решение:

$$y(t) = \int t^3 dt = \int_0^t t^3 dt + C = \frac{t^4}{4} + C .$$

Чтобы выделить какое-либо частное решение, обычно задают **начальные условия** - значения неизвестной функции и ее производных в некоторый "начальный" момент времени t_0. Число начальных условий должно совпадать с порядком ДУ. Для уравнения первого порядка $F(t,y,y')=0$ начальное условие только одно: $y(t_0)=y_0$. ДУ второго порядка $F(t,y,y',y'')=0$ нуждается в двух начальных условиях: $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_1$, где t_0, y_0, y_1 – заданные числа.

Система, состоящая из дифференциального уравнения и начальных условий, называется з а д а ч е й К о ш и. Пользуясь начальными условиями, можно найти значения параметров в общем решении ДУ. Поэтому решение задачи Коши обычно существует и единственно.

ПРИМЕР

I. Общее решение ДУ $y''+y=0$ имеет вид $y(t)=A\cos(t-\varphi)$ и зависит от двух параметров A и φ. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\frac{\pi}{4})=0$, $y'(\frac{\pi}{4})=1$. Подставляя $t=\frac{\pi}{4}$ в формулу для общего решения $y(t)$ и его производной $y'(t)$, получим:

$$A\cos(\tfrac{\pi}{4}-\varphi)=0, \quad -A\sin(\tfrac{\pi}{4}-\varphi)=1,$$

откуда $ctg(\frac{\pi}{4}-\varphi)=0$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ и $A=1$. Искомое частное решение равно

$$y(t)=\cos(t-\tfrac{3\pi}{4}).$$

Большинство законов физики записывается в форме дифференциальных уравнений. Известно, например, что скорость распада $-m'(t)$ радиоактивного образца пропорциональна его массе $m(t)$. Получаем ДУ первого порядка $-m'(t)=km(t)$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от степени радиоактивности материала.

ПРИМЕР

2. Зависимость $q=q(t)$ заряда на конденсаторе от времени t в простейшем колебательном контуре с индуктивностью L, сопротивлением R, емкостью C и источником напряжения $u=u(t)$ (рис. I) подчиняется ДУ второго порядка

$$Lq''+Rq'+\frac{1}{C}q=u(t).$$

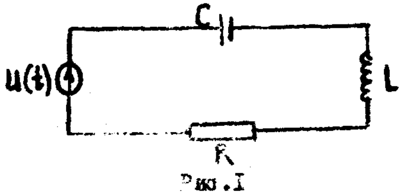


Рис. I

Чтобы найти функцию $q = q(t)$, необходимо учесть начальные условия: $q(t_0) = q_0$ и $q'(t_0) = i_0$, где q_0 - заряд, а i_0 - ток в начальный момент времени t_0. Вообще, расчет любой электрической цепи сводится к решению системы дифференциальных уравнений.

Как интегрировать (т.е. решать) дифференциальные уравнения ? Не существует никакого общего ответа на этот вопрос. Хотя решения существуют, их, как правило, нельзя выразить не только через элементарные функции, но и через интегралы от них.

Существует два подхода к интегрированию ДУ.

Первый - аналитический - связан с выделением отдельных специальных классов ДУ, решения которых могут быть выражены в виде известных функций или интегралов от них. Мы рассмотрим некоторые такие классы ниже. Более подробную информацию можно найти в справочниках по решению ДУ (см., например, Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1971).

Второй подход - это различные методы численного интегрирования, т.е. получение частного решения не в виде формулы, а в виде достаточно подробной и точной таблицы значений неизвестной функции. Мы рассмотрим простейший численный метод решения ДУ (см. с.27) далее.

Д У первого порядка

1). Р а з д е л е н и е п е р е м е н н ы х. Один из важнейших классов дифференциальных уравнений, допускающих аналитическое решение, - это уравнения с р а з д е л я ю щ и м и с я п е р е м е н н ы м и, т.е. ДУ первого порядка, которые можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u(t)}{v(y)} . \qquad (2)$$

Название уравнений этого класса становится понятным, если переписать (2) как уравнение в дифференциалах:

$$v(y)\,dy = u(t)\,dt . \qquad (3)$$

В этой форме записи уравнения зависимые и независимые переменные разделены знаком равенства. Переходя к интегралам, получим (быть может и неявную) зависимость переменной y от t :

$$\int v(y)\,dy = \int u(t)\,dt .$$

ПРИМЕРЫ

3. Решить уравнение $3y^2y'-2t=0$. Разделим переменные. Для этого запишем производную y' в виде $\frac{dy}{dt}$. Тогда

$3y^2\frac{dy}{dt}=2t$ и $3y^2dy=2t\,dt$. Беря интегралы от обеих частей уравнения, получаем, что $\int 3y^2dy=\int 2t\,dt$, откуда

$y^3=t^2+C$ и $y(t)=\sqrt[3]{t^2+C}$ – общее решение.

4. Найти частное решение ДУ $2t+\frac{y'}{y}=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.

Решение. Разделим переменные в ДУ: $-2t\,dt=\frac{dy}{y}$. Интегрируя обе части уравнения, можем записать $-t^2+\ln|C|=\ln|y|$ (обратите внимание на то, что, когда y входит в интеграл под знаком логарифма, произвольную постоянную удобнее записать в виде $\ln|C|$).

Получаем общее решение ДУ:

$$y(t)=Ce^{-t^2}.$$

Чтобы найти C, используем начальное условие: $t=0$, $y=2$ и получаем $C\cdot e^0=2$, откуда $C=2$. Искомое частное решение будет

$$y(t)=2e^{-t^2}$$

5. Решить задачу Коши для уравнения

$$y^3\cdot\sqrt{t^2+1}\,dy-t\sqrt[5]{y^4+1}\,dt=0,\quad y(0)=0.$$

Разделяя переменные, получим $$\frac{y^3dy}{\sqrt[5]{y^4+1}}=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{1}{4}\int\frac{d(y^4+1)}{\sqrt[5]{y^4+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}};\quad \frac{5}{16}\sqrt[5]{(y^4+1)^4}=\sqrt{t^2+1}+C$$

Выразить y явно в этом случае затруднительно; не будем этого делать. Найдем C:

$$\frac{5}{16}\sqrt[5]{1}=\sqrt{1}+C,\quad C=\frac{5}{16}-1=-\frac{11}{16}$$

Окончательно

$$\frac{5}{16}\sqrt[5]{(y^4+1)^4}=\sqrt{t^2+1}-\frac{11}{16}.$$

Однородные ДУ первого порядка

Функция $f(t,y)$ называется однородной k-го порядка, если

$$f(\lambda t,\lambda y)=\lambda^k f(t,y)\quad,$$

где λ - параметр, $k\in Z$.

Например,

$$f(t,y)=\frac{t^3+t^2y+y^3}{t+y}$$

- однородная функция второго порядка, так как

$$\frac{(\lambda t)^3+(\lambda t)^2\cdot\lambda t+(\lambda y)^3}{\lambda t+\lambda y}=\lambda^2\frac{t^3+t^2y+y^3}{t+y},\quad(k=2).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(t,y)\qquad(*)$$

называется однородным, если $f(t,y)=f(\lambda t,\lambda y)$, т.е. если $f(t,y)$ однородная функция нулевого измерения.

Однородное ДУ $(*)$ приводится к уравнению (2) с разделяющимися переменными. Возьмем $\lambda=\frac{1}{t}$, тогда $y'=f(\lambda t,\lambda y)=f(1,\frac{y}{t})$. Обозначим $\frac{y}{t}=u(t)$, откуда $y=u\cdot t,\ y'=u+tu'$.

Поэтому из $(*)$ следует

$$t\frac{du}{dt}=f(1,u)-u.$$

Это ДУ с разделяющимися переменными типа (2):

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dt}{t}.$$

ПРИМЕР. Решить однородное ДУ $y'=\frac{y}{t}+\left(\frac{t}{y}\right)^2$

Применим подстановку $\frac{y}{t}=u$. Тогда $y'=u+tu'$ и уравнение примет вид $u+tu'=u+\left(\frac{1}{u}\right)^2,\quad t\frac{du}{dt}=\frac{1}{u^2}$

или $u^2du=\frac{dt}{t}$.

Интегрируя, получим $\int u^2du=\int\frac{dt}{t}$,

$$\frac{1}{3}u^3=\ln|t|+C\quad,\quad y^3=3t^3(\ln|t|+C)$$

Линейное ДУ первого порядка

Очень часто встречается ДУ

$$y' + k(t)y = f(t). \qquad (4)$$

Такое уравнение называется линейным, поскольку неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно – в виде слагаемых с коэффициентами, зависящими только от t (функции $k(t)$ и $f(t)$ не обязательно линейны).

Обратите внимание на форму записи линейного уравнения: слагаемые, содержащие неизвестную функцию y и ее производную, принято записывать в левой части уравнения, а слагаемые, зависящие лишь от t, – в правой части. Если при таком способе записи правая часть равна нулю, то уравнение называется линейным однородным.

Общее решение ДУ (4) будем искать в виде

$$y(t) = C(t)\cdot u(t).$$

Чтобы найти $C(t)$ и $u(t)$, подставим y и $y' = C'u + C\cdot u'$ в исходное уравнение: $C'u + u'C + k(t)\cdot uC = f(t)$

или

$$C'u + C(u' + k(t)u) = f(t). \qquad (5)$$

Выберем $u(t)$ так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Тогда уравнение (5) сведется к двум уравнениям

$$u' + k(t)u = 0, \qquad C'(t)\cdot u(t) = f(t). \qquad (6)$$

ПРИМЕР

6. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2t}{t^2+3}y = (t^2+3)\cos t.$$

Это линейное уравнение. Положим $y(t) = C(t)\cdot u(t)$, тогда $y' = C'u + Cu'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем

$$C'u + Cu' - \frac{2t}{t^2+3}Cu = (t^2+3)\cos t,$$

$$C'u + C\left(u' - \frac{2t}{t^2+3}u\right) = (t^2+3)\cos t.$$

Уравнение свелось к двум уравнениям с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} u' - \frac{2t}{t^2+3}u = 0, \\ c'u = (t^2+3)\cos t. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение: $\frac{du}{dt} - \frac{2t}{t^2+3}u = 0.$

Разделяем переменные: $\frac{du}{dt} = \frac{2tu}{t^2+3}$, $\frac{du}{u} = \frac{2t\,dt}{t^2+3}.$

Интегрируем: $\int \frac{du}{u} = \int \frac{2t\,dt}{t^2+3}$,

$$\ln|u| = \int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3}, \quad \ln|u| = \ln(t^2+3) + C.$$

Выбираем простейшее частное решение, т.е. полагаем $C=0$; тогда $u = t^2+3$. Подставляем u во второе уравнение и находим $C(t)$:

$$c'(t^2+3) = (t^2+3)\cos t,$$

$$c'(t) = \cos t; \quad C(t) = \sin t + C.$$

Окончательно имеем: $y(t) = (\sin t + C)\cdot(t^2+3).$

Решение неоднородного линейного уравнения ДУ (4) можно найти также по общей формуле

$$y(t) = u(t)\cdot\int \frac{f(u)}{u(t)}\,dt. \qquad (7)$$

В этой формуле функция $u(t)$ представляет собой решение соответствующего однородного ДУ:

$$u' + k(t)u = 0,$$

и должна быть предварительно найдена по формуле

$$u(t) = e^{-\int k(t)\,dt}. \qquad (8)$$

ПРИМЕР

7. Найти общее решение уравнения $\frac{1}{t}y' + y - 1 = 0.$

Это линейное уравнение. Преобразуем его к виду (4):

$$y' + ty = t.$$

По формуле (8) получаем $u(t) = e^{-\int t\,dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$, а из формулы (7) находим, что

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \int \frac{t}{e^{-t^2/2}}\,dt = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \int t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\,dt =$$
$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \int e^{\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + C\right) = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

ДУ второго порядка. Понижение порядка уравнения

Дифференциальное уравнение второго порядка $F(t, y, y', y'') = 0$ иногда удается свести к двум ДУ первого порядка. Рассмотрим два характерных случая, когда это можно сделать.

I). Неизвестная функция y входит в уравнение только под знаком производной $F(t, y', y'') = 0$. При помощи подстановки $y' = z$ такое уравнение сводится к уравнению первого порядка $F(t, z, z') = 0$.

ПРИМЕРЫ

8. Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{y'}{t} = \frac{1}{t}e^t$.

Это ДУ второго порядка, не содержащее y. Положим $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и получаем ДУ первого порядка относительно функции z.

Решим его:

$$z' - \frac{z}{t} = t e^t,$$

$$z = C(t) \cdot u(t), \quad z' = C'u + Cu';$$

$$C'u + Cu' - \frac{Cu}{t} = te^t, \quad C'u + C\left(u' - \frac{u}{t}\right) = te^t,$$

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{t} = 0, \\ C'u = te^t \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{du}{dt} - \frac{u}{t} = 0, \quad \frac{du}{dt} = \frac{u}{t}; \quad \frac{du}{u} = \frac{dt}{t};$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dt}{t}\ ; \quad \ln|u| = \ln|t|; \quad u = t\ .$$

Решим второе уравнение:

$$C'(t)\cdot t = t\,e^{t}\ ; \quad C'(t) = e^{t}\ ; \quad C(t) = e^{t} + C_1\ .$$

И общее решение линейного ДУ первого порядка $z = (e^{t} + C_1)\cdot t$.
Поскольку $z = y'$,для нахождения y необходимо решить еще одно ДУ первого порядка

$$y' = (e^{t} + C_1)\,t \qquad \text{или} \qquad dy = (e^{t} + C_1)\,t\,dt\ .$$

Интегрируя,получаем

$$y = \int (e^{t} t + C_1 t)\,dt = C_1 \frac{t^2}{2} + \int t\,e^{t}\,dt\ .$$

Интеграл $\int t\,e^{t}\,dt$ берем по частям: $u = t$, $du = dt$
$dv = e^{t}dt$, $v = e^{t}$.

Окончательно

$$y = C_1 \frac{t^2}{2} + t\,e^{t} - e^{t} + C_2\ .$$

9. Найти решение задачи Коши:

$$(1 + t^2)y'' - 2ty' = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3\ .$$

В уравнении отсутствует y .Введем обозначение $y' = z$;тогда $y'' = z'$.Исходное уравнение будет выглядеть так:

$$(1 + t^2)\,z' - 2tz = 0\ .$$

Это уравнение первого порядка,в котором переменные разделяются:

$$(1 + t^2)\frac{dz}{dt} = 2tz\ , \qquad \frac{dz}{z} = \frac{2t\,dt}{1 + t^2}\ ,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2t\,dt}{1 + t^2}\ , \quad \ln|z| = \ln(1 + t^2) + \ln|C_1|,$$

$$z = C_1(1 + t^2)\ , \qquad y' = C_1(1 + t^2)\ .$$

Найдем C_1 .При $t=0$ имеем $3 = C_1(1+0)$ и $C_1 = 3$.Следовательно, $y' = 3(1+t^2)$.Определяем y :

$$y = \int(3+3t^2)dt \; ; \qquad y = 3t + t^3 + C_2$$

и,используя еще одно начальное условие,находим C_2: $C_2 = 0$. Окончательно имеем $y = 3t + t^3$.

2). Независимая переменная t не содержится в уравнении явно т.е. $F(y, y', y'') = 0$.

В этом случае примем y за независимую переменную,а $y' = z$ будем считать функцией от y .По правилу дифференцирования сложной функции получаем выражение для второй производной

$$y'' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot z \, .$$

ПРИМЕР

10. Решить уравнение $y y'' + (y')^2 = 0$.В уравнении отсутствует независимая переменная t .Введем обозначение $y' = z$;тогда $y'' = \frac{dz}{dy} z$.Получаем уравнение первого порядка $yz \cdot \frac{dz}{dy} + z^2 = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{yz\,dz}{dy} = -z^2 \; ; \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y} \; ;$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{y} \; ; \; \ln|z| = -\ln|y| + \ln|C_1| ; \quad z = \frac{C_1}{y}$$

или $y' = \frac{C_1}{y}$.Для нахождения y получили уравнение с разделяющимися переменными.Решим его:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{y} \; ; \quad y\,dy = C_1 dt \; ; \quad \int y\,dy = C_1 \int dt ,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 t + C_2 \; ; \qquad y = \pm\sqrt{C_1 t + C_2} \; .$$

Линейные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

называется однородным линейным дифференциальным уравнением (ОЛДУ) второго порядка. Если $y=y_1(t)$ и $y=y_2(t)$ – два решения ОЛДУ, то их сумма с произвольными постоянными коэффициентами C_1 и C_2

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \tag{9}$$

также является решением.

Если при этом функции y_1 и y_2 линейно независимы (т.е. $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} \neq const$), то формула (9) задает о б щ е е р е ш е н и е ОЛДУ второго порядка.

В важном специальном случае, когда коэффициенты ОЛДУ постоянны, $p(t)=p$, $q(t)=q$, частное решение уравнения

$$y'' + p y' + q y = 0 \tag{10}$$

следует искать в виде $y=e^{\omega t}$. Постоянная ω является корнем характеристического уравнения

$$\omega^2 + p\omega + q = 0 .$$

Корни ω_1, ω_2 этого квадратного уравнения называются характеристическими корнями и определяются по известной формуле

$$\omega_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} .$$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то функции $y_1(t) = e^{\omega_1 t}$ и $y_2(t) = e^{\omega_2 t}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (10) имеет вид

$$y = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} , \tag{11}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Если же характеристические корни совпадают, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то вместо формулы (11) решение получается по формуле

$$y = C_1 e^{\omega t} + C_2 t e^{\omega t} .$$

ПРИМЕРЫ

11. Найти общее решение уравнения $y'' - 9y' + 14y = 0$.

Это ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение

$$\omega^2 - 9\omega + 14 = 0 .$$

Его корни: $\omega_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$, т.е. $\omega_1=7$, $\omega_2=2$. Общее решение имеет вид $y=C_1e^{7t}+C_2e^{2t}$.

12. Найти общее решение ОЛДУ $y''+17y'=0$.

Составим характеристическое уравнение $\omega^2+17\omega=0$; его корни $\omega_1=0$, $\omega_2=-17$, и общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{0\cdot t}+C_0e^{-17t}=C_1+C_2e^{-17t}.$$

13. Найти частное решение ОЛДУ $y''+2y'+y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

Составим характеристическое уравнение $\omega^2+2\omega+1=0$; его корни совпадают $\omega_1=\omega_2=-1$. Общее решение будет таким:

$$y=C_1e^{-t}+C_2t\cdot e^{-t}.$$

Найдем C_1 и C_2. Для этого найдем y':

$$y'=-C_1e^{-t}+C_2(e^{-t}-te^{-t}).$$

Подставим $t=0$ в y и y'. Имеем $\begin{cases}0=C_1,\\ 2=-C_1+C_2.\end{cases}$

Решая эту систему, получим $C_1=0$, $C_2=2$. Искомое решение задачи Коши есть

$$y=2te^{-t}.$$

В случае комплексных корней $\omega_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ характеристического уравнения общее решение ОЛДУ (10) удобно записать (используя формулу Эйлера) в виде

$$y=C_1e^{\alpha t}\cos\beta t+C_2e^{\alpha t}\sin\beta t. \quad (12)$$

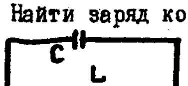
ПРИМЕРЫ

14. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Это ОЛДУ второго порядка. Составим характеристическое уравнение $\omega^2+4\omega+13=0$. Его корни $\omega_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm\sqrt{-9}=-2\pm3i$.

Общее решение $y=C_1e^{-2t}\cos3t+C_2e^{-2t}\sin3t$.

15. Найти заряд конденсатора в момент времени $t=10$ для контура



, если в начальный момент он равен q_0, а ток в цепи отсутствует.

Колебания заряда конденсатора описываются уравнением (см. пример 2)

$$y'' + \frac{1}{LC} y = 0 .$$

Это уравнение получается из уравнения примера 2 в случае, когда R =0 и отсутствует источник напряжения.

Найдем общее решение этого ОЛДУ с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения $\omega^2 + \frac{1}{LC} = 0$ - чисто мнимые: $\omega_{1,2} = \pm\omega_0 i$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Общее решение запишется по формуле (I2) в виде

$$y = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t .$$

Мы видим, что частота собственных колебаний контура равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, что хорошо известно из физики.

Используя начальные условия

$$y' = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t$$

при t =0, $y = q_0$, а $y' = i_0$ =0, получим значения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} q_0 = C_1, \\ 0 = C_2\omega, \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = q_0, \\ C_2 = 0, \end{matrix}$$

и, следовательно, $y = q_0 \cos\omega_0 t$. При t =10 будем иметь $y = q_0 \cos 10\omega_0$.

16. Найти частное решение $y = h(t)$ уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям $h(0)$ =0, $h'(0)$=1.

Если характеристические корни различны, то общее решение уравнения (10) имеет вид $h(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t}$.

Найдем h': $h'(t) = C_1\omega_1 e^{\omega_1 t} + C_2\omega_2 e^{\omega_2 t}$.

При t =0 имеем

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_1\omega_1 + C_2\omega_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} . \end{cases}$$

Следовательно,

$$h(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} .$$

Если характеристические корни совпадают, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, имеем

$$h(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 t e^{\omega t}$$

и $$h'(t) = C_1 \omega e^{\omega t} + C_2 e^{\omega t} + C_2 t \omega e^{\omega t}.$$

Подставим $t=0$ и получим

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = C_1\omega + C_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

и $h(t) = t e^{\omega t}$. Функция $h(t)$ называется импульсной характеристикой.

Получим выражение для импульсной характеристики в случае комплексных корней $\omega_{1,2} = \alpha \pm \beta i$:

$$h(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{(\alpha-\beta i)t}}{\alpha + \beta i - \alpha + \beta i} =$$

$$= \frac{e^{\alpha t}\cdot e^{t\beta i} - e^{\alpha t}\cdot e^{-t\beta i}}{2\beta i} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\,\frac{e^{t\beta i} - e^{-t\beta i}}{2i} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\cdot \sin\beta t$$

(при вычислении мы воспользовались формулой Эйлера $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Итак,

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\cdot \sin\beta t \,. \tag{13}$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (НЛДУ)

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = f(t) \tag{14}$$

можно записать в виде суммы

$$y = y_{\text{общ}}(t) + y_{\text{частн.}}(t),$$

где $y_{\text{частн.}}(t)$ - какое-либо частное решение уравнения (14) и $y_{\text{общ.}}(t)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0 \,.$$

В теории колебаний $y_{\text{общ.}}(t)$ - это собственные колебания, а $y_{\text{частн.}}(t)$ - вынужденные колебания под действием внешней силы $f(t)$.

Если коэффициенты $p(t)=p$, $q(t)=q$ постоянны, то $y_{\text{общ.}}(t)$ можно найти, решая характеристическое уравнение.

Для нахождения частного решения $y_{\text{частн.}}(t)$ существует несколько способов. Ниже приведем два из них.

Частное решение можно записать в виде интеграла наложения

$$y_{\text{частн.}}(t) = \int_0^t h(t-s)\cdot f(s)\,ds ,$$

где $h(t)$- импульсная характеристика, равная (см. пример 16)

$$h(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \text{, и равная}$$

$$h(t) = t\cdot e^{\omega t} \quad \text{при} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

ПРИМЕРЫ

17. Найти общее решение неоднородного линейного ДУ $y''+4y=\cos t$.

Чтобы проинтегрировать это уравнение, решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y''+4y=0.$$

Характеристическое уравнение $\omega^2+4=0$ имеет чисто мнимые корни $\omega_{1,2}=\pm 2i$.

Общее решение ОЛДУ имеет вид

$$y_{\text{общ.}} = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t .$$

По формуле (13) переходная функция $h(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$.

Частное решение НЛДУ найдем с помощью интеграла наложения

$$y_{\text{частн.}} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-s)\cdot\cos s\,ds =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\sin(2t-s) + \sin(2t-3s)\right) ds .$$

Интегрируя по s, считая t постоянной, получим

$$y_{\text{частн.}}(t) = \frac{1}{4}\cos(2t-s)\Big|_0^t + \frac{1}{12}\cos(2t-3s)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{12}\cos(-t) - \frac{1}{12}\cos 2t = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t.$$

Общее решение неоднородного уравнения НЛДУ

$$y(t) = y_{общ.}(t) + y_{част.}(t) =$$

$$= C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t =$$

$$= \left(C_1 - \frac{1}{3}\right)\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{3}\cos t =$$

$$= A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{1}{3}\cos t.$$

Мы видим, что вынужденные колебания $y = \frac{1}{3}\cos t$ имеют частоту вынуждающей силы $f(t) = \cos t$ и ограничены по амплитуде ($A = \frac{1}{3}$).

18. Для уравнения $y'' + 4y = \cos 2t$ (отличающегося от уравнения примера 17 правой частью) первая часть решения такая же, как и в примере 17.

Частное же решение НЛДУ ищем в виде интеграла наложения:

$$y_{част.} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-s)\cdot\cos 2s\, ds =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\sin 2t + \sin(2t-4s)\right) ds .$$

Интегрируем по s, считая t постоянным:

$$y_{част.}(t) = \frac{1}{4}\left(\sin 2t \cdot \int_0^t ds - \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2t-4s)\, d(2t-4s)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t \cdot s\Big|_0^t + \frac{1}{16}\cos(2t-4s)\Big|_0^t = \frac{1}{4}t\cdot\sin 2t +$$

$$+ \frac{1}{16}\cos(-2t) - \frac{1}{16}\cos 2t = \frac{1}{4}t\sin 2t .$$

Общее решение НЛДУ получаем в виде суммы

$$y(t) = y_{общ.}(t) + y_{част.}(t) =$$

$$= C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t .$$

В этом примере имеется р е з о н а н с: частота вынуждающей силы совпадает с частотой собственных колебаний, из-за чего амплитуда вынужденного колебания $y = \frac{1}{4} t \sin 2t$ неограниченно растет.

В некоторых случаях, когда вычисления интеграла наложения достаточно громоздки, можно найти частное решение другим способом. Рассмотрим м е т о д п о д б о р а. Этот метод решения НЛДУ применяется, когда в правой части стоит функция вида

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t\right),$$

где $P_n(t)$ и $Q_m(t)$ - многочлены степени n и m соответственно. В этом случае ч а с т н о е р е ш е н и е НЛДУ имеет ту же структуру, что и п р а в а я ч а с т ь исходного уравнения:

$$y_{\text{частн.}} = e^{\alpha t}\left(R_\ell(t)\cos\beta t + S_\ell(t)\sin\beta t\right)\cdot t^r,$$

где R_ℓ и S_ℓ - многочлены степени $\ell = \max(n,m)$, записанные с неопределенными коэффициентами, причем они содержат в с е степени t; число r равно 0, если $\omega = \alpha + \beta i$ не является характеристическим корнем, и равно показателю кратности характеристического корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, т.е. в случае резонанса.

ПРИМЕРЫ

19. Найти общее решение НЛДУ $y'' + 4y = 1$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения уже получено в примере 17. В правой части уравнения стоит многочлен нулевой степени $n=0$ ($\alpha = \beta = 0$); следовательно, и частное решение будет многочленом нулевой степени: $y_{част.} = A$. Резонанс в нашем случае отсутствует, так как $\omega = 0$ не является характеристическим корнем.

Чтобы найти неопределенный коэффициент A, надо $y_{частн.}$ подставить в исходное уравнение: $y_{ч.} = A$, $y_{ч.}' = 0$, $y_{ч.}'' = 0$.

Следовательно, $4A = 1$ и $A = \frac{1}{4}$.

Таким образом, общее решение уравнения

$$y(t) = y_{общ.}(t) + y_{част.}(t) = C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}.$$

20. Найти общее решение НЛДУ $y'' - 2y' = -6t^2$.

Найдем общее решение ОЛДУ $y'' - 2y' = 0$. Его характеристическое уравнение $\omega^2 - 2\omega = 0$ имеет корни $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения

$$y_{общ.}(t) = C_1 + C_2 e^{2t} .$$

В правой части исходного уравнения стоит многочлен второй степени. Следовательно, $n = 2$, $\omega = 0$; так как $\omega_1 = 0$ – характеристический корень соответствующего однородного уравнения, то $r = 1$, и мы имеем

$$y_{част.} = (At^2 + Bt + C)t = At^3 + Bt^2 + Ct .$$

Тогда

$$y'_{част.} = 3t^2 A + 2Bt + C, \quad y''_{част} = 6At + 2B .$$

Подставляя в исходное уравнение $y'_{част}$ и $y''_{част}$, получим

$$6At + 2B - 6At^2 - 4Bt - 2C = -6t^2 .$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, имеем:

при t^2 : $\quad -6A = -6 \qquad A = 1,$

при t : $\quad 6A - 4B = 0 \qquad B = 3/2,$

при t^0 : $\quad 2B - 2C = 0 \qquad C = 3/2 .$

Итак,

$$y = y_{общ.}(t) + y_{част.}(t) = C_1 + C_2 e^{2t} + t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t .$$

21. Решить линейное ДУ $y'' + 4y = 2e^{-t}$.

Общее решение соответствующего ОЛДУ уже найдено в примере 17.

$$y_{общ.}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t .$$

Частное решение линейного ДУ ищем методом подбора – в правой части стоит многочлен нулевой степени, умноженный на e^{-t}, т.е. имеем $n = 0$, $\omega = -1$. Резонанс отсутствует, так как $\omega = -1$ не является характеристическим корнем.

Частное решение имеет вид $y_{част}(t) = Ae^{-t}$; тогда

$$y'(t) = -Ae^{-t}, \quad y''(t) = Ae^{-t}$$

и, подставляя в уравнение, получаем

$$Ae^{-t} + 4Ae^{-t} = 2e^{-t}, \quad 5Ae^{-t} = 2e^{-t} \text{ и } 5A = 2, \quad A = \frac{2}{5}$$

Следовательно, $y_{\text{частн.}}(t) = 2/5\, e^{-t}$, и общее решение заданного НЛДУ

$$y(t) = y_{\text{общ.}}(t) + y_{\text{част}}(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{2}{5}e^{-t} .$$

Безусловно, можно было бы найти $y_{\text{частн.}}(t)$ и при помощи интеграла наложения. Так, для уравнения

$$y'' + 4y = 1 \quad \text{имеем} \quad y_{\text{частн.}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-s)\,ds ,$$

для уравнения $y'' - 2y' = -6t^2$ имеем:

$$y_{\text{частн.}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 - e^{2(t-s)}\right)\cdot 6\,s^2 ds = 3\int_0^t \left(1 - e^{2(t-s)}\right)s^2 ds ;$$

для уравнения $y'' + 4y = 2e^{-t}$:

$$y_{\text{частн.}}(t) = \int_0^t \sin 2(t-s)\, e^{-s}\, ds .$$

Вычислив интегралы, убедитесь, что общее решение имеет тот же вид, что и полученное ранее.

В примерах 17 и 18 правая часть уравнений имеет такой вид, что допускает применение метода подбора. Применив этот метод, проверьте, что для уравнения $y'' + 4y = \cos 2t$:

$$y_{\text{частн.}} = (A\cos 2t + B\sin 2t)t$$

и найдите неопределенные коэффициенты, подставив $y_{\text{частн.}}(t)$ в уравнение и приравняв коэффициенты при подобных членах слева и справа.

ПРИМЕР

22. Для цепи, рассмотренной в примере 2, найти изменение заряда на конденсаторе, если

$L = 3\cdot 10^{-3}$ Гн, $R = 400$ Ом и $C = 10^{-7}$ Ф, а входное напряжение $u(t) = \sin 10^5 t$ В. В начальный момент заряд и ток в цепи равны нулю.

Решение: В уравнение $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = u(t)$ подставим данные задачи

$$3\cdot 10^{-3} q'' + 4\cdot 10^2 q' + \frac{1}{10^{-7}} q = \sin 10^5 t .$$

Начальные условия $q(0)=0$, $q'(0) = i(0) = 0$. Решим эту задачу Коши, используя метод подбора. Запишем характеристическое уравнение для

ОЛДУ: $3\cdot 10^{-3}\cdot\omega^2 + 4\cdot 10^2\cdot\omega + 10^7 = 0$.

Его корни $\omega_{1,2} = \dfrac{-2\cdot 10^2 \pm \sqrt{4\cdot 10^4 - 3\cdot 10^{-3}\cdot 10^7}}{3\cdot 10^{-3}} =$

$$= \frac{-2\cdot 10^2 \pm 10^2\cdot\sqrt{4-3}}{3\cdot 10^{-3}} = 10^5\left(\frac{-2\pm 1}{3}\right);\quad \omega_1 = -10^5,\ \omega_2 = -\frac{10^5}{3}.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$q_{общ.}(t) = C_1\cdot e^{-10^5 t} + C_2\cdot e^{-\frac{1}{3}10^5 t}.$$

В правой части неоднородного уравнения стоит выражение $\sin 10^5 t$; следовательно, частное решение его имеет вид

$$q_{част.}(t) = A\sin 10^5 t + B\cos 10^5 t.$$

Резонанс отсутствует, так как $\omega = 10^5 \neq \omega_{1,2}$.

Найдем
$$q' = 10^5 A\cos 10^5 t - 10^5 B\sin 10^5 t,$$
$$q'' = -10^{10} A\sin 10^5 t - 10^{10} B\cos 10^5 t$$

и подставим в уравнение

$$-3\cdot 10^7 A\sin 10^5 t - 3\cdot 10^7 B\cos 10^5 t + 4\cdot 10^7\cdot A\cos 10^5 t -$$
$$-4\cdot 10^7 B\sin 10^5 t + 10^7\cdot A\sin 10^5 t + 10^7 B\cos 10^5 t = \sin 10^5 t.$$

Приведем подобные члены

$$10^7\cdot(-3A - 4B + A)\sin 10^5 t + 10^7\cdot(-3B + 4A + B)\cos 10^5 t = \sin 10^5 t.$$

Приравняем коэффициенты при синусах и косинусах:

$$\begin{cases} 10^7(-2A - 4B) = 1, \\ 10^7(4A - 2B) = 0 \end{cases}$$

и найдем A и B из полученной системы:

$$B = 2A;\quad 10^7\cdot(-10)A = 1;\quad A = -10^{-8};\quad B = -2\cdot 10^{-8}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид:

$$q(t) = C_1 e^{-10^5 t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}10^5 t} - 10^{-8}\sin 10^5 t - 2\cdot 10^{-8}\cos 10^5 t.$$

Найдем C_1 и C_2 из начальных условий: $q(0) = q'(0) = 0$

$$q' = -10^5 C_1 e^{-10^5 t} - \frac{10^5}{3} C_2 e^{-\frac{1}{3}10^5 t} - 10^{-3}\cos 10^5 t + 2\cdot 10^{-3}\sin 10^5 t$$

При $t = 0$ имеем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2\cdot 10^{-8}, \\ -10^5 C_1 - \frac{10^5}{3} C_2 - 10^{-3} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2\cdot 10^{-8}, \\ -C_1 - \frac{1}{3} C_2 = 10^{-8}, \end{cases} \quad \frac{2}{3} C_2 = 3\cdot 10^{-8}, \quad \begin{array}{l} C_2 = \frac{9}{2}10^{-8}, \\ C_1 = -\frac{5}{2}10^{-8}. \end{array}$$

Окончательно получаем

$$q(t) = -\frac{5}{2}10^{-8} e^{-10^5 t} + \frac{9}{2}10^{-8} e^{-\frac{10^5}{3}t} - 10^{-8}\sin 10^5 t - 2\cdot 10^{-8}\cos 10^5 t$$

Линейные однородные системы дифференциальных уравнений

Линейная однородная система двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = py + qz, \\ \frac{dz}{dt} = ry + \ell z, \end{cases}$$

где p, q, r, ℓ – заданные числа, а $y(t)$ и $z(t)$ – искомые функции.

Один из способов решения такой системы состоит в сведении системы двух уравнений к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

ПРИМЕР

23. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + 8z, \\ \frac{dz}{dt} = y + z, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -y + 8z, \\ z' = y + z. \end{cases}$$

Исключим из первого уравнения переменную z. Для этого продифференцируем обе части этого уравнения по t. Получим

$$y'' = -y' + 8z'$$

и подставим в это равенство выражение для z' из второго уравне-

ния
$$y'' = -y' + 8(y+z)\ , \quad y'' = -y' + 8y + 8z\ .$$
Теперь осталось исключить z ,которое выражаем через y и y' из первого уравнения системы:
$$z = \frac{1}{8}(y' + y)\ .$$
Окончательно наша система свелась к ОДДУ второго порядка
$$y'' = -y' + 8y + y' + y\ ; \qquad y'' - 9y = 0\ .$$
Составим характеристическое уравнение $\omega^2 - 9 = 0$,его корни $\omega_{1,2} = \pm 3$. Общее решение для y запишется в виде
$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$
Чтобы найти z ,воспользуемся равенством : $z = \dfrac{y' + y}{8}$,
$$z = \frac{1}{8}\left(C_1 \cdot 3e^{3t} - C_2 3e^{-3t} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}\right),$$
$$z = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t}$$
и имеем ответ: $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}\ ;\ z = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t}$.

Численное интегрирование ДУ первого порядка

Рассмотрим метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения
$$y' = f(t, y)$$
с начальным условием
$$y(t_0) = y_0\ .$$

Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения уравнения $y(t)$ в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Выбрав достаточно малый шаг h ,положим
$$t_{k+1} = t_k + h\ , \quad k = 0,1,2,\dots$$
В методе Эйлера величины y_k вычисляются по формуле
$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k\ ,$$
где $\Delta y_k = h \cdot f(t_k, y_k)\ , \quad k = 0,1,2,\dots$

Это простейший численный метод,удобный при ручном вычислении. Результаты вычислений будем заносить в таблицу.

Таблица 2

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$	$\Delta y_k = h\cdot f(t_k, y_k)$
0	t_0	y_0	$f(t_0, y_0)$	$\Delta y_0 = h\cdot f(t_0, y_0)$
I	$t_1 = t_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(t_1, y_1)$	$\Delta y_1 = h\cdot f(t_1, y_1)$
2	$t_2 = t_1 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$f(t_2, y_2)$	$\Delta y_2 = h\cdot f(t_2, y_2)$
⋮	. . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .

ПРИМЕР

24. Построить методом Эйлера решение задачи Коши

$$y' = ty, \quad y(0) = 1$$

на промежутке $[0;\ 0.5]$ с шагом $h = 0.1$.

В нашем случае

$$t_0 = 0;\quad y_0 = 1;\quad f(t, y) = t\cdot y,\quad h = 0.1\ .$$

Поэтому таблица результатов вычислений выглядит так:

Таблица 3

K	t_k	y_k	$f(t_k, y_k) = t_k\cdot y_k$	$\Delta y_k = 0{,}1\cdot f(t_k, y_k)$
0	0.0	I	0	0.000
I	0.I	I.000	0.I00	0.0I0
2	0.2	I.0I0	0.202	0.020
3	0.3	I.030	0.309	0.03I
4	0.4	I.06I	0.424	0.042
5	0.5	I.I03		

Точное решение $y = e^{t^2/2}$ при $t = 0.5$ имеет значение $y = $ I.I33. Абсолютная погрешность составляет 0.030, а относительная погрешность равна 3%. На рис.2 по найденной таблице приближенных значений функции $y = y(t)$ построена ломаная Эйлера.

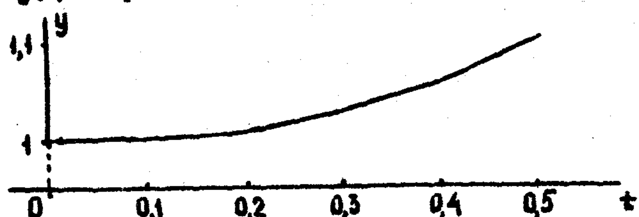


Рис.2

О других приближенных методах смотрите: Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.-М.:Наука, I971 .

Р Я Д Ы

В школьной программе подробно изучаются линейная функция $y = a + bx$ и квадратный трехчлен $y = a + bx + cx^2$. Это простейшие примеры многочленов. С другой стороны, такие элементарные функции, как $y = \frac{1}{1-x}$ или $y = \cos x$, не являются многочленами и определяются совсем иначе.

Отметим, что все элементарные функции и многие неэлементарные все же можно задать однотипными алгебраическими формулами – "многочленами бесконечной степени"

$$a + bx + cx^2 + \ldots + dx^n + \ldots$$

Такие многочлены называют **степенными рядами**.

Напомним в качестве примера школьную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \qquad (15)$$

Многоточие означает, что сумма содержит бесконечное число слагаемых, и поэтому процесс суммирования, казалось бы, невозможно закончить.

Как же определяется сумма в левой части ? По известной формуле суммы геометрической прогрессии находим сумму первых n членов ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Если $-1 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

Суммы любых достаточно длинных конечных отрезков ряда близки к предельному значению $\frac{1}{1-x}$, которое и считается, по определению, суммой бесконечного ряда (15).

Выпишем разложения в степенные ряды для важнейших элементарных функций :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad (16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad (17)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad (18)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (19)$$

Часто ряды записывают сокращенно при помощи знака Σ (сигма). Например, формулы (16) - (19) можно переписать так:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} x^n.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, называется общим членом ряда.

Ниже мы поясним, как можно получать подобные разложения и как они используются для решения задач математического анализа.

Напомним важнейшие понятия, связанные с рядами (точные определения см. [I, гл. XVI]).

Числовым рядом называется выражение вида

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots, \qquad (20)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - вещественные или комплексные числа.

Частичная сумма ряда (20) - это сумма $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ первых n членов (слагаемых) этого ряда. Например, $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2$, $S_3 = x_1 + x_2 + x_3$ и т.д. Говорят, что ряд (20) сходится, если последовательность его частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n$ имеет конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Число S называют суммой сходящегося ряда. Если же предел частичных сумм бесконечен или вообще не существует, то ряд называется расходящимся.

ПРИМЕРЫ

25. Геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \ldots$ (слагаемые этого ряда образуют геометрическую прогрессию) сходится, если $-1 < x < 1$, и расходится при $|x| \geq 1$.

Если ряд геометрической прогрессии сходится, то его сумма равна $S = \frac{1}{1-x}$. Например, при $x = \frac{1}{2}$ ряд сходится, и сумма его равна 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2 .$$

Суммирование в этом примере можно изобразить наглядно как постепенное удлинение отрезка (рис.3).

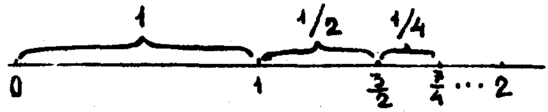


Рис.3

26. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится, если $\alpha \le 1$.

У всех сходящихся рядов общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 ,$$

(необходимый признак сходимости ряда).

Ряд (20) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин:

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| + \dots$$

Известно, что абсолютно сходящийся ряд является сходящимся (обратное верно не всегда). Свойства абсолютно сходящихся рядов наиболее близки к свойствам конечных сумм [I].

Степенной ряд

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (21)$$

задается своими коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ Он может сходиться при одних значениях x и расходиться при других. Множество тех значений x, при которых ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда. Известно, что область сходимости ряда (21) представляет собой круг с центром в нуле на комплексной плоскости [I, гл.XУI].

Радиус этого круга R называется радиусом сходим о с т и степенного ряда. Радиус сходимости ряда (21) можно выразить через его коэффициенты по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (22)$$

Известно, что внутри круга сходимости степенной ряд является даже абсолютно сходящимся.

Если $R=0$, то ряд нигде не сходится, кроме точки $x=0$.

ПРИМЕРЫ

27. Для ряда (19): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

получаем, что $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ и радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Значит, область сходимости этого ряда – единичный круг с центром в нуле, т.е. все значения x для которых $|x|<1$.

28. Найти радиус сходимости ряда (16)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Напомним определение числа $n!$ (n – факториал), где n – натуральное число: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, т.е. это произведение целых чисел от 1 до n ($0! = 1$ по определению). Так, $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$, а $(n+1)! = 1\cdot2\cdot3\ldots\cdot n\cdot(n+1) = n!(n+1)$.

Для нашего ряда $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

и ряд сходится при любых x.

29. Найти радиус сходимости ряда (17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

В этом случае формулу (22) непосредственно применить нельзя, так как все нечетные коэффициенты равны нулю. Сделаем подстановку $y = x^2$. К получившемуся степенному ряду $1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + \ldots$

применяем формулу (22): $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2) = \infty$$

Получаем, что ряд сходится при любых y; поэтому исходный ряд сходится при всех x. Его радиус сходимости бесконечен.

Можно доказать, что и ряд (18) сходится при всех x.

30. Ряд по степеням разности $(x-2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n = 1-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\ldots$$

имеет центр сходимости не в нуле, а в точке $x_0=2$.

Вообще, ц е н т р к р у г а с х о д и м о с т и для ряда по степеням $(x-x_0)$

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \qquad (23)$$

находится в точке x_0, и круг сходимости задается неравенством:

$$|x-x_0|<R.$$

Коэффициенты нашего ряда по абсолютной величине равны единице. Поэтому его радиус сходимости равен единице:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$$

и, следовательно, если $|x-2|<1$, то ряд будет сходиться.

Если известна сумма $S(x)$ степенного ряда (23), то радиус сходимости ряда можно определить как расстояние от точки $x=x_0$ до ближайшей точки, где функция $y=S(x)$ не определена. Если y – непрерывная функция, то $R=\infty$ (x – комплексная переменная).

ПРИМЕР

31. По формуле для суммы геометрической прогрессии находим сумму ряда (см. пример 35)

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\frac{1}{1+x^2}.$$

Функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ не определена при $1+x^2=0$, т.е. в точках $x=i$ и $x=-i$. Их расстояния до начала координат равны $|\pm i|=1$, так что радиус сходимости ряда равен $R=1$, и область сходимости задается неравенством $|x|<1$.

Р а з л о ж е н и е ф у н к ц и и в р я д Т е й л о р а

Чтобы разложить функцию $y=f(x)$ в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots, \qquad (24)$$

нужно найти значения чисел a_0, a_1, a_2, ... – коэффициентов ряда. Это делается по формуле Тейлора

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (25)$$

В частности, нулевой коэффициент $a_0 = f(0)$ – это значение функции $y = f(x)$ при $x_0 = 0$; $a_1 = f'(0)$ – значение первой производной от функции $y = f(x)$ при $x_0 = 0$; $a_2 = 1/2 \cdot f''(0)$ – половина от значения второй производной в нуле.

ПРИМЕР

32. Чтобы получить ряд (19) для функции $\ln(1+x)$, заполним табл. 4.

Таблица 4

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	a_n
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$(1+x)^{-1}$	1	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$2(1+x)^{-3}$	2	$\frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$
4	$-2 \cdot 3(1+x)^{-4}$	$-2 \cdot 3$	$-\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$

Самое важное здесь – правильно заполнить второй столбец, содержащий функцию $y = f(x)$ и ее последовательные производные. Производных надо взять настолько много, чтобы выявилась закономерность в последовательности коэффициентов a_0, a_1, a_2, ...

Формулы (24) и (25) имеют смысл только для значений переменной x, лежащих в круге сходимости ряда, т.е. достаточно близких к нулю.

Чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в степенной ряд, сходящийся при значениях x, близких к какой-либо точке x_0, используются ряды по степеням разности $(x - x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \quad (26)$$

Коэффициенты ряда – числа a_0, a_1, a_2, ... в этом случае определяются также по формуле Тейлора

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (27)$$

Получающийся ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

называется **р я д о м Т е й л о р а** (в точке x_0).

Если $x_0=0$, то получается рассмотренный выше р я д М а к л о р е н а

$$f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots \qquad (28)$$

ПРИМЕР

33. Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в точке $x_0=1$.

Составляем таблицу для вычисления коэффициентов ряда Тейлора.

Таблица 5

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	a_n
0	$\ln x$	0	0
1	x^{-1}	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$1\cdot 2\cdot x^{-3}$	$2!$	$\frac{1}{3}$
4	$-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}$	$-3!$	$-\frac{1}{4}$

Получаем разложение в ряд Тейлора

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\dots$$

Чтобы найти радиус сходимости этого ряда, найдем расстояние от центра сходимости ряда точки $x_0=1$ до точки разрыва функции $y=\ln x$ при $x=0$: $R=|1-0|=1$. Значит этот ряд сходится при $|x-1|<1$. Радиус сходимости можно найти и по формуле (22).

Д е й с т в и я с р я д а м и

С абсолютно сходящимися степенными рядами можно работать так же, как с многочленами. Их можно складывать, умножать, делить, находить от них производные и первообразные. Приведем несколько характерных примеров.

ПРИМЕРЫ

34. Ряд (19) сходится при $|x|<1$. Приравнивая производные от ле-

вых и правых частей формулы (19), получим

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Это разложение также справедливо при $|x|<1$. Для проверки можно подставить вместо x переменную $y=-x$; получится знакомое разложение (15).

35. Чтобы получить разложение в степенной ряд функции $y=\operatorname{arctg} x$, не обязательно вычислять коэффициенты ряда (25). Вместо этого вспомним, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad (29)$$

можно получить из (15) подстановкой нового аргумента $(-x^2)$ на место переменной x. Интегрируя обе части формулы (29), получим

$$\operatorname{arctg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots ,$$

где постоянную интегрирования C еще нужно определить. Подставляя $x=0$, получим, что $0=C+0-0+\ldots$, откуда $C=0$.

Получаем разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots ,$$

справедливое при $|x|<1$ (поскольку ряд (15) сходится только при этом условии) (см. пример 31).

Вычисления с помощью рядов

Разложение функции $y=f(x)$ в степенной ряд дает удобные приближенные формулы для вычисления значений этой функции:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0).$$

Если для вычисления используется сумма первых n членов ряда, то ошибка приближения при $x_0=0$ не превосходит по абсолютной величине числа $\frac{M_n}{n!}|x^n|$, где

$M_n = \max\limits_{|y|\le|x|} |f^{(n)}(y)|$ – максимальное значение n -й производной на отрезке от $-x$ до x. Через n здесь обозначается показатель степени первого отброшенного члена ряда.

ПРИМЕР

36. Получим значение числа e с точностью до одной тысячной. Воспользуемся разложением (I6) для экспоненты $y = e^x$. Для этой функции $y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x$. Наибольшее значение на отрезке $[-1,1]$, равное e, эта функция принимает при $x=1$. Поскольку $e<3$, можем считать, для простоты, что $M_n = 3$. Учитывая, что $7! = 5040$, получаем при $n=7$, что

$$\frac{M_7}{7!}(1)^7 = \frac{3}{5040} < 0{,}001 ,$$

так что можно отбросить все слагаемые ряда (I6), содержащие седьмую и более высокие степени переменной x. Подставляя в оставшуюся частичную сумму значение $x=1$, получаем

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1667 + \ldots = 2{,}718\ldots$$

причем все три знака после запятой - верные.

В случае, когда ряд з н а к о ч е р е д у ю щ и й с я, ошибка вычислений находится проще - она н е п р е в о с х о д и т абсолютной величины п е р в о г о о т б р о ш е н н о г о ч л е н а.

ПРИМЕР

37. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,3} \frac{\sin x}{x}\,dx$, используя два члена разложения в ряд подынтегральной функции, и оценить погрешность вычислений. Поскольку пределы интегрирования содержат точку $x=0$, воспользуемся разложением $\sin x$ в ряд в точке 0 (ряд Маклорена):

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} .$$

$$\int_0^{0,3} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^{0,3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right)\Big|_0^{0,3} =$$

$$= 0{,}3 - \frac{0{,}027}{18} + \frac{0{,}3^5}{600} = 0{,}3 - 0{,}0015 = 0{,}2985 .$$

Для вычислений мы воспользовались суммой двух членов ряда, а так как ряд знакочередующийся, погрешность не превосходит модуля третьего члена
$$|\Delta| < \frac{0{,}3^5}{600} \approx 0{,}000004 .$$

38. Многочлен $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 4$ представить рядом по степеням $(x+1)$ и вычислить его значение при $x = -0{,}9$, используя полученное представление.

Р е ш е н и е. Разложим нашу функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = -1$. Этот ряд содержит конечное число слагаемых, так как все производные функции $f(x)$, начиная с пятой, равны нулю.

Таблица 6

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-1)$	$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(-1)$
0	$x^4 - 3x^3 + x - 4$	$1+3-1-4=-1$	-1
1	$4x^3 - 9x^2 + 1$	$-4-9+1=-12$	-12
2	$12x^2 - 18x$	$12+18=30$	$\frac{30}{2!} = 15$
3	$24x - 18$	$-24-18=-42$	$-42/3! = -7$
4	24	24	$\frac{24}{4!} = \frac{24}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1$
5	0	0	0

$$f(x) = -1 - 12(x+1) + 15(x+1)^2 - 7(x+1)^3 + (x+1)^4;$$

$$f(-0.9) = -1 - 12\cdot 0.1 + 15\cdot 0.1^2 - 7\cdot 0.1^3 + 0.1^4 =$$
$$= -1 - 1.2 + 0.15 - 0.007 + 0.0001 =$$
$$= -2.207 + 0.1501 = -2.0569 .$$

Рядами можно пользоваться и для нахождения пределов.

ПРИМЕРЫ

39. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. По формуле (I7): $\frac{1-\cos x}{x^2} =$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)\right) = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots$$
Предел этого выражения, очевидно, равен I/2 при $x \to 0$.

40. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)+\ln(1-x^2)}{x^4}$.

Воспользуемся разложением в ряд функций $\sin x$ и $\ln(1+x)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\ldots\right)+\left(-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\frac{(-x^2)^3}{3}-\ldots\right)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{2}+\ldots}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}.$$

Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях затруднительно, можно искать решение задачи Коши в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $y^{(n)}(x)$ последовательно находятся из начальных условий и дифференцирования исходного уравнения.

ПРИМЕРЫ

4I. Найти с помощью степенного ряда решение задачи Коши (вычислить первых пять членов ряда) для уравнения $y'=x^2-y^2$, $y(0)=1$.

Так как начальные условия заданы в точке 0, решение ищем в виде ряда Маклорена

$$y=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Таблица 7

n	$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(0)$	$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$
0	y	I (из нач. усл.)	I
I	$y'=x^2-y^2$ (из уравнения)	-1	-1
2	$y''=2x-2yy'$	$0-2\cdot1\cdot(-1)=2$	$\frac{2}{2!}=1$
3	$y'''=2-2(y')^2-2yy''$	$2-2-2\cdot2=-4$	$-\frac{4}{3!}=-\frac{2}{3}$
4	$y^{IV}=-4y'y''-2y'y''-2yy'''=$ $=-6y'y''-2yy'''$	$-6\cdot(-1)\cdot2-2\cdot1\cdot(-4)$ $=20$	$\frac{20}{4!}=\frac{5}{6}$

Получаем ряд, где y - искомая функция:

$$y = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \dots$$

З а м е ч а н и е. При вычислении производных использовались известные формулы производной произведения $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$; производной сложной функции $(f(y(x)))' = f'_y \cdot y'_x$ и другие формулы.

Например,

$$((y')^2 - y \cdot y'')'_x = 2y' \cdot (y')' - (y' \cdot y'' + y \cdot y''') =$$

$$= 2y' \cdot y'' - y' \cdot y'' - y \cdot y''' = y' \cdot y'' - y \cdot y'''.$$

42. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y'' - xy = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$

Разрешим уравнение относительно старшей производной. Найдем коэффициенты ряда Маклорена.

Таблица 8

n	$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(0)$	$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$
0	y	-I (из нач.усл.)	-I
I	y'	2	2
2	$y'' = xy$ (из уравнения)	0	0
3	$y''' = y + xy'$	$-1 + 0 \cdot 2 = -1$	$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$
4	$y^{IV} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy''$	$2 \cdot 2 = 4$	$\frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$

Окончательно получаем

$$y = -1 + 2x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

Исследование сходимости полученных рядов можно опустить из-за его сложности. Независимую переменную в ДУ можно было обозначить через t (как и раньше) и получить ряд по степеням t.

Р Я Д Ы   Ф У Р Ь Е

Р я д   Ф у р ь е   п е р и о д и ч е с к о й   ф у н к ц и и

Число T называется периодом функции $y = f(x)$, если сдвиг аргумента на T не меняет значения функции

$$f(x+T) = f(x)$$

при любых x. Функция называется периодической, если у нее существует отличный от нуля период $T \neq 0$. В этом случае кратные числа $2T, 3T, \ldots$ также являются периодами функции. Например, $T = 2\pi$ является периодом следующих функций

$$
\begin{array}{ll}
y = 1 & \\
y = \cos x & y = \sin x \\
y = \cos 2x & y = \sin 2x \\
y = \cos 3x & y = \sin 3x \\
\ldots &
\end{array}
$$

Умножим каждую из этих функций на произвольный числовой коэффициент и составим сумму

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) . \quad (30)$$

Если ряд (30) сходится, обозначим через $S(x)$ его сумму. Поскольку при сдвиге аргумента на $T = 2\pi$ ни одно слагаемое в (30) не изменяется, сумма также не будет меняться: $S(x+2\pi) = S(x)$ и $S(x)$ - периодическая функция с периодом $T = 2\pi$.

Замечательный математический факт состоит в том, что большинство периодических функций, встречающихся в математике и ее приложениях, могут быть представлены подобными рядами.

Это означает, например, что каждый периодический сигнал можно получить как сумму простых гармонических колебаний с подходящими амплитудами.

Пусть $y = f(x)$ - периодическая функция с периодом $T = 2\ell$. Рядом Фурье этой функции называется т р и г о н о м е т р и ч е с к и й   р я д

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (31)$$

коэффициенты которого определяются по функции $y = f(x)$ при помощи формул Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Если для функции $y = f(x)$ выполняются условия Дирихле (см. [I, гл. XII, §]), то ряд (31) сходится. Его сумма $S(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $y = f(x)$; если же в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет разрыв первого рода, то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т.е. $S(x_0)$ является средним арифметическим левого и правого пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0.

ПРИМЕРЫ

43. Пусть $f(x) = 0$ на отрезке $]-\pi, 0]$ и $f(x) = x$ на отрезке $]0, \pi]$ и $f(x)$ имеет период $T = 2\pi$.

Решение. Условия Дирихле для этой функции выполняются, поэтому ряд Фурье сходится, и его сумма совпадает со значением функции $f(x)$, если x – точка непрерывности функции $f(x)$; $x \neq (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

В точках разрыва получаем $S((2k+1)\pi) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

В этих точках сумма ряда отличается от функции. Значения функции $S(x)$ в точках $x = (2k+1)\pi$ на рис.4 отмечены крестиками.

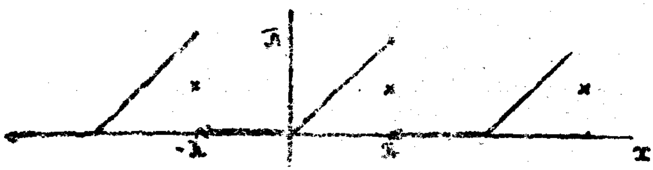


Рис.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. В формулах Фурье $T = 2\pi$, $\ell = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx, \\ dv=\cos nx\,dx \\ v=\frac{\sin nx}{n}\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\cdot\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\cdot\sin n\pi}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \qquad \left(\text{так как } \sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx, \\ dv=\sin nx\,dx \\ v=-\frac{\cos nx}{n}\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{\cos n\pi}{n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Итак ,ряд Фурье функции равен

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin nx .$$

44. Найдем ряд Фурье функции

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in]-1+2k, 2k], \\ 1, & \text{если } x \in]2k, 1+2k]. \end{cases}$$
$$k = 0, \pm 1, \ldots$$

График функции и график суммы ряда показаны на рис.5.

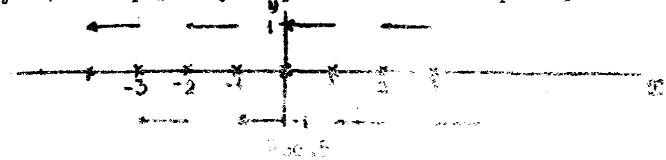


Рис.5

Сумма ряда S в точках $x=k$ равна 0.

Поскольку функция нечетная (график симметричен относительно начала координат), ряд Фурье содержит только нечетные функции, т.е. только синусы, а коэффициенты при косинусах равны нулю: $a_n=0$, $n=0,1,\ldots$

При вычислении b_n воспользуемся четностью подынтегральной функции и будем вычислять интеграл не по интервалу $]-l,l]$, а по интервалу $[0,l]$.

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Для нашей функции $T=2l=2$.

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1\sin n\pi x\,dx=$$

$$=-2\left.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$

Итак, ряд Фурье равен

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin n\pi x=\frac{4}{\pi}\sin\pi x+\frac{4}{\pi 3}\sin 3\pi x+\frac{4}{\pi 5}\sin 5\pi x+\ldots$$

45. Найдем ряд Фурье 2π-периодической функции

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],\ k=0,\pm1,\ldots\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

График функции $y=f(x)$ и график суммы ряда показаны на рис.6.

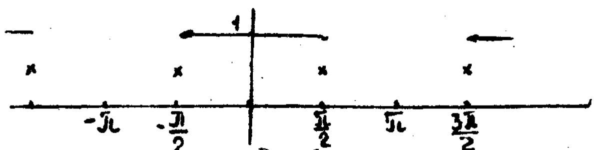


Рис.6

Поскольку функция четная (график функции симметричен относительно оси ординат), ряд Фурье содержит только косинусы и постоянное слагаемое, а коэффициенты при синусах равны нулю:

$$b_n=0,\quad n=1,2,\ldots$$

Найдем коэффициенты Фурье a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Подставляя значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, находим $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{2}{5\pi}$ и т.д. Ряд Фурье равен

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos nx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots\right).$$

Ряд Фурье непериодической функции. Разложения по синусам и по косинусам

Вычисляя коэффициенты Фурье для периодической функции $y = f(x)$, можно проводить интегрирование по любому промежутку $[x_0, x_0 + T]$, длина которого совпадает с периодом функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \qquad (32)$$

Численные значения коэффициентов Фурье не зависят от выбора x_0.

Формулы (32) можно применять к любой функции, заданной на отрезке $[x_0, x_0+T]$ (не обязательно периодической). Если условия Дирихле на отрезке выполняются, то ряд Фурье сходится. Важно помнить, что его сумма $S(x)$ совпадает с исходной функцией $y = f(x)$, вообще говоря, только на основном промежутке.

ПРИМЕР

46. Разложим функцию $y = x^2$ в ряд Фурье на промежутке $-1 < x \le 1$.

Здесь $x_0 = -1$, $T = 2$, и, поскольку $y = x^2$ – четная функция, $b_n = 0$, а для a_n по формулам Фурье получим

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x\, dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2 d(\sin n\pi x) = \frac{2}{n\pi}x^2 \sin n\pi x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx = \frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 x\, d(\cos n\pi x) = \frac{4}{(n\pi)^2} x \cos n\pi x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx = \frac{4}{(n\pi)^2}\cos n\pi = \frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n.$$

Получаем ряд Фурье:

$$S(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos n\pi x =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x - \frac{1}{16}\cos 4\pi x + \dots\right)$$

Графики функций $y = x^2$, $y = S(x)$ показаны на рис.7.

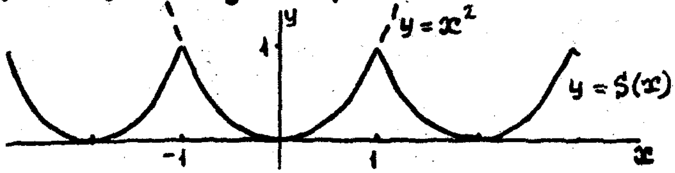


Рис.7

Найдем значение суммы ряда $S(x)$ при $x = -16.1$ и $x = 0.5$.

$$S(-16.1) = S(-16.1 + 16) = S(-0.1) = f(-0.1) = (-0.1)^2 = 0.01.$$

$$S(0.5) = f(0.5) = 0.5^2 = 0.25.$$

Функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке вида $[0, \ell]$, можно разложить в тригонометрический ряд **как только** по косинусам, **так и только** по синусам. Чтобы получить ряд по косинусам, функцию $y = f(x)$ продолжают на симметричный промежуток $[-\ell, 0]$ так, чтобы получилась четная функция: $f(-x) = f(x)$.

В этом случае коэффициенты при косинусах и постоянное слагаемое можно определить по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx,\quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Для получения ряда только по синусам, следует продолжить функцию $y = f(x)$ до нечетной функции на промежутке $[-\ell, \ell]$: $f(-x) = -f(x)$. Коэффициенты при синусах можно найти по формулам

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,\quad n = 1, 2, \ldots$$

ПРИМЕР

47. Разложим функцию $y = x^2$ на промежутке $[0, 1]$ в ряд по синусам. Для этого продолжим функцию на интервал $]-1, 0[$ нечетным образом. Коэффициенты Фурье равны

$$b_n = 2\int_0^1 x^2 \cdot \sin n\pi x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2x\,dx \\ \sin n\pi x\,dx = dv,\ v = \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \end{array} \right.$$

$$= 2\left(-\frac{x^2 \cdot \cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx\right) = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ \cos n\pi x\,dx = dv \\ v = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\, x \cdot \sin n\pi x\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^3}\cos n\pi x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^3}(-1)^n - \frac{4}{(n\pi)^3}.$$

Ряд Фурье будет таким:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3}\right)\sin n\pi x.$$

Графики функций $y = x^2$, $y = S(x)$ показаны на рис.8.

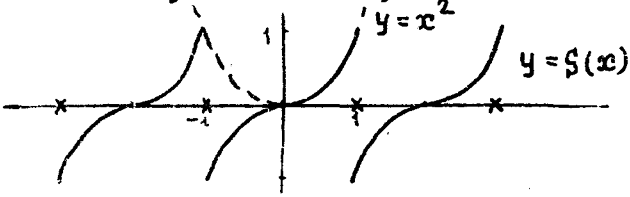


Рис.8

Найдем значение суммы ряда при $x = -16.1$, $x = 0.5$, $x = 11$.

$$S(-16.1) = S(-0.1) = -S(0.1) = -f(0.1) = -(0.1)^2 = -0.01;$$

$$S(0.5) = f(0.5) = 0.5^2 = 0.25; \quad S(11) = S(1) = 0.$$

Амплитудно-фазовая форма записи ряда Фурье

Пусть $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = 2\ell$. Обозначим через $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$ частоту колебаний. Ряд Фурье функции $y = f(x)$ может содержать только гармонические колебания

$$a_n \cos n\omega x \quad \text{и} \quad b_n \sin n\omega x$$

с частотой $n\omega$, кратной ω, т.е. ω, 2ω, 3ω, ... Частота ω называется *основной* частотой.

Сумму двух гармоник $a_n \cos n\omega x$ и $b_n \sin n\omega x$, имеющих общую частоту $n\omega$, можно записать в виде одного гармонического колебания, но сдвинутого по фазе

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n).$$

Коэффициенты a_n, b_n выражаются через амплитуду A_n и фазу φ_n по формулам

$$a_n = A_n \cos\varphi_n, \quad b_n = A_n \sin\varphi_n.$$

Величина A_n равна длине вектора с координатами (a_n, b_n), т.е. $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а число φ_n – полярному углу этого вектора (см.рис.9).

Таким образом, ряд Фурье всегда можно записать в *амплитудно-фазовой форме*:

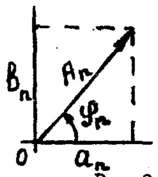


Рис .9

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)=$$
$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega x-\varphi_n), \tag{33}$$

где $A_0=a_0,\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,,\quad \operatorname{tg}\varphi_n=\dfrac{b_n}{a_n}$.

ПРИМЕР

46. Запишем в амплитудно-фазовой форме ряд

$$\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\cos 4x-$$
$$-\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{8}\cos 8x+\ldots$$

По формулам (33) находим

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad -\cos 2x=\cos(2x-\pi)$$
$$-\sin 3x=\cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right),\quad \cos 4x=\cos(4x-2\pi)$$

и т.д. Ряд теперь можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(nx-\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для наглядности числа $A_0, A_1, \ldots$ (с п е к т р а м п л и т у д) изобразим с помощью а м п л и т у д н о й д и а г р а м м ы:

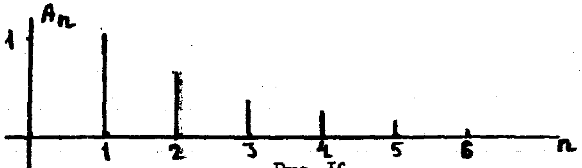


Рис.10

Числа φ_1, φ_2, ... изобразим на ф а з о в о й д и а г р а м м е:

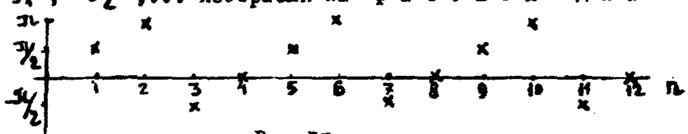


Рис.II

Подчеркнем, что амплитуды A_n всегда неотрицательны (при $n \geqslant 1$); правильные знаки при них обеспечиваются за счет выбора фаз φ_n.

Если ряд содержит только косинусы, то $A_n = |a_n|$; если ряд содержит только синусы, то $A_n = |b_n|$.

ПРИМЕРЫ

49. Для ряда из примера 46 изобразить спектр амплитуд при помощи диаграммы.

$$S(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \dots; \qquad A_n = |a_n|:$$

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = \frac{4}{\pi^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi^2}, \quad A_3 = \frac{4}{9\pi^2}, \dots$$

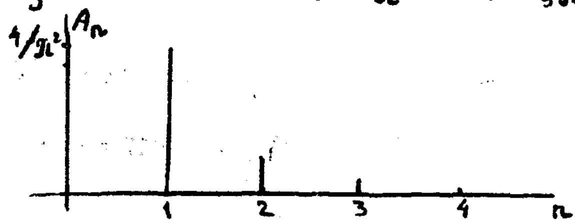


Рис. 12

50. Для ряда из примера 45 изобразить спектр амплитуд при помощи диаграммы.

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x + \dots$$

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{2}{\pi}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = \frac{2}{5\pi}, \quad A_6 = 0, \dots$$

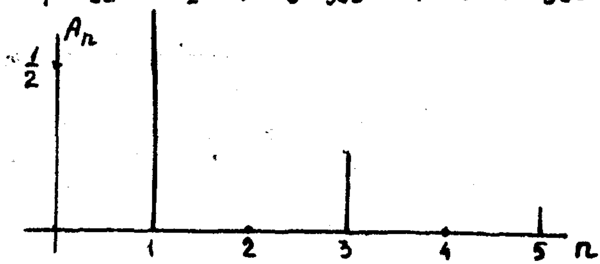


Рис. 13

Упражнения для самопроверки

1. Общее решение ДУ имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
2. Сколько начальных условий надо задать для уравнения $y''' + 3y'' - y = e^{5x}$, чтобы задача Коши имела единственное решение?
3. При каком α система функций $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = 3e^{\alpha x}$ будет линейно зависимой?
4. Вынужденные колебания описываются уравнением $y'' + 16y = \sin \alpha t$. При каком α имеет место резонанс?
5. Укажите номер ДУ, для которого функция $y = t^2 - 3$ является решением:

$$1.\quad y'' + t y' - y = 3t;$$

$$2.\quad y'' + t y' - 2y = 8;$$

$$3.\quad y'' - 2ty' + y = 0 .$$

6. Чему равна сумма ряда

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{1}{5!} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \frac{1}{7!} + \ldots$$

7. Для функции f известно, что $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 4$, $f'''(1) = 3$. Напишите первые четыре члена разложения в ряд Тейлора в точке 1 для функции f.
8. Функция $f(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$f(x) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} + \ldots$$

Чему равна третья производная $f'''(0)$ функции в нуле? Чему равна первая производная $f'(0)$ функции в нуле?
9. Частичная сумма ряда $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ равна $S_n = \dfrac{3n}{2n+1}$. Найти сумму ряда S и третий член ряда x_3. Сходится ли ряд?
10. Получить разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
11. Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ является решением дифференциального уравнения $x y' = y(x+1)$.
12. Функция $f(x) = |x|$ при $x \in [-1, 1[$ разложена в ряд Фурье. Чему равен коэффициент b_3 (см. рис. 14)?

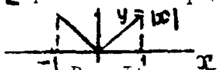


Рис. 14

13. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Чему равна сумма ряда в точке 0 : $S(0)$?

14. Ряд Фурье для функции с периодом 4 имеет вид

$$\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}\cos\pi x - \frac{1}{8}\sin\pi x + \ldots$$

Чему равна амплитуда первой гармоники?

Ответы к упражнениям для самопроверки

1. $y = e^{-2x} + 2e^{x}$; 2. 3; 3. 2; 4. 4; 5. 2; 6. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$;

7. $f(x) = 2 - (x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{3!}(x-1)^3 + \ldots = 2 - (x-1) + 2(x-1)^2 \ldots$

8. $\frac{f'''(0)}{3!} = -1$; $f'''(0) = -3! = -6$; $f'(0) = 0$.

9. Ряд сходится, $S = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$, $x_3 = S_3 - S_2 = \frac{3}{35}$.

10. $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \int\limits_0^x\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots\right)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \ldots$

11. $y = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \ldots$; $y' = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \ldots$

Подставить в уравнение и привести подобные члены.

12. $b_7 = 0$ ($b_n = 0$, так как $f(x)$ – четная функция).

13. 0.

14. $A_1 = \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. -М.: Наука, Т.1,2.(Любое издание с 1976 года).
2. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. -М.:Высш.шк.,1973.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 7

В задачах 391 - 400 найти общее решение для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

391. $(1-t)\,dy - y\,dt = 0.$

392. $dt - \sqrt{1-t^2}\,dy = 0.$

393. $t\sqrt{1-y^2}\,dt + y\sqrt{1-t^2}\,dy = 0.$

394. $y' = y\cos t.$

395. $y' = t\sqrt{1+y^2}.$

396. $y' = \frac{e^y}{t+4}.$

397. $y' = (t^2-t)(y^2+1).$

398. $y' = e^{t+y}.$

399. $t\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{9+t^2} = 0.$

400. $(e^t+3)\,dy + y e^t\,dt = 0.$

В задачах 401 - 410 решить задачу Коши для линейного уравнения.

401. $y' + y\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t.$ $y(0)=0$

402. $y' + y\,\mathrm{tg}\,t = \cos^2 t.$ $y(\pi/4) = 1/2$

403. $y' - \frac{y}{t+2} = t^2 + 2t.$ $y(-1) = 3/2$

404. $y' - \frac{2t-5}{t^2}y = 5.$ $y(2) = 4$

405. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \sin t.$ $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

406. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{t+1}{t}\cdot e^t.$ $y(1) = e$

407. $y' + 2\frac{y}{t} = -2t^3.$ $y(1) = \frac{1}{2}$

408. $y' - 4ty = -4t.$ $y(0) = -1/2$

409. $y' - \frac{2y}{t+1} = (t+1)^3.$ $y(0) = 1/2$

410. $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = -\frac{2}{t}.$ $y(1) = 1$

В задачах 411 - 420, понизив порядок уравнения, решить дифференциальное уравнение второго порядка.

411. $y'' + \frac{2t}{t^2+1}y' = 0.$

416. $y''\,\mathrm{tg}\,t - y' + \frac{1}{\sin t} = 0.$

412. $t^4 t'' + t^3 y' = 4.$

413. $t^2 y'' + t y' = 1.$

414. $t y'' + 2y' = 0.$

415. $t^4 y'' + t^3 y' = 1.$

417. $(1 + \sin t) y'' = y' \cos t.$

418. $y'' \operatorname{tg} t - y' = 1.$

419. $1 + (y')^2 + y y'' = 0.$

420. $t^2 y'' = (y')^2.$

В задачах 421 - 430 найти частное решение ОЛДУ второго порядка.

421. $y'' - 10y' + 25y = 0.$ $y(0) = -1;\ y'(0) = 2.$

422. $y'' + 2y' + y = 0.$ $y(0) = 2;\ y'(0) = -3.$

423. $y'' + 4y' + 4y = 0.$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 2.$

424. $y'' - 2y' + y = 0.$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -3.$

425. $y'' - 4y' + 4y = 0.$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 0.$

426. $y'' + 6y' + 9y = 0.$ $y(0) = 1;\ y'(0) = -1.$

427. $y'' + 8y' + 16y = 0.$ $y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$

428. $y'' - 6y' + 9y = 0.$ $y(0) = -1;\ y'(0) = 1.$

429. $y'' - 8y' + 16y = 0.$ $y(0) = 3;\ y'(0) = 0.$

430. $y'' + 10y' + 25y = 0.$ $y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$

В задачах 431 - 440 найти общее решение ЛДУ второго порядка при помощи интеграла наложения.

431. $y'' + 36y = \sin 6t.$

432. $y'' + 25y = \sin 5t.$

433. $y'' + 9y = \cos 3t.$

434. $y'' + 16y = \cos 4t.$

435. $y'' + 9y = \sin 3t.$

436. $y'' + 25y = \cos 5t.$

437. $y'' + y = \sin t.$

438. $y'' + 16y = \sin 4t.$

439. $y'' + 36y = \cos 6t.$

440. $y'' + y = \cos t.$

В задачах 441 - 450 найти общее решение ЛДУ второго порядка, используя метод подбора частного решения.

441. $y'' - 4y' + 13y = 4e^{3t}$.

442. $y'' + 3y' = 3t + 2$.

443. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{t}$.

444. $y'' + 2y' = 2t - 1$.

445. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{2t}$.

446. $y'' - 3y' = t + 5$.

447. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t}$.

448. $y'' - 4y' = 2t - 3$

449. $y'' - 4y' + 13y = -e^{2t}$.

450. $y'' + 2y' + 2y = 4e^{-2t}$.

В задачах 451 - 460 найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

451. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z. \end{cases}$

452. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 3z. \end{cases}$

453. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 3z. \end{cases}$

454. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4y + 3z. \end{cases}$

455. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + z. \end{cases}$

456. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y + 9z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 2z. \end{cases}$

457. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + 3z \end{cases}$

458. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 9y + z. \end{cases}$

459. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 5y + 3z. \end{cases}$

460. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 5z. \end{cases}$

В задачах 46I – 470 методом Эйлера построить таблицу значений решения для заданного ДУ с начальным условием $y(0)=1$. В таблице указать значения решения на интервале $[0;\ 1]$ с шагом $h=0.1$. По таблице построить график решения.

461. $y' = ty - y^2$.
462. $y' = t^2 + y$.
463. $y' = 2t - 0.1y^2$.
464. $y' = 0.2t + y^2$.
465. $y' = 0.2t - y^2$.
466. $y' = t^2 - y^2$.
467. $y' = 2t + 0.1y^2$.
468. $y' = t^2 - 2y$
469. $y' = 2t - y^2$.
470. $y' = t + y^2$.

В задачах 46Ia – 470a найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка (эти задачи решают студенты Минского филиала вместо задач 46I–470).

46Ia. $y' = \dfrac{t+y}{t-y}$.
462a. $t\,dy - y\,dt = \sqrt{t^2+y^2}\,dt$.
463a. $y' = \dfrac{y}{t} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{t}$.
464a. $(t^2-y^2)\,dy - 2ty\,dt = 0$.
465a. $ty\,dy = (t^2+y^2)\,dt$.
466a. $y' = \dfrac{y}{t} + \operatorname{ctg}\dfrac{y}{t}$.
467a. $(yte^{\frac{y}{t}} + t^2)\,dy = y^2 e^{\frac{y}{t}}\,dt$.
468a. $y' = \dfrac{y}{t} + \dfrac{t}{y}$.
469a. $t\ln\dfrac{t}{y}\,dy - y\,dt = 0$.
470a. $t(t+2y)\,dy = y^2\,dt$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 8

В задачах 47I – 480 для данных рядов найти радиус сходимости и указать область сходимости ряда. Выписать первые три члена ряда.

47I. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n n}{2^n}$.

476. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{n!}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n 7^n}{n\cdot 3^n}$.

472. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n \cdot 2^n}{5^n}$.

473. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

474. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(n+1)}{n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+5}$.

475. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\, n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^n}{3n+1}$.

477. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2+5}$.

478. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(n+5)}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,(x-4)^n}{3^n}$.

479. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2 n!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

480. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n \cdot \sqrt{n+1}}{6^n}$.

В задачах 481 - 490, пользуясь известными разложениями функций в ряд Маклорена, вычислить пределы.

481. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{x^3}$.

482. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x} - \sin(x^2)}{5x^3}$.

483. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

484. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+2x)}{3x^2}$.

485. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{5x^2}$.

486. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

487. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x e^{2x} - \sin x}{x^2}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{4x}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{9x}$.

В задачах 491 - 500 вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничившись двумя членами ряда, оценить погрешность вычислений.

491. $\int_0^{0.4} x^{-1} \cdot (e^{-x} - 1)\, dx$.

496. $\int_0^{1} \frac{\sin(x^3)}{x^2}\, dx$.

492. $\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx$.

493. $\int_0^{0.2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

494. $\int_0^{0.3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

495. $\int_0^{0.4} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$.

497. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$.

498. $\int_0^{0.6} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

499. $\int_0^{1} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\,dx$.

500. $\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}(x^5)}{x}\,dx$.

В задачах 501 - 510 найти первые пять (ненулевых) членов разложения в ряд решения ДУ с заданными начальными условиями.

501. $y'' - 2xy' + 2y^2 = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

502. $y'' - xy' + y - 1 = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

503. $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$.

504. $y' = x + 2y^2$; $y(0) = 1$.

505. $y' = 2x + y^2$; $y(0) = 1$.

506. $y' = x^2 + y^3$; $y(0) = 1$

507. $y'' = xy' - y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

508. $y' = x^2 - y^2$; $y(0) = 1$.

509. $y'' = (y')^2 + xy$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

510. $y'' = yy' - x^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

В задачах 511 - 520 разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда $S(x)$ и спектр амплитуд при помощи диаграмм.

511. $f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x \le 0, \\ 6, & 0 < x \le 1. \end{cases}$

516. $f(x) = \begin{cases} 5, & -2 < x \le 0, \\ -5, & 0 < x \le 2. \end{cases}$

512. $f(x)=\begin{cases}-4, & -\frac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\\ 4, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

513. $f(x)=\begin{cases}-3, & -3<x\leqslant 0,\\ 5, & 0<x\leqslant 3.\end{cases}$

514. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\leqslant -1,\\ -3, & -1<x\leqslant 0,\\ 3 & 0<x\leqslant 1,\\ \text{[illegible]} & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

I5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant -\pi/2,\\ 4, & -\pi/2<x\leqslant 0,\\ -4, & 0<x\leqslant \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\leqslant\pi.\end{cases}$

517. $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ -2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

518. $f(x)=\begin{cases}7, & -\pi<x\leqslant 0,\\ -3, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

519. $f(x)=\begin{cases}0, & -4<x\leqslant -2,\\ 3, & -2<x\leqslant 0,\\ -3, & 0<x\leqslant 2,\\ 0, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

520. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant -\frac{\pi}{2},\\ 2, & -\pi/2<x\leqslant 0,\\ -2, & 0<x\leqslant \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\leqslant\pi.\end{cases}$

В задачах 521 - 530 разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам, продолжив ее в симметричный интервал. Нарисовать график суммы ряда $S(x)$. Найти значения суммы в указанных точках.

521. $f(x)=x-1,\quad 0<x\leqslant 2;\quad S(0.5);\ S(13).$

522. $f(x)=2x+1,\quad 0<x\leqslant 1;\quad S(0.5);\ S(11.2).$

523. $f(x)=-\frac{1}{2}x+1,\quad 0<x\leqslant 4;\quad S(1);\ S(18).$

524. $f(x)=\frac{2}{3}x-1,\quad 0<x\leqslant 3;\quad S(2);\ S(11).$

525. $f(x)=3x-1,\quad 0<x\leqslant 1;\quad S(0.5);\ S(11.1).$

526. $f(x)=x-2,\quad 0<x\leqslant 2;\quad S(1);\ S(11).$

527. $f(x)=2x-3,\quad 0<x\leqslant 3;\quad S(1);\ S(11).$

28. $f(x)=-\frac{1}{3}x+2,\quad 0<x\leqslant 3;\quad S(2);\ S(11).$

29. $f(x)=\frac{3}{2}x-1,\quad 0<x\leqslant 2;\quad S(1);\ S(11).$

30. $f(x)=1-x,\quad 0<x\leqslant 1;\quad S(0.5);\ S(11.8).$

Содержание

Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов-заочников второго курса (4 семестр)

Ответственный редактор Б.А.Пламеневский.
Редактор Е.Ю.Пономарева.

Заказ 1913 Подписано к печати 30.10.90 г. Объем 3,75 п.л.
Тираж 1500 экз. Бесплатно.

Ротапринт типографии ЛЭИС. 196320, Ленинград, Свободы,31.