**Дискретная математика**

**Вариант I**

**Задание №1.** Упростить выражение.



 $S\_{1}$=$\overline{\overbar{A \overbar{B}}∪AB\overbar{A}\overbar{C}}$ = A$\overline{B}$($\overline{A}∪\overline{B}∪$A$∪$C) = A$\overline{B}$, т,к, по формуле поглощения: $\overline{B}$ ($\overline{B}∪$(A$∪$A$∪$C)=$\overline{B}$, $\overline{A}∪$A=1

$S\_{2}$=$\overline{A∪B∪C(A\C)}$ = $\overline{A∪B∪C∩(\overline{A\overline{C}})}$=$\overline{A∪B∪C}$ $∪$ $\overline{\overline{AC}}$= $\overline{ABC}$ $∪$ A$\overline{C}$= $\overline{C}$($\overline{AB}∪$ *A*)

 **Задание №2.** С помощью диаграмм Эйлера-Венна решите следующие задачи:

1. В ящике лежат 120 деталей, из них на автомате №1 обработаны 82 штуки, на автомате №2 – 23, а на автомате №3 – 42 штуки. 18 деталей было обработаны на автоматах №1 и №2, 17 деталей на автоматах №1 и №3 и 15 – на автоматах №2 и №3. 10 деталей прошли обработку на всех трех автоматах. Сколько деталей не обработано ни на одном из автоматов?

 = $\overline{C}$($\overline{AB}∪$A)=$\overline{C}$($\overline{A}∪A) A∪\overline{B}$)= $\overbar{A }$($A∪\overline{B}$).

 В качестве универсального выберем множество всех деталей . Число его элементов равно 120.Пусть А - множество деталей ,обработанных на 1 автомате ,В – на втором ,С- на третьем .

Число элементов множества А обозначим n(А),оно равно 82. Аналогично ,n(В)=23, n( С)=42.

Построим диаграмму :

$А∩В∩С$- Детали обработанные на всех трех автоматах :n($А∩В∩С)=10$

n(A$∩B) $=18, 18-10=8

n(A$∩C$) =17, 17-10=7

n(В$∩С)$ =15, 15-10=5

n(A)-(10+8+7)=82-25=57

n(B)-(10+8+5)=23-23=0; n(c)-(10+7+5) =42-22=20

Число всех деталей n(A$∪B∪C)$=120 (по условию )

По диограмме : n(A$∪B∪C)$=107

Дополнением к нему является множество необработанных деталей :

n($\overline{A∪B∪C)}$ = 120-107=13

 Ответ :13 деталей .

**Задание №3**. Для следующих высказываний выполнить:

1. Построить истинностные таблицы

а) x$\rightarrow Y∪Z$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  X |  Y |  Z |  Y$∪Z$ | X$\rightarrow Y∪Z$ | $$\overline{X}$$ | $$\overline{X}∪Y∪Z$$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Данная формула задает высказывание, которое истинно на всех наборах значений элементарных высказываний; кроме

$x$=1, $y$=0,$z$=0 ($x$- истинно,$y$ и $z$ -ложно).

2.Преобразовать их к формулам, содержащим только операции: отрицания, конъюнкции и дизъюнкции (максимально простым).



$X\rightarrow Y∪Z=\overline{X}∪Y∪Z$ *(* заменяем импликацию равносильной ей формулой).

$X\rightarrow Y∪Z$и $\overline{X}∪Y∪Z$.

Построим таблицу истинности последней формулы, добавив в первую таблицу значения $\overline{X}$, $\overline{X}∪Y∪Z$.

Замечаем, что стобцы №1 и №2 имеют одинаковый набор значений, следовательно, данные формулы равносильны.

б)$F=(A∪B∪\overline{C)}\leftrightarrow (C\rightarrow \overline{AB)}$

Таблица истинности:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | $$\overline{C}$$ | №1 | AB | $$\overline{AB}$$ | №2 | F | $\overline{A}$B | $\overline{B}$A | $$F^{\*}$$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Данная формула задает высказывание, которое истинно на всех наборах значений элементарных высказываний, кроме двух наборов:

1. А=1,В=1,С=1(все истинны)
2. А=0,В=0,С=1(А,В-ложны, С-истинно).

2.$F=(A∪B∪\overline{C)}\leftrightarrow (C\rightarrow \overline{AB}$)=($\overline{A∪B∪\overline{C}}∪(\overline{C}∪\overline{AB}$))$∩$

$∩((A∪B∪\overline{C}$)$∪\overline{\overline{C}}∪\overline{AB)}$=($\overline{A}∩\overline{B}∩C∪\overline{C}∪\overline{AB)}$(A$∪B∪\overline{C}∪(C∩AB))=(\overline{A}\overbar{B}C∪\overline{C}∪\overline{A}∪\overline{B)}$(A$∪B∪\overline{C}∪ABC)$=$\overline{A}\overbar{B}\overbar{C}A∪\overline{A}\overbar{B}CB∪\overline{A}\overbar{B}$C$\overbar{C}∪\overline{A}\overbar{B}$C$ABC∪\overline{C}$A$∪\overbar{C}$B$∪\overline{C}$C$∪ABC\overbar{C}∪\overline{A}$A$∪\overline{A}$B$∪\overline{A}\overbar{C}∪\overline{A}$ABC$∪$

$\overline{B}$A$∪\overline{B}$B$∪\overline{B}\overbar{C}∪\overline{B}$ABC=$\overline{C}$A$∪\overline{C}$B$∪\overline{A}$B$∪\overline{A}\overbar{C}∪\overline{B}$A$∪\overline{B}\overbar{C}$=$\overline{C}$(A$∪B∪\overline{A}∪\overbar{B)}∪\overline{A}$B$∪A\overbar{B}$=$\overline{C}∪\overline{A}$B$A\overline{B}$.

1. Доказать равносильность данной и полученной формул.

Построим таблицу истинности последней формулы; добавив в первую таблицу нужные столбцы.

Получили, что столбцы $Fи$ $F^{\*}$ имеют одинаковые наборы значений, следовательно, данные формулы равносильны.

**Задание №4.** Составить и упростить логическую функцию по заданной таблице истинности

1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **А** | **В** | **С** | **F** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Найдем основные конъюнкции, исходя из истинных значений данной функции.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | F | Основные конъюнкции  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\overline{А}$\*$\overline{В}$\*$\overline{С}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | А\*$\overline{В}$\*$\overline{С}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | А\*$\overline{В}$\*С |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | А\*В\*С |

Тогда F (ABC) = $\overline{A}$\*$\overline{B}$\*$\overline{C}$ $∪$ A\*$\overline{B}$\*$\overline{C}$ $∪$A\*$\overline{B}$\*C$∪$A\*B\*C

Упростим получинную формулу :

F(ABC) = ($\overline{A}$\*$\overline{B}$\*$\overline{C}∪$ABC)$∪$(A\*$\overline{B}$\*C$∪$A\*B\*C) =$\overline{B}$\*$\overline{C}$($\overline{A}∪A$)$∪$AC($\overline{B}∪B$)=

$\overline{B}$\*$\overline{C}$\*1$∪$ A\*C\*1=$\overline{B}$\*$\overline{C}$ $∪$ A\*C.

 Ответ: $\overline{B}$\*$\overline{C}∪$ A\*C.

**Задание №5.**

1. Заданы следующие высказывания:

S1: Если две прямые совпадают или не имеют общих точек, то они параллельны.

S2: Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они совпадают или не имеют общих точек.

S3: Если две прямые не совпадают и не имеют общих точек, то они параллельны.

Между какими парами высказываний существует отношение следствия? Приведенные высказывания расположить таким образом, чтобы из каждого высказывания следовали все, стоящие после него.

Введем элемертанные высказывания :

А: Две прямые совподают

В: Две прямые не имеют общих точек

С: прямые параллельны

Запишем формулы приведеных высказываний :

$S\_{1}$=A$∪$B$\rightarrow C$,

$S\_{2}$=C$\leftrightarrow A∪B,$

$S\_{3}$=$\overline{A}∩B\rightarrow C.$

Построем таблицы истинности этих высказываний :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | $$S\_{1}$$ | $$S\_{2}$$ | $$S\_{3}$$ | $$S\_{2}\rightarrow S\_{1}$$ | $$S\_{2}\rightarrow S\_{3}$$ | $$S\_{1}\rightarrow S\_{3}$$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из высказывания $S\_{2}$следует $S\_{1}$и $S\_{3}$ Т.к Cтолбцы $S\_{2}\rightarrow S\_{1}$и $S\_{2}\rightarrow S\_{3}$имеют истиностные значения «1» $S\_{2}\rightarrow S\_{1}≡$1, $S\_{2}\rightarrow S\_{3}≡$1.

А также из высказывания $S\_{1}$ следует $S\_{3}$:$S\_{1}$ $\rightarrow S\_{3}≡1.$

Поэтому ,высказывания нужно расположить в таком порядке : $S\_{2}$,$S\_{1}$,$S\_{3}$

**Задание №6.**

Проверить правильность каждого из следующих рассуждений двумя способами: построением соответствующей таблицы и преобразованием формулы.

1. «Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то он является параллелограммом. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делятся в точке пересечения пополам. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Следовательно, его диагонали делятся в точке пересечения пополам».

Состовляем элемертарные высказывания :

А-Противоположные стороны четырехугольника попарно равны

В- четырехугольник является параллелограммом .

С-диагонали четырехугольника делятся пополам в точке пересечения. Используя эти обозначения ,получим формулы :

А$\rightarrow В$ (Первая посылка $P\_{1}$)

B$\leftrightarrow $C (Вторая посылка $P\_{2}$)

A (Третья посылка $P\_{3}$)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C (Заключение Q)Если импликация (А$\rightarrow $В)$∩$(В$\leftrightarrow $С)$∩$А$\rightarrow $С=Р$\rightarrow $Q тождественно истинна, то рассуждение верно. Проверим правильность с помощью истинностной таблицы :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B |  C | A$\leftrightarrow B$ | B$\leftrightarrow C$ | $$P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3}$$ | $$P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3}\rightarrow Q$$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | `1 |

 |

Получили ,что рассуждение верно.

Правильность данного рассуждения можно проверить с помощью преобразования формулы .

S=(A$\rightarrow B)∩\left(B\leftrightarrow C\right)∩A\rightarrow C=A\left(\overbar{A} ∪B\right)∩\left(\overbar{B}∪C\right)\left(B∪\overbar{C}\right)\rightarrow C=\left(A\overbar{A}∪AB\right)∩\left(\overbar{B}∪C\right)\left(B∪\overbar{C}\right)\rightarrow C=AB\left(\overbar{B}∪C\right)\left(B∪\overbar{C}\right)\rightarrow C=\left(AB\overbar{B}∪ABC\right)($B$∪\overbar{C})\rightarrow C=ABC\left(B∪\overbar{C}\right)\rightarrow C=(ABC∪ABC\overbar{C}$)$\rightarrow $C=ABC$\rightarrow C$-истинно.

Следовательно ,данная формула верна .

**Задание №7.** С помощью ДНФ и КНФ (без построения таблицы истинности) установить тип формулы.



Опредилим КНФ для отрицания S:

S=$S\_{1}$\*$S\_{2}$, где $S\_{1}$=($\overline{\overbar{A}\rightarrow BC)}∪\left(B∪\overbar{C}\rightarrow AC\right),$

$S\_{2}$=($\overbar{A}\rightarrow BC)∪$($\overline{B∪\overbar{C}\rightarrow AC})$.

$S\_{1}$=$\left(\overline{\overbar{A}\rightarrow BC}\right)∪\left(B∪\overbar{C}\rightarrow AC\right)=\left(\overline{\overbar{A}∪BC}\right)∪\left(\overline{B∪\overbar{C}}∪AC\right)=(̿∩\overbar{B}∪\overbar{C})∪\overbar{B}∩̿∪AC)=(A\left(\overbar{B}∪\overbar{C}\right)∪\left(\overbar{B}C∪AC\right)=A\overbar{B}∪A\overbar{C}∪\overbar{B}C∪AC\left(A\overbar{B}∪\overbar{B}C\right)∪\left(A\overbar{C}∪AC\right)=\overbar{B}(A∪C)∪A(\overbar{C}∪C)=\overbar{B}(A∪C)∪A=\overbar{B}A∪\overbar{B}C∪A=(\overbar{B}A∪A)∪\overbar{B}C=A∪\overbar{B}C.$

$S\_{2}$=($\overbar{A}\rightarrow BC)∪\left(\overline{B∪\overbar{C}\rightarrow AC}\right)=\left(̿∪BC\right)∪\left(\overline{\overline{B∪\overbar{C}}∪AC}\right)=\left(A∪BC\right)∪\left(\overline{\overbar{B}∩̿∪AC}\right)=\left(A∪BC\right)∪\left(̿∪\overbar{̿}∩\overbar{A}∪\overbar{C}\right)=\left(A∪BC\right)∪\left(B∪\overbar{C}∩\overbar{A}∪\overbar{C}\right)=\left(A∪BC\right)∪\left(B∪\overbar{C}A∪\overbar{C}\right)=\left(A∪BC\right)∪\left(B∪\overbar{C}\right)=\overbar{A}BC∪(\overbar{B}C)$

$S$=$S\_{1}$\*$S\_{2}$ , $\overbar{S}=\overline{S\_{1}\*S\_{2}}=\overbar{S\_{1}}∪\overbar{S\_{2}}=\overline{A∪\overbar{B}C}∪\overline{\overbar{A}BC∪\overbar{B}C}=\left(\overbar{A}\*B∪\overbar{C}\right)∪\left(A\*\overbar{B}\*\overbar{C}∩̿\overbar{C}\right)=\overbar{A}B∪\overbar{C}∪A\overbar{B}\overbar{C}B\overbar{C}=\left[\begin{array}{c}\overbar{C}\*\overbar{C}=\overbar{C},\\\overbar{B}\*B=0\end{array}\right]=\overbar{A}B∪\overbar{C}.$

КНФ для $\overline{S}$ не удовлетворяет условию теоремы 3,следовательно $S$-выполнима ,тоесть $S\ne 0,т.к. \overbar{S}\ne 1.$

Ответ : формула является выполнимой .

**Задание №8**. Упростить схемы:

1.



Функция проводимости задается формулой

$S$=$S\_{1}\*S\_{2}$ ,где

$S\_{1}$=($\overbar{ X}$Y($∪Z))∪X∪\left(Y\overbar{Z}\right)=\left(X\overbar{X}Y∪\overbar{X}YZ\right)∪X∪Y\overbar{Z}=\overbar{X}YZ∪X∪Y\overbar{Z}=X∪\overbar{X}YZ∪Y\overbar{Z}=\left(X∪\overbar{X}\right)\left(X∪Y\right)\left(X∪Z\right)∪Y\overbar{Z}=\left(X∪Y\right)\left(X∪Z\right)∪Y\overbar{Z}=X∪\left(YZ\right)∪Y\overbar{Z}=X∪Y\left(Z∪\overbar{Z}\right)=X∪Y.$

$S\_{2}$*=*X\*($\overbar{Y}∪\overbar{Z})∪Y\*\left(Z∪\overbar{X}\*\overbar{Z}\right)=X\overbar{Y}∪X\overbar{Z}∪YZ∪\overbar{X}Y\overbar{Z}=\left(X\overbar{Y}∪YZ\right)∪\left(X\overbar{Z}∪\overbar{X}Y\overbar{Z}\right)=X∪Z∪\overbar{Z}\left(X∪\overbar{X}Y\right)=X∪Z∪\overbar{Z}Y=X∪Y$

$S$=(X$∪Y)\left(X∪Y\right)=X∪Y.$

Получаем упрощенную схему:



**Задание №9**. Ввести предикаты на соответствующих областях (возможно многоместные) и записать с их помощью высказывания:

Через три различные точки проходит некоторая плоскость.

 P($α,A,B,C)$ - предикат обозначает : через три точки А,В,С проходит плоскость $α$,где А,В,С-принимают значение из множества точек , а $α$ -принимает значения из множества плоскостей Евклидова пространства .

P($α,A,B,C):(∀A,B,C)∃α(A,B,Cϵα)$

**Задание №10.** Решить следующие задачи:

1. Задан G (X,ГX)

X=x1,x2,x3,x4,x5

ГХ: Гx1=x4

Гx2=x1,x4

Гx3=x4,x5

Гx4=x1,x5

Гx5=x1,x3

Определить хроматическое и цикломатическое число данного графа.



Хроматическое число графа :

Y(G)=3, т.к. потребуется минимальное число красок 3,так чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одинаково .

Цикломатическим числом графа называется число $∪=N-n+p$

$N$*=*7- число ребер графа

n=5- число его вершин

p=1-число компонент связности

$∪$=7-5+1=3

**Задание №11**. Вычислите:

1. А36 , С26

$A\_{n}^{m}$=$\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$ - формула размещений ( без повторений )

$А\_{6}^{3}$=$\frac{6!}{\left(6-3\right)!}$= $\frac{6!}{3!}$ = 4\*5\*6=120

$C\_{6}^{2}$ найдем по формуле сочетаний (без повторений ): $С\_{n}^{M}$= $\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$

$C\_{6}^{2}$= $\frac{6!}{2!\left(6-2\right)!}$ = $\frac{6!}{2!4!}$ = $\frac{5\*6}{1\*2}$ =15

Ответ : $А\_{6}^{3}$=120 ; $С\_{6}^{2}$=15.