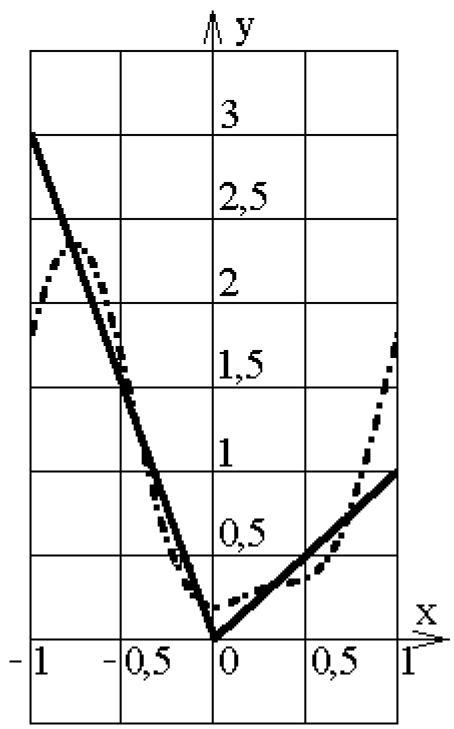
О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

III семестр



Санкт-Петербург

2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

III семестр

Методическое пособие

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2009

О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов Типовые расчеты по высшей математике. Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения. III семестр. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – с.

Пособие содержит типовые расчеты с методическими указаниями по темам

- дифференциальные уравнения первого порядка
- дифференциальные уравнения высших порядков
- системы дифференциальных уравнений
- числовые ряды
- степенные ряды
- тригонометрические ряды Фурье

Пособие адресовано студентам второго курса вечернего отделения СПбГУ ИТМО

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО 2009 года, протокол №.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Введение

Типовые расчеты по математике для студентов второго курса вечернего отделения в третьем семестре содержат 2 типовых расчета по темам

- «Дифференциальные уравнения»
- «Ряды»

Первый типовой расчет включает 26 вариантов по пяти различным разделам, а второй – 26 вариантов по четырем разделам. Перед заданиями помещены методические указания, основные теоретические формулы и разобранные решения наиболее типичных задач.

Рекомендуемые пособия:

1. Кузнецова С.Н. и др. Методические указания к решению задач по теме «Дифференциальные уравнения» для студентов вечернего отделения. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005.
2. Математический анализ III / Под общей редакцией И.Ю. Попова. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2000.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1986.

Типовой расчет по теме «Дифференциальные уравнения»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши для дифференциальных уравнений первого порядка.
II. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
III. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
IV. Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами методом исключения.
V. Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами матричным методом.

Образцы решения задач по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Задача 1. 1) Определите тип дифференциального уравнения первого порядка $x^2 e^y y' = 3x^4 e^y - 6x^4 + e^y - 2$. 2) Найдите общее решение уравнения. 3) Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. 1) Разложим на множители правую часть уравнения и запишем его в нормальной форме: $y' = \dfrac{3x^4 + 1}{x^2} \cdot \dfrac{e^y - 2}{e^y}$. Поскольку правая часть является произведением двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, то это уравнение *с разделяющимися переменными*.

2) Для того, чтобы разделить переменные и записать уравнение в дифференциалах, умножим обе его части на $\dfrac{e^y dx}{(e^y - 2)}$ при $e^y \neq 2$. Получим

$$\frac{e^y dy}{e^y - 2} = \frac{(3x^4 + 1)dx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{e^y dy}{e^y - 2} = \left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрирование дает

$$\int \frac{d(e^y - 2)}{e^y - 2} = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx \Leftrightarrow \ln\left|e^y - 2\right| = x^3 - \frac{1}{x} + \ln|c| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y - 2 = ce^{(x^4 - 1)/x} \Leftrightarrow e^y = ce^{(x^4 - 1)/x} + 2 \Leftrightarrow y = \ln\left(ce^{(x^4 - 1)/x} + 2\right).$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = \ln\left(ce^{(x^4 - 1)/x} + 2\right)$. Решение, получаемое из условия $e^y \neq 2 \Leftrightarrow y = \ln 2$, входит в общее решение при $c = 0$.

3) Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. Подставив в общее решение $x = 1$ и $y = 0$, будем иметь $\ln(ce^0 + 2) = 0 \Leftrightarrow c + 2 = 1 \Leftrightarrow c = -1$. Подставив найденное значение произвольной постоянной в общее решение, получим частное решение $y = \ln\left(2 - e^{(x^4 - 1)/x}\right)$.

Ответ: 1) уравнение с разделяющимися переменными,

2) $y = \ln\left(ce^{(x^4 - 1)/x} + 2\right)$, 3) $y = \ln\left(2 - e^{(x^4 - 1)/x}\right)$.

Задача 2. 1) Определите тип дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' = xy + y^2 - x^2$. 2) Найдите общее решение уравнения. 3) Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. 1) Запишем уравнение в нормальной форме $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} - 1$. Поскольку правая часть представляет собой функцию вида $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, уравнение является *однородным*.

2) Введем новую неизвестную функцию $u(x)$ по формуле $y = u \cdot x$, $y' = u'x + u$. Уравнение примет вид $u'x + u = u + u^2 - 1 \Leftrightarrow u' = \dfrac{u^2 - 1}{x}$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные при $u \neq \pm 1$ и проинтегрируем полученное уравнение, записав его в дифференциалах.

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|c| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u-1}{u+1} = cx^2 \Leftrightarrow u(1 - cx^2) = cx^2 + 1 \Leftrightarrow u = \frac{cx^2 + 1}{1 - cx^2}.$$

Вернувшись к исходной переменной, получим общее решение дифференциального уравнения $y = \dfrac{x(cx^2 + 1)}{1 - cx^2}$. Заметим, что решение $y = x$, найденное из условия $u = 1$, получается из общего решения при $c = 0$, а решение $y = -\ x$, найденное из условия $u = -\ 1$, получается из общего решения при $c \to \infty$. Таким образом, решения $y = \pm x$ входят в общее решение

3) Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 0$, подставим в общее решение $x = 1$ и $y = 0$ и найдем значение произвольной постоянной: $\dfrac{c+1}{1-c} = 0 \Leftrightarrow c = -1$. Подставив найденное значение в общее решение, получим частное решение $y = \dfrac{x(1 - x^2)}{x^2 + 1}$.

Ответ: 1) однородное уравнение, 2) $y = \dfrac{x(cx^2 + 1)}{1 - cx^2}$, 3) $y = \dfrac{x(1 - x^2)}{x^2 + 1}$.

Задача 3. 1) Определите тип дифференциального уравнения первого порядка $y'x\ln x - y = \sqrt{x}\ln^2 x$. 2) Найдите общее решение уравнения. 3) Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(e^2) = 2e$.

Решение. 1) Разделив обе части уравнения на $x\ln x$ при $x > 0, x \neq 1$, получим $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ – *линейное неоднородное уравнение.*

2) Будем решать уравнение методом *вариации произвольной постоянной*. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{d(\ln x)}{\ln x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|\ln x| + \ln|c| \Leftrightarrow y = c\ln x.$$

В полученном общем решении будем считать, что $c = c(x)$, $y = c(x)\ln x$. подберем функцию $c(x)$ так, чтобы решение $y = c(x)\ln x$ (1) удовлетворяло исходному неоднородному уравнению. Найдем производную $y' = c'(x)\ln x + \dfrac{c(x)}{x}$ (2) и подставим выражения (1) и (2) в уравнение. Получим $c'(x)\ln x + \dfrac{c(x)}{x} - \dfrac{c(x)\ln x}{x\ln x} = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, откуда следует, что $c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Значит, $c(x) = 2\sqrt{x} + c$. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = (2\sqrt{x} + c)\ln x$.

3) Для нахождения частного решения подставим в последнюю формулу $x = e^2$ и $y = 2e$. Получим $2e = 2(2e + c)$, откуда следует, что $c = -e$. Подставив найденное значение в общее решение, получим частное решение $y = (2\sqrt{x} - e)\ln x$.

Ответ: 1) линейное неоднородное уравнение, 2) $y = (2\sqrt{x} + c)\ln x$, 3) $y = (2\sqrt{x} - e)\ln x$.

Образцы решения задач по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка»

Задача 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy''' - 2 = xe^{0,5x}$, понизив его порядок.

$u'v+uv'-\dfrac{uv}{x}=-\dfrac{2}{x^2}$. Сгруппируем второе и третье слагаемые и подберем функцию $v(x)$ так, чтобы их сумма равнялась нулю:

$u'v+\left(uv'-\dfrac{uv}{x}\right)=-\dfrac{2}{x^2}$ (2); $uv'-\dfrac{uv}{x}=0$; $v'=\dfrac{v}{x}$; $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x}$; $\ln|v|=\ln|x|+c$.

Выбрав $c=0$, получим $v=x$. Обратившись к уравнению (2), найдем $u(x)$:

$$u'x=-\frac{2}{x^2};\ u'=-\frac{2}{x^3};\ u=\frac{1}{x^2}+c.$$

Тогда общее решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$z=u(x)v(x)=\left(\frac{1}{x^2}+c\right)x=\frac{1}{x}+cx.$$

Вернемся к исходной переменной: $y''=\dfrac{1}{x}+cx$. Найдем общее решение полученного уравнения последовательным интегрированием:

$y'=\ln|x|+c\dfrac{x^2}{2}+\tilde{c}_2$; $y=x\ln|x|-x+c\dfrac{x^3}{6}+\tilde{c}_2x+c_3=x\ln|x|+c_1x^3+c_2x+c_3$,

где $c_1=\dfrac{c}{6}$, $c_2=\tilde{c}_2-1$. Интеграл $\int\ln|x|dx$ найден с помощью формулы интегрирования по частям.

Ответ: $y=x\ln|x|+c_1x^3+c_2x+c_3$.

Задача 6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y(y^2+1)y''=(y^2-1)(y')^2$, понизив его порядок.

Решение. Уравнение не содержит в явной форме независимой переменной x. Поэтому в качестве новой независимой переменной выберем y, в качестве новой неизвестной функции $z(y)$ возьмем y':

$y'=z(y)$. Тогда $y''=\big(z(y)\big)'_x=z'_y\cdot y'_x=z'z$, а уравнение примет вид:

$$y(y^2+1)z'z=(y^2-1)z^2\Rightarrow y(y^2+1)z'=(y^2-1)z\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{(y^2-1)dy}{y(y^2+1)}.$$

Представим дробь $\dfrac{y^2-1}{y(y^2+1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$\dfrac{y^2-1}{y(y^2+1)}=\dfrac{A}{y}+\dfrac{By+C}{y^2+1}$ и воспользуемся, как и раньше, методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{y^2-1}{y(y^2+1)}=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{y^2+1}=\frac{Ay^2+A+By^2+Cy}{y(y^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}.$$

В результате получим

$$\int\frac{dz}{z}=\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{2y}{y^2+1}\right)dy \Rightarrow \ln|z|=-\ln|y|+\ln\left|y^2+1\right|+\ln|c| \Rightarrow z=\frac{c(y^2+1)}{y}.$$

Вернемся к исходной переменной: $y'=\dfrac{c(y^2+1)}{y}$. Разделим переменные в полученном уравнении:

$$\frac{ydy}{y^2+1}=cdx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=cx+\frac{c_2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=\frac{c_1}{2}x+\frac{c_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|y^2+1\right|=c_1x+c_2,\text{ где } c_1=2c.$$

Получили общий интеграл исходного уравнения. Чтобы получить общее решение, разрешим его относительно y:

$$y^2=e^{c_1x+c_2}-1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{e^{c_1x+c_2}-1}.$$

В процессе разделения переменных потеряно решение $z(y)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=c$, которое не может быть получено из общего ни при каких значениях произвольных постоянных.

Ответ: $y=\pm\sqrt{e^{c_1x+c_2}-1}$, $y=c$.

Образцы решения задач по теме «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

где $y=y(x)$ – искомая функция, $y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)}$ – ее производные до n-го порядка включительно, $f(x)$ – заданная функция.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Общее решение линейного неоднородного уравнения задается формулой $y=y_0+\tilde{y}$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Общее решение y_0 представляет собой линейную комбинацию функций, образующих фундаментальную систему решений (ФСР). В предлагаемых расчетных заданиях частное решение $\tilde{y}$ составляется по виду функции $f(x)$, стоящей в правой части, и ищется методом неопределенных коэффициентов.

Задача 7. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

Решение. 1) Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Корни – действительные, различные числа. Им соответствуют функции, образующие ФСР (см. приложение): $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение однородного уравнения – их линейная комбинация:

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

2) Найдем частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Правая часть уравнения может быть записана в форме $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n от x (см. приложение). В нашем случае степень многочлена равна n = 2, а множитель в показателе степени показательной функции равен a = 3. Поскольку число a = 3 не является корнем характеристического уравнения, частное решение будем искать в виде $\tilde{y} = Q_n(x)e^{ax}$, где a = 3, $Q_n(x) = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен второй степени от x с неопределенными коэффициентами A, B, C.

Выпишем частное решение и найдем его первую и вторую производные:

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x};$$

$$\tilde{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} = (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C)e^{3x};$$

$$\tilde{y}'' = (6Ax + 2A + 3B)e^{3x} + 3(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C)e^{3x} =$$

$$= (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B + 9C)e^{3x}.$$

Подставим полученные выражения в исходное неоднородное уравнение и разделим обе его части на $e^{3x} \neq 0$:

$$\underbrace{9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B + 9C}_{y''/e^{3x}} -$$

$$\underbrace{-9Ax^2 - (6A + 9B)x - 3B - 9C}_{-3y'/e^{3x}} +$$

$$+\underbrace{2Ax^2 + 2Bx + 2C}_{2y/e^{3x}} = x^2 + x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим полученную систему:

$$\begin{cases} 9A-9A+2A=1 \\ 12A+9B-6A-9B+2B=1 \\ 2A+6B+9C-3B-9C+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0,5 \\ B=1 \\ C=-2 \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид: $\tilde{y}=(0,5x^2+x-2)e^{3x}$.

3) Составим общее решение исходного неоднородного уравнения :

$y=y_0+\tilde{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}+(0,5x^2+x-2)e^{3x}$.

Ответ: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+(0,5x^2+x-2)e^{3x}$.

Задача 8. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$y'''-2y''+y'-2y=20\cos x-15e^{2x}$.

Решение. 1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'''-2y''+y'-2y=0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$ и найдем его корни:

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=2 \\ \lambda^2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=2 \\ \lambda=\pm i \end{array}\right. .$$

Фундаментальная система решений, соответствующих полученным корням, имеет вид $y_1= e^{2x}$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ (см. приложение). Общее решение однородного уравнения равно линейной комбинации этих функций: $y_0=c_1e^{2x}+c_2\cos x+c_3\sin x$.

2) Используя принцип наложения, будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде суммы двух слагаемых $\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$. Первое слагаемое $\tilde{y}_1$ является частным решением уравнения $y'''-2y''+y'-2y=20\cos x$, а второе $\tilde{y}_2$ – уравнения $y'''-2y''+y'-2y=-15e^{2x}$.

Рассмотрим первое уравнение $y'''-2y''+y'-2y=20\cos x$. Его правую часть можно представить в виде $f_1(x)=e^{ax}(P\cos bx+Q\sin bx)$, где $a = 0$, $b= 1$, $P = 20$, $Q = 0$. Составим комплексное число $a + bi$ и проверим, является ли оно корнем характеристического уравнения. В нашем случае $a + bi = i$; это число является однократным корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищется в виде $\tilde{y}_1=(A\cos x+B\sin x)x$, где A и B – неопределенные коэффициенты.

Рассмотрим второе уравнение $y'''-2y''+y'-2y=-15e^{2x}$. Его правую часть можно представить в виде $f_2(x)=P_n(x)e^{ax}$, где $n = 0$, $P_0(x) = -15$, $a =$ $= 2$. Число $a = 2$ является однократным корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищется в виде $\tilde{y}_2 = Me^{2x}x$, где M – неопределенный коэффициент.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (A\cos x + B\sin x)x + Me^{2x}x$. Для нахождения неизвестных коэффициентов найдем первую, вторую и третью производные частного решения:

$\tilde{y}' = (-A\sin x + B\cos x)x + A\cos x + B\sin x + Me^{2x}(2x+1)$;

$\tilde{y}'' = (-A\cos x - B\sin x)x - 2A\sin x + 2B\cos x + Me^{2x}(4x+4)$;

$\tilde{y}''' = (A\sin x - B\cos x)x - 3B\sin x - 3A\cos x + Me^{2x}(8x+12)$. Подставим в найденные выражения в исходное уравнение.

$$\underbrace{(A\sin x - B\cos x)x - 3A\cos x - 3B\sin x + Me^{2x}(8x+12)}_{y'''} -$$

$$\underbrace{-2(-A\cos x - B\sin x)x + 4A\sin x - 4B\cos x - 2Me^{2x}(4x+4)}_{-2y''} +$$

$$+ \underbrace{(-A\sin x + B\cos x)x + A\cos x + B\sin x + Me^{2x}(2x+1)}_{y'} -$$

$$\underbrace{-2(A\cos x + B\sin x)x - 2Me^{2x}x}_{-2y} = 20\cos x - 15e^{2x};$$

$$(A + 2B - A - 2B)x\sin x + (-B + 2A + B - 2A)x\cos x +$$
$$+(-3B + 4A + B)\sin x + (-3A - 4B + A)\cos x +$$
$$+ Me^{2x}(8x + 12 - 8x - 8 + 2x + 1 - 2x) = 20\cos x - 15e^{2x}.$$

Приведя подобные члены, окончательно получим

$$(4A - 2B)\sin x + (-2A - 4B)\cos x + 5Me^{2x} = 20\cos x - 15e^{2x}.$$

Приравняв коэффициенты при $\sin x$, $\cos x$ и e^{2x}, получим систему уравнений относительно A, B и M:

$$\begin{cases} 4A - 2B = 0 \\ -2A - 4B = 20 \\ 5M = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2A \\ -10A = 20 \\ M = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -4 \\ M = -3 \end{cases}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$\tilde{y} = -2x\cos x - 4x\sin x - 3xe^{2x}.$$

3) Составим общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x - 2x\cos x - 4x\sin x - 3xe^{2x}.$$

Ответ: $y = c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x - 2x\cos x - 4x\sin x - 3xe^{2x}$.

Задача 8. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y^{(4)}+2y'''=240(x^3+x^2)$.

Решение. 1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{(4)}+2y'''=0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^4+2\lambda^3=0$ и найдем его корни: $\lambda^3(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda^3=0 \\ \lambda+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda=-2 \end{array}\right.$.

Первый корень имеет кратность k = 3, второй корень – однократный. Первому корню соответствуют 3 решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, второму корню – одно решение $y_4 = e^{-2x}$. Полученные решения образуют ФСР, поэтому общее решение однородного уравнения представляет собой их линейную комбинацию: $y_0=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-2x}$.

2) Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть представляет собой функцию $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, где n = 3, a = 0. Число a = 0 является корнем характеристического уравнения кратности k = 3, поэтому частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y}=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{0x}x^3=Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3,$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты. Найдем производные частного решения:

$$\tilde{y}'=6Ax^5+5Bx^4+4Cx^3+3Dx^2; \quad \tilde{y}''=30Ax^4+20Bx^3+12Cx^2+6Dx;$$

$$\tilde{y}'''=120Ax^3+60Bx^2+24Cx+6D; \quad \tilde{y}^{(4)}=360Ax^2+120Bx+24C.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получим

$$\underbrace{(360Ax^2+120Bx+24C)}_{y^{(4)}}+\underbrace{2(120Ax^3+60Bx^2+24Cx+6D)}_{2y'''}=240x^3+240x^2;$$

$$240Ax^3+(360A+120B)x^2+(120B+48C)x+24C+12D=240x^3+240x^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} 240A=240 \\ 360A+120B=240 \\ 120B+48C=0 \\ 24C+12D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2{,}5 \\ D=-5 \end{cases}.$$

Частное решение имеет вид $\tilde{y}=x^6-x^5+2{,}5x^4-5x^3$.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения:

$$y=y_0+\tilde{y}=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-2x}+x^6-x^5+2{,}5x^4-5x^3.$$

Ответ: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-2x}+x^6-x^5+2{,}5x^4-5x^3$.

Образцы решения задач по теме «Системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами»

Система двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид:

$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$, где $x = x(t), y = y(t)$ – неизвестные функции аргумента t, $x' = x'(t),\ y' = y'(t)$ – производные этих функций, a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2) – постоянные коэффициенты.

Данную систему можно записать в матричной форме $X' = AX$, где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ X' = X'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Задача 9. Найдите общее решение системы $\begin{cases} x' = 2x - 5y \ \ (1) \\ y' = 5x - 6y \ \ (2) \end{cases}$ методом исключения.

Решение. Продифференцируем уравнение (1) по t: $x'' = 2x' - 5y'$. Заменим y' правой частью уравнения (2): $x'' = 2x' - 5(5x - 6y)\ \ (3)$. Выразим y из уравнения (1): $y = \dfrac{2x - x'}{5}\ \ (4)$. Подставим полученное выражение в уравнение (3): $x'' = 2x' - 5\left(5x - \dfrac{6}{5}(2x - x')\right) \Leftrightarrow x'' + 4x' + 13x = 0\ \ (5)$.

Для линейного однородного уравнения второго порядка (5) составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Найдем его дискриминант и корни: $D = 16 - 52 = -36,\quad \lambda = \dfrac{-4 \pm 6i}{2}$. Корни характеристического уравнения – комплексно сопряженные числа $\lambda_1 = -2 + 3i,\ \lambda_2 = -2 - 3i$. Им соответствуют ФСР уравнения (5): $x_1 = e^{-2t}\cos 3t,\quad x_2 = e^{-2t}\sin 3t$. Общее решение уравнения (5) – линейная комбинация найденных решений:

$$x(t) = e^{-2t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)$$

Продифференцируем $x(t)$ по t:

$$x'(t) = -2e^{-2t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) + e^{-2t}(-3c_1\sin 3t + 3c_2\cos 3t) =$$
$$= e^{-2t}\big((-2c_1 + 3c_2)\cos 3t + (-2c_2 - 3c_1)\sin 3t\big).$$

Подставив $x(t)$ и $x'(t)$ в (4), найдем функцию $y(t)$:

$$y(t)=\frac{e^{-2t}}{5}\left(2c_1\cos 3t+2c_2\sin 3t-(-2c_1+3c_2)\cos 3t-(-2c_2-3c_1)\sin 3t\right).$$

Окончательно получим $y(t)=e^{-2t}\left(\frac{4c_1-3c_2}{5}\cos 3t+\frac{3c_1+4c_2}{5}\sin 3t\right).$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t) \\ y(t)=e^{-2t}\left(\frac{4c_1-3c_2}{5}\cos 3t+\frac{3c_1+4c_2}{5}\sin 3t\right) \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t) \\ y(t)=e^{-2t}\left(\frac{4c_1-3c_2}{5}\cos 3t+\frac{3c_1+4c_2}{5}\sin 3t\right) \end{cases}.$

Задача 10. Найдите общее решение системы $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-2x+4y \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Введем матрицы $X=X(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X'=X'(t)=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда система примет вид $X'=AX$ (1). Будем искать решение матричного уравнения (1) в виде $X=He^{\lambda t}$ (2), где $H=\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ – неизвестный вектор (одностолбцовая матрица), λ – неизвестное число. Продифференцировав (2) по t, и подставив в (1), получим $\lambda He^{\lambda t}=AHe^{\lambda t}\Leftrightarrow AH=\lambda H$, т.е. задача свелась к нахождению собственных чисел и собственных векторов матрицы A. Из последнего уравнения следует, что $(A-\lambda E)H=0$ (3), где E – единичная матрица. Матричное уравнение (3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A-\lambda E)=0$, т.е. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$. Найдем собственные числа матрицы A, решив полученное характеристическое уравнение:

$$4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2=0\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0\Leftrightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3.$$

Найдем ненулевые собственные векторы матрицы A, соответствующие каждому собственному числу.

1) Пусть $\lambda = \lambda_1 = 2$. Тогда $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Уравнение (3) примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -g + h = 0 \\ -2g + 2h = 0 \end{cases}$, откуда следует, что $g = h$. Пусть $g = h = 1$, тогда $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставив найденные λ_1 и H_1 в (2), получим решение исходной системы, соответствующее собственному числу $\lambda_1 = 2$: $X_1(t) = H_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

2) Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$. Тогда $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Уравнение (3) примет вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2g + h = 0 \\ -2g + h = 0 \end{cases}$, откуда следует, что $h = 2g$. Пусть $g = 1$, тогда $h = 2$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Подставив найденные λ_2 и H_2 в (2), получим решение исходной системы, соответствующее собственному числу $\lambda_2 = 3$: $X_2(t) = H_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Общее решение системы представляет собой линейную комбинацию найденных решений. Запишем общее решение в матричной форме:

$$X(t) = c_1 H_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 H_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Общее решение в координатной форме имеет вид: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{cases}$.

Расчетные задания

I. 1) Определите тип дифференциального уравнения первого порядка.

2) Найдите общее решение дифференциального уравнения.

3) Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

1. $2xyy'(x+1)-1=0, \quad y(1)=-1.$
2. $2y'x^2=(x+y)^2, \quad y(1)=1.$
3. $y'+2xy=e^{-x^2}, \quad y(0)=-1.$
4. $y'=e^{x-y}(x+1), \quad y(1)=1.$
5. $xy'=y+\sqrt{xy}, \quad y(e)=e.$
6. $\left(y'x-y\right)\cos^2 x=x^2, y(\pi/4)=0.$
7. $e^y(x^2+2)y'=2x(e^y+1), y(0)=0.$
8. $2xyy'=y^2-x^2, \quad y(1)=1.$
9. $y'+x^{-2}y=e^{1/x}, \quad y(-1)=0.$
10. $x^2y'=y^2e^{-1/y}, \quad y(-1)=1/2.$
11. $xy'=y-xe^{y/x}, \quad y(1)=0.$
12. $(y'-y)(x^2+1)=e^x, \quad y(1)=0.$
13. $y'e^y=(e^y+1)\mathrm{tg}x, \quad y(\pi/3)=0.$
14. $x^2y'=2xy+y^2, \quad y(-1)=2.$
15. $xy'-2y=x^3\cos x, \quad y(\pi/6)=0.$
16. $y'e^{1/y}(x^2+1)=-2xy^2, y(0)=1.$
17. $x^2y'=y^2-xy+x^2, \quad y(1)=0.$
18. $(x^2+1)(y'-y)=2xe^x, y(0)=0.$
19. $2yy'(1+e^x)=e^{2x}, \quad y(0)=1.$
20. $x^2y'=y^2+xy+x^2, \quad y(1)=0.$
21. $x(y'-y)=(x+1)e^x, \quad y(1)=e.$
22. $2xyy'=x^2+3y^2, \quad y(1)=1.$
23. $3y^2y'(x+1)^2=\sqrt{1-y^6}, y(0)=0.$
24. $xy'-y=\dfrac{2x(x+1)}{x+2}, \quad y(-1)=0.$
25. $y'=2x\left(\dfrac{y^2+1}{x^2+1}\right)^2, \quad y(0)=1.$
26. $y'=\dfrac{2xy+y^2-x^2}{2x^2}, \quad y(-1)=0.$

II. Найдите общее решение дифференциального уравнения, понизив его порядок

1. $y'''x-y''=x^2e^x.$
2. $y'''(1+x^2)^2+2x=0.$
3. $2xy'y''=x^2+3(y')^2.$
4. $y''x+y'=x^2\ln x.$
5. $x^2y'''+1=0.$
6. $x^2y''=2xy'+(y')^2.$
7. $xy'''+y''=9x^2.$
8. $2y''\sqrt{x}=\ln x+2.$
9. $2x^2y''=2xy'+(y')^2-x^2.$
10. $xy'''-2y''=4x(x^2-1).$

11. $2(y')^2 = y''(y-1)$.

12. $y'' + (y')^2 = y'$.

13. $xy''' - y'' = x\cos x$.

14. $y''(y^2+1) = 2y(y')^2$.

15. $y'' - 2(y')^2 \operatorname{ctg} y = 0$.

16. $xy''' - y'' = x\sin x$.

17. $yy'' = (y')^2 + 2y'$.

18. $y''(e^x+1) - y'(e^x+2) = 0$.

19. $y'''(x+1) = x+2$.

20. $y'''x\ln x = y''$.

21. $2y(y')^2 = y''(y^2-1)$.

22. $y''' - 2e^x = xe^x$.

23. $y''(e^x+1) + (y')^2 = 0$.

24. $y'' + 2(y')^2 \operatorname{tg} y = 0$.

25. $y'''(x^2+1) + 2xy'' = 0$.

26. $y'''(x^2+5x+6) + y'' = 0$.

III. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения методом неопределенных коэффициентов

1. $y'' + y = 2(\cos x - \sin x) + 10e^{2x}$.
2. $y'' - y' - 2y = e^x(8-4x) + 6e^{-x}$.
3. $y''' - y'' + y' - y = 12e^x + 20e^{-x}$.
4. $y''' + 4y' = 9\sin x + 16e^{-2x}$.
5. $y'' - 4y' + 8y = (4x-8)e^{2x} + 20\sin 2x$.
6. $y''' - 2y'' + 2y' = 8x + 15e^{-x}$.
7. $y'' + 4y = 4\sin 2x + 24e^{2x}$.
8. $y''' - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} - 16x$.
9. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6e^x + 10\cos x$.
10. $y'' - 4y' + 3y = 10\cos x + (8x-2)e^x$.
11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 30e^x + x^3$.
12. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 12e^{2x} + 20e^{-x}$.
13. $y'' - 4y' + 4y = (6x-3)e^{2x} + 9e^{-x}$.
14. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 18e^{2x} - 10e^{-2x}$.
15. $y''' + y' = 10e^x \sin x + 6x$.
16. $y'' - 2y' = 8(\sin 2x + \cos 2x) + 12x^2$.
17. $y''' - 4y'' + 5y' = 5x - (4x+2)e^x$.
18. $y''' - 2y'' = 10e^{2x} + 6x - 19$.
19. $y'' - 5y' + 4y = 4xe^{4x} + 8\sin x - 2\cos x$.

20. $y'' - y = 12e^{x} - 52\sin 5x.$

21. $y^{IV} - y'' - 2y = (6x-5)e^{-x}.$

22. $y'' + 4y' + 5y = 19\sin 2x + 22\cos 2x + 34e^{-x}.$

23. $y^{IV} - 16y = 32x^{4} + 65e^{3x}.$

24. $y''' - 4y' = 40e^{2x} + 60x^{2}.$

25. $y'' + 6y' + 13y = (8x+6)e^{-3x} + 75\cos 2x.$

26. $y'' - 9y = 30e^{3x} + 2e^{x}(\sin x + \cos x).$

IV. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения

1. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = -x + 6y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 6x - 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -9x + 5y \\ y' = -5x + y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 6x - 5y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x + y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -4x - y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 2x + 6y \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x' = x + 9y \\ y' = -x + y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 5x - 9y \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$

V. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений матричным методом

1. $\begin{cases} x' = -2x - 12y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = 2x - 12y \\ y' = -x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 7x + 8y \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = -2x + 6y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = 5x - 18y \\ y' = 2x - 8y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -x + 9y \\ y' = 2x - 8y \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 5x - 15y \\ y' = 2x - 8y \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x - 7y \\ y' = -3x + 6y \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = 4x - 6y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = -2x + 7y \\ y' = 3x - 6y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x + 7y \\ y' = 2x + 6y \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -8x - 15y \\ y' = 7x + 14y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 8x - 24y \\ y' = 2x - 8y \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -4x - 9y \\ y' = 5x + 10y \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = x + 9y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x' = 2x - 12y \\ y' = 2x - 8y \end{cases}$

Типовой расчет по теме «Ряды»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Числовые ряды.
II. Степенные ряды.
III. Разложение функций в степенные ряды.
IV. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье.

Образцы решения задач по теме «Числовые ряды»

1. Положительные ряды

Задача 1. Исследуйте числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{4^{n+4}+n^4}$.

Решение. Найдем предел общего члена данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+4}+n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n\left(4^4+\dfrac{n^4}{4^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^4+\dfrac{n^4}{4^n}}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\neq 0.$$

Предел общего члена отличен от нуля, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости (необходимый признак), следовательно, ряд расходится. При нахождении предела было использовано, что $\dfrac{n^4}{4^n}\underset{n\to\infty}{\to}0$. Это следует из предела $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{4^x}=0$, который легко выводится с помощью правила Лопиталя.

Ответ: ряд расходится.

Задача 2. Исследуйте числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n}{n\sqrt[3]{n^2}}$.

Решение. Применим первый признак сравнения. Для сравнения используем обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/3}}$, который сходится, т. к. показатель степени p в знаменателе удовлетворяет неравенству $p = 5/3 > 1$. Сравним общий член исходного ряда с общим членом ряда, подобранного для сравнения:

$$0<\cos^2 n<1 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{\cos^2 n}{n\sqrt[3]{n^2}}<\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2}}.$$

Согласно первому признаку сравнения, из сходимости положительного ряда с большим общим членом следует сходимость положительного ряда с меньшим общим членом. Значит, исследуемый ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача 3. Исследуйте числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$.

Решение. Применим второй признак сравнения. Для сравнения выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$, который является сходящимся геометрическим рядом, т. к. $q=\frac{2}{3}<1$. Предел отношения общих членов двух положительных рядов $\ln\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$ и $\frac{2^n}{3^n}$ равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n/3^n}{2^n/3^n} = 1$. При нахождении предела была использована эквивалентность бесконечно малых последовательностей $\ln\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$ и $\frac{2^n}{3^n}$ при $n\to\infty$.

Таким образом, предел отношения общих членов двух положительных рядов конечен и не равен нулю. Значит, согласно второму признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$ ведет себя так же как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$, т. е. сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача 4. Исследуйте числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Для этого найдем предел отношения члена ряда с номером n + 1, т. е. $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!}$, к члену ряда с номером n, т. е. $a_n = \frac{n^n}{5^n n!}$. Этот предел равен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} 5^n n!}{5^{n+1}(n+1)!n^n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{n^n (n+1)n!} =$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{5}<1.$$

При нахождении предела был использован замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\approx 2,7183.$$

Предел отношения $n+1$-го члена положительного ряда к его n-му члену меньше единицы, следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Ответ: ряд сходится.

Задача 5. Исследуйте числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n}n^{10}}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, применим признак Даламбера. Для этого найдем предел отношения $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}(n+1)^{10}}$ к $a_{n}=\frac{n!}{10^{n}n^{10}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!10^{n}n^{10}}{10^{n+1}(n+1)^{10}n!}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{10}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задача 6. Исследуйте числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}}{e^{2n}+1}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Для этого введем функцию $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$, удовлетворяющую условиям интегрального признака, и исследуем несобственный интеграл от этой функции:

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{de^{x}}{(e^{x})^{2}+1}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}e^{x}\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}e^{b}-\operatorname{arctg}e)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}e.$$

Несобственный интеграл сходится, значит, по интегральному признаку Коши сходится исследуемый ряд.

Ответ: ряд сходится.

2. Знакопеременные ряды

Задача 7. Исследуйте числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, поэтому применим признак Лейбница: а) последовательность абсолютных величин членов данного ряда $\left\{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right\}$ является убывающей, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=0$. По признаку Лейбница ряд сходится.

Исследуем характер сходимости. Для этого рассмотрим положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, к которому применим второй признак сравнения. Для сравнения выберем обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$, который расходится, т. к. p = 1/2 < 1. Найдем предел отношения общих членов данных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2-1/n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку предел конечен и отличен от нуля, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, расходится. Значит, сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$ сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

Задача 8. Исследуйте числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

Решение. Данный ряд является знакопеременным, но не является знакочередующимся. Обозначим $b_n=\frac{\sin n}{2^n}$. Для исследования ряда применим признак абсолютной сходимости. Подберем такой сходящийся положительный ряд с общим членом a_n , чтобы выполнялось условие $|b_n| < a_n$.

В качестве такого ряда можно взять сходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Общие члены двух данных рядов удовлетворяют условию $\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|<\frac{1}{2^n}$.

Значит, из сходимости положительного ряда следует абсолютная сходимость знакопеременного ряда.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Образцы решения задач по теме «Степенные ряды»

Задача 9. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}(n+1)}$.

Решение. Согласно обобщенному признаку Даламбера, интервал сходимости находится из условия $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$, где $u_n(x)$ – общий член ряда. В нашем случае $u_n(x)=\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}(n+1)}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}(n+2)}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}3^n\sqrt{n}(n+1)}{3^{n+1}\sqrt{n+1}(n+2)(x+1)^n}\right|=$$

$$=\frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{|x+1|}{3}.$$

Составим и решим неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$:

$$\frac{|x+1|}{3}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x+1|<3 \quad\Leftrightarrow\quad -3<x+1<3 \quad\Leftrightarrow\quad -4<x<2.$$

Таким образом, интервал абсолютной сходимости степенного ряда представляет собой промежуток (– 4; 2). Исследуем поведение ряда в граничных точках промежутка.

1) При $x = 2$ получим положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$, для которого используем второй признак сравнения, выбрав для сравнения сходящийся обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1.$$

Согласно второму признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, т. е. сходится.

2) При $x = -4$ получим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n+1)}$, который сходится абсолютно, т. к. согласно п. 1), сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.

Таким образом, в граничных точках ряд сходится, причем в точке $x = -4$ сходится абсолютно.

Ответ: область абсолютной сходимости ряда – отрезок [– 4; 2].

Задача 10. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}\ln n}{4^n\sqrt{n(n-1)}}$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{2n+2}\ln(n+1)4^n\sqrt{n(n-1)}}{4^{n+1}\sqrt{n(n+1)}(x-2)^{2n}\ln n}\right|=$$

$$=\frac{(x-2)^2}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right|=\frac{(x-2)^2}{4}.$$

Составим и решим неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$:

$$\frac{(x-2)^2}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|x-2|}{2}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-2|<2 \quad\Leftrightarrow\quad -2<x-2<2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 0<x<4.$$

В граничных точках $x = 0$ и $x = 4$ получим положительный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}\ln n}{4^n\sqrt{n(n-1)}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n(n-1)}}$. Для получения оценки общего члена данного ряда рассмотрим неравенства:

$$\begin{cases} \ln n > 1 \\ \sqrt{n(n-1)} < n \end{cases} \text{при } n > 3 \quad \Rightarrow \frac{\ln n}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n} \text{ при } n > 3.$$ Значит, при $n > 3$ каждый член положительного ряда больше соответствующего члена гармонического ряда, который расходится. По первому признаку сравнения в граничных точках $x = 0$ и $x = 4$ исследуемый степенной ряд расходится, т. е. область его абсолютной сходимости – интервал (0; 4).

Ответ: область абсолютной сходимости ряда – интервал (0; 4).

Образцы решения задач по теме «Разложение функций в степенные ряды»

Задача 11. Разложите функцию $f(x) = 5^{-x^3}$ в степенной ряд, используя стандартные разложения. Найдите область сходимости полученного ряда.

Решение. Запишем функцию в виде $f(x) = e^{-x^3 \ln 5}$ и используем разложение в степенной ряд показательной функции $f(x) = e^x$ (см. приложение):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3 \ln 5)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n} \ln^n 5}{n!}.$$

Поскольку степенной ряд для функции $f(x) = e^x$ сходится при любых значениях аргумента, область абсолютной сходимости полученного степенного ряда – множество всех действительных чисел, т. е. $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $5^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n} \ln^n 5}{n!}$; $(-\infty; +\infty)$.

Задача 12. Разложите функцию $f(x) = \frac{6x}{36 + x^2}$ в степенной ряд, используя стандартные разложения. Найдите область сходимости полученного ряда.

Решение. Запишем функцию в виде

$$f(x) = \frac{6x}{36 + x^2} = \frac{6x}{36\left(1 + x^2/36\right)} = \frac{x}{6} \cdot \frac{1}{1 + x^2/36}.$$

Второй множитель полученного выражения разложим в степенной ряд, используя разложение функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (см. приложение), затем каждый член полученного ряда умножим на $x/6$:

$$f(x)=\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{1+x^2/36}=\frac{x}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{36}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{6^{2n+1}}.$$

Степенной ряд для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ сходится абсолютно при условии $|x|<1$, поэтому область абсолютной сходимости полученного ряда будем искать из неравенства $x^2<36$, откуда следует $|x|<6$. Таким образом, область абсолютной сходимости представляет собой интервал $(-6; 6)$.

Ответ: $\dfrac{6x}{36+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{6^{2n+1}}$; $(-6; 6)$.

Задача 13. Разложите функцию $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$ в степенной ряд, используя стандартные разложения. Найдите область сходимости полученного ряда.

Решение. Представим функцию в виде

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x^3}{3}\right).$$

Второе слагаемое в полученном выражении разложим в степенной ряд, используя разложение функции $f(x)=\cos x$ (см. приложение). В результате получим

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x^3}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2x^3}{3}\right)^{2n}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{6n}}{(2n)!3^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}.$$

Степенной ряд для функции $f(x)=\cos x$ сходится абсолютно при любых значениях аргумента, значит область абсолютной сходимости полученного ряда – $(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $\sin^2\left(\dfrac{x^3}{3}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$; $(-\infty;+\infty)$.

Образцы решения задач по теме «Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье»

Задача 14. Разложите функцию $f(x)=\begin{cases}-3x & \text{при} \quad -1\le x\le 0\\ x & \text{при} \quad 0<x\le 1\end{cases}$ в ряд Фурье на промежутке [– 1; 1]. Сделайте схематический чертеж графика функции $f(x)$ на промежутке [– 1; 1] и графика суммы $S(x)$ ряда Фурье этой функции.

Решение. Ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right),\text{ где } a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx,$$

$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$, $b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx$. В нашем случае $p=1$.

Найдем a_0:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-3x)dx+\int_{0}^{1}xdx=-\frac{3x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Найдем a_n: $a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx=-3\int_{-1}^{0}x\cos n\pi xdx+\int_{0}^{1}x\cos n\pi xdx$.

Полученные интегралы найдем с помощью формулы интегрирования по частям $\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$. Обозначим $u(x)=x$, $dv(x)=\cos n\pi xdx=d\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}$, $du(x)=dx$, $v(x)=\frac{\sin n\pi x}{n\pi}$. В результате получим

$$a_n=-3\left(\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right)\bigg|_{-1}^{0}+\frac{3}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi xdx+\left(\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right)\bigg|_{0}^{1}-\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\sin n\pi xdx.$$

Внеинтегральные слагаемые равны нулю. Окончательно будем иметь

$$a_n=-\frac{3\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{-3\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2}+\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2}=\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2}.$$

При этом использованы равенства $\cos 0=1,\ \cos(-n\pi)=\cos n\pi=(-1)^n$.

Аналогично найдем b_n:

$$b_n = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx = -3\int\limits_{-1}^{0} x\sin n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1} x\sin n\pi x dx =$$

$$= -3\left(-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{3}{n\pi}\int\limits_{-1}^{0}\cos n\pi x dx + \left(-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Bigg|_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{0}\cos n\pi x dx =$$

$$= \frac{3(-1)^n}{n\pi} - \frac{3}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{0}^{1} = \frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

Ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right).$$

Схематический чертеж графика функции $f(x)$ представлен на рис. 1, а чертеж графика суммы $S(x)$ ряда Фурье – на рис. 2.

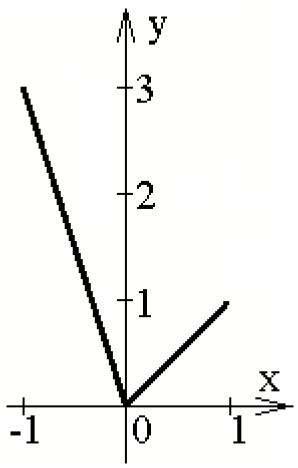


Рис. 1

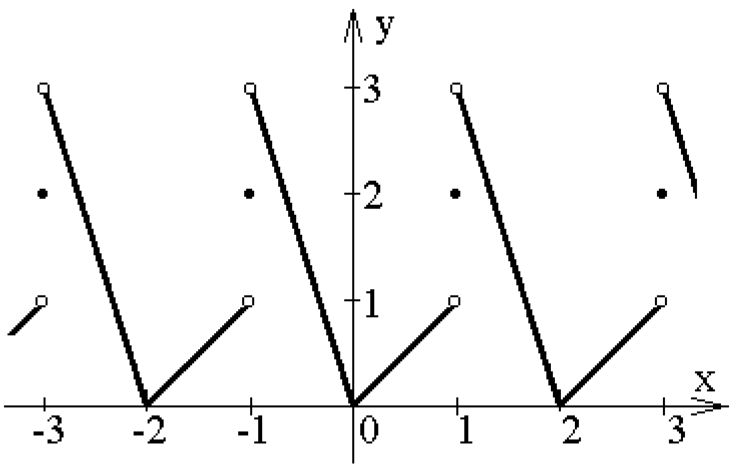


Рис. 2

Ответ: $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right).$

Задача 15. Разложите в ряд Фурье на промежутке [– 2; 2] функцию, заданную выражением $f(x) = 2 - x$ при $0 \le x \le 2$, доопределив ее на промежутке [– 2; 0) **четным** образом. Сделайте схематический чертеж графика функции $f(x)$ на промежутке [– 2; 2] и графика суммы $S(x)$ ряда Фурье этой функции.

Решение. Разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы и имеет вид $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p}$, где $a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$. В нашем случае $p = 2$.

Найдем a_0: $a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx = \int_0^2 (2-x)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2$.

Найдем a_n:

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \int_0^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 (2-x)\frac{2}{n\pi}d\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2(2-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1^n) - 1\right) = \frac{4\left(1 - (-1^n)\right)}{n^2\pi^2}.$$

Разложение функции в ряд Фурье имеет вид:

$$S(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье изображены на рис. 3 и 4.

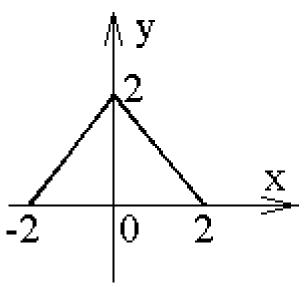


Рис. 3

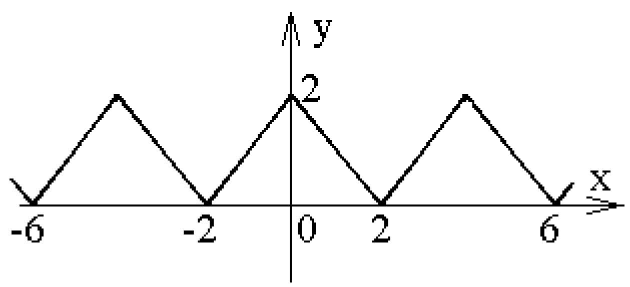


Рис.4

Ответ: $S(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

Задача 16. Разложите в ряд Фурье на промежутке [– 2; 2] функцию, заданную выражением $f(x) = 2 - x$ при $0 \le x \le 2$, доопределив ее на промежутке [– 2; 0) **нечетным** образом. Сделайте схематический чертеж графика функции $f(x)$ на промежутке [– 2; 2] и графика суммы $S(x)$ ряда Фурье этой функции.

Решение. Разложение в ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы и имеет вид $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}$, где $b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx$. В нашем случае $p = 2$.

Найдем b_n:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx = \int_0^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 (2-x)\left(-\frac{2}{n\pi}\right)d\left(\cos\frac{n\pi x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2(x-2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{n\pi}.$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид: $S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье изображены на рис. 5 и 6.

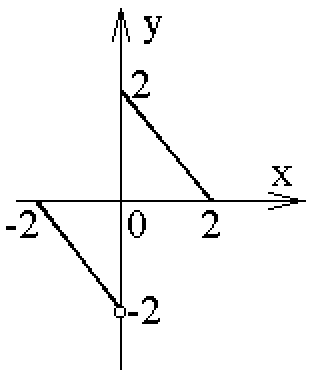


Рис. 5

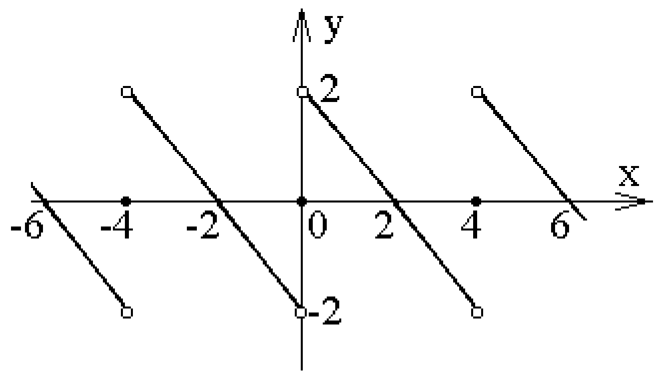


Рис. 6

Ответ: $S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Расчетные задания

I. Исследуйте сходимость числовых рядов: а) выясните, сходится или расходится положительный ряд; б) выясните, сходится или расходится знакопеременный ряд; если ряд сходится, установите характер сходимости.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n (n+1)^{100}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2^{2n-1}}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{8^n n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{10^n n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n \sqrt{n}}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

7. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt[3]{(n-1)^4}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n^2}{e^n}$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n n^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{5^n}$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n\sqrt{9n^2+1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 2}{\sqrt[3]{n^2}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{4n^4+n}}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\pi^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n\sqrt{2n-1}}$

13. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{1/n} - 1\right)$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{3}\right)^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2^n + 3^n}$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{n}\right)$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + 2}{\sqrt{n}}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n-2)}{n\sqrt{25n^2 + 1}}$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{\pi^n n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2}$

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n-1)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)^2$

23. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}}{\sqrt{(n-1)^3}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(e^{1/n} - 1\right)$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^n + 3^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$

II. Найдите область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{(n^2+1)2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}(x+1)^{2n-1}}{n^2 4^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^2 e^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{9^n \sqrt[3]{n^2}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^n \sqrt{n(n+1)}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^{2n}}{4^n \sqrt{n+1}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} \ln n}{n 2^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n \sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-4)^n}{3^{2n} \sqrt{2n-1}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{3^n (n+1)}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^{2n}}{4^n (n^2+1)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2 2^n}{n\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{9^n (2n-1)^2}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x-5)^n}{2^n (n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{3^n n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+4)^{2n}}{16^n \sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{\sqrt{n(n^2-1)}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{7^n \sqrt[3]{n^2}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{8^n \sqrt{2n-1}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^n}{e^n n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}(2x-1)^n}{n^2 \sqrt[6]{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}(2x+1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^{2n}}{5^{2n}(n^3+1)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{5^n n\sqrt{n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} \ln n}{\sqrt{n^2+1}}$

III. Разложите функции в степенные ряды по степеням x, используя стандартные разложения. Укажите интервалы их сходимости.

1. а) $f(x)=xe^{-4x}$, б) $f(x)=\dfrac{5x^2}{2-4x}$

2. а) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{x^3}{3}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{2x}{3+2x^2}$

3. а) $f(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{3}{x^3-27}$

4. а) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x^2}{16}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{x^2}{8x^3-1}$

5. а) $f(x)=e^{-x^2/2}$, б) $f(x)=\dfrac{x}{9x^2+4}$

6. а) $f(x)=x\ln\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-4x^2}$

7. а) $f(x)=\sin\left(\dfrac{4x^2}{9}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{9x}{27x^3+8}$

8. а) $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{3x}{4}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{11x}{11x+7}$

9. а) $f(x)=x^2\ln\left(\dfrac{3+2x}{3}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{10}{2x^2+5}$

10. а) $f(x)=xe^{\pi x/4}$, б) $f(x)=\dfrac{6x^2}{4x-2}$

11. а) $f(x)=x^2e^{-x}$, б) $f(x)=\dfrac{3x}{3-2x}$

12. а) $f(x)=\sin^2(2x)$, б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

13. а) $f(x)=x\cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$, б) $f(x)=\dfrac{3}{4x^2+2}$

14. а) $f(x)=x\ln(1-x^2)$, б) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+8}$

15. а) $f(x)=\sin(\pi x)^2$, б) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$

16. а) $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, б) $f(x)=\frac{2}{4-3x}$

17. а) $f(x)=xe^{x^2/4}$, б) $f(x)=\frac{6x^2}{2x^2-3}$

18. а) $f(x)=\ln\left(\frac{x^3+2}{2}\right)$, б) $f(x)=\frac{3x}{8x^2-1}$

19. а) $f(x)=x^2\cos(\pi x)$, б) $f(x)=\frac{5x^3}{x^2+5}$

20. а) $f(x)=x2^{x^2}$, б) $f(x)=\frac{4}{2-3x^2}$

21. а) $f(x)=\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$, б) $f(x)=\frac{3x^4}{27-x^3}$

22. а) $f(x)=x^2 5^{-x}$, б) $f(x)=\frac{2x}{x^4+16}$

23. а) $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, б) $f(x)=\frac{7x}{11-7x}$

24. а) $f(x)=\pi^{-2x}$, б) $f(x)=\frac{2x^2}{4x^2+9}$

25. а) $f(x)=\sin^2\left(\frac{5x}{4}\right)$, б) $f(x)=\frac{3x}{9x^2-1}$

26. а) $f(x)=\frac{x}{10}\ln(1+10x)$, б) $f(x)=\frac{6}{3x^2+2}$

IV. 1) Разложите функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[-p;\ p]$. Если функция задана на промежутке $[0;\ p]$, то доопределите ее на промежутке $[-p;\ 0)$ четным или нечетным образом в соответствии с указанием.

2) Сделайте схематический чертеж графика функции $f(x)$ на промежутке $[-p;\ p]$ и графика суммы $S(x)$ ряда Фурье этой функции.

1. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -2\le x\le 0\\ x/2 \text{ при } 0<x\le 2\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}-2 \text{ при } -1\le x\le 0\\ 2x \text{ при } 0<x\le 1\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } -\pi\le x\le 0\\ \pi/2 \text{ при } 0<x\le \pi\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}x/\pi \text{ при } -\pi\le x\le 0\\ 1 \text{ при } 0<x\le \pi\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 2 \text{ при } -3 \le x \le 0 \\ -x/3 \text{ при } 0 < x \le 3 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -3x/2 \text{ при } -2 \le x \le 0 \\ -1 \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0 \le x < 1 \\ 1 \text{ при } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Указание: $f(x)$ нечетна на [– 2; 2]

8. $f(x)=\begin{cases} -x \text{ при } 0 \le x < \pi/2 \\ -\pi/2 \text{ при } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

Указание: $f(x)$ нечетна на [– π ; π]

9. $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0 \le x < \pi/2 \\ \pi/2 \text{ при } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

Указание: $f(x)$ четна на [$-\pi$; π]

10. $f(x)=\begin{cases} -x \text{ при } 0 \le x < 1 \\ -1 \text{ при } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Указание: $f(x)$ четна на [– 2; 2]

11. $f(x)=\begin{cases} 2 \text{ при } -2 \le x \le 0 \\ x+2 \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} \pi \text{ при } -\pi \le x \le 0 \\ \pi + x \text{ при } 0 < x \le \pi \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x-1 \text{ при } -1 \le x \le 0 \\ -1 \text{ при } 0 < x \le 1 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 3 \text{ при } -3 \le x \le 0 \\ 3-x \text{ при } 0 < x \le 3 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 4x \text{ при } -2 \le x \le 0 \\ 0 \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } -\pi \le x \le 0 \\ 2x \text{ при } 0 < x \le \pi \end{cases}$

17. $f(x)=1-x$ при $0 \le x \le 2$

Указание: $f(x)$ четна на [– 2; 2]

18. $f(x)=\pi x-\pi/2$ при $0 \le x \le 1$

Указание: $f(x)$ четна на [– 1; 1]

19. $f(x)=3-2x$ при $0 \le x \le 3$

Указание: $f(x)$ нечетна на [– 3; 3]

20. $f(x)=-x^2$ при $0 \le x \le 1$

Указание: $f(x)$ нечетна на [– 1; 1]

21. $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ при } -2 \le x \le 0 \\ 0 \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} -1 \text{ при } -1 \le x \le 0 \\ 1-x \text{ при } 0 < x \le 1 \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} -\pi \text{ при } -1 \le x \le 0 \\ \pi(2x-1) \text{ при } 0 < x \le 1 \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1) \text{ при } -2 \le x \le 0 \\ -2 \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$

25. $f(x)=2-x^2$ при $0 \le x \le 2$

Указание: $f(x)$ четна на [– 2; 2]

26. $f(x)=x^2-2$ при $0 \le x \le 2$

Указание: $f(x)$ нечетна на [– 2; 2]

Приложение

Решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения	Решения
λ – действительный простой корень	$e^{\lambda x}$
λ – действительный корень кратности r	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$
$a \pm bi$ – простые корни	$e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx$
$a \pm bi$ – корни кратности r	$e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{r-1} e^{ax} \cos bx,$ $e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{r-1} e^{ax} \sin bx$

Вид частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами в зависимости от вида его правой части

Вид правой части	Дополнительное условие	Вид частного решения
$f(x) = P_n(x) e^{ax}$	a не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{y} = Q_n(x) e^{ax}$
$f(x) = P_n(x) e^{ax}$	a – корень характерист. уравнения кратности r	$\tilde{y} = Q_n(x) x^r e^{ax}$
$f(x) = e^{ax}(M \cos bx +$ $+ N \sin bx)$	$a \pm bi$ не являются корнями характ. уравнения	$\tilde{y} = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$
$f(x) = e^{ax}(M \cos bx +$ $+ N \sin bx)$	$a \pm bi$ – корни характ. уравнения кратности r	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(A \cos bx +$ $+ B \sin bx)$

Примечание: в таблице $P_n(x)$ – заданный многочлен степени *n*, $Q_n(x)$ – многочлен степени *n* с неизвестными коэффициентами; *M*, *N* – заданные числа, *A*, *B* – неизвестные числа.

Стандартные разложения функций в степенные ряды

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in (-\infty; +\infty)$

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in (-\infty; +\infty)$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in (-\infty; +\infty)$

4. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in (-\infty; +\infty)$

5. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in (-\infty; +\infty)$

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}, \ x \in (-1; 1)$

7. $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ x \in (-1; 1)$

8. $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in (-1; 1)$

9. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1; 1]$

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Кафедра высшей математики

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон. С 1944 по 1973 г. кафедрой заведовал В.А. Тартаковский – выдающийся математик и замечательный педагог.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицин, проф. И.А. Молотков.

В 1979 году кафедру ВМ возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярев, специалист по теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университете по дисциплине «Высшая математика» и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ВМ является самой многочисленной кафедрой в университете по числу преподавателей. В настоящее время на кафедре ВМ работают такие выдающиеся ученые как профессора В.В. Жук, А.П. Качалов, Г.П. Мирошниченко, А.Г. Петрашень, В.П. Смирнов, В.М. Уздин, В.Ю. Тертычный – член Нью-Йоркской академии.

На кафедре ВМ сложилась научная школа по математическому моделированию сложных физических систем, активно развиваются направления, связанные с нанотехнологиями, квантовыми компьютерами и квантовыми технологиями. Сложилось тесное сотрудничество с крупными научными центрами, как в России, так и за рубежом.

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи
для студентов вечернего отделения

I семестр

Составители: О.И. Судавная, В.М.Фролов, С.В. Фролов

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка О.И. Судавная
Рисунки С.В. Фролов
Дизайн обложки О.И. Судавная
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Тираж 100 экз.
Заказ №

Решение. Запишем уравнение в нормальной форме $y''' = \dfrac{2}{x} + e^{0,5x}$ и произведем последовательное интегрирование:

$$y'' = \int y''' dx = \int \left(\frac{2}{x} + e^{0,5x} \right) dx = 2 \ln|x| + 2e^{0,5x} + c;$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(2 \ln|x| + 2e^{0,5x} + c \right) dx = 2x \ln|x| - 2x + 4e^{0,5x} + cx + c_2;$$

$$y = \int y' dx = \int \left(2x \ln|x| - 2x + 4e^{0,5x} + cx + c_2 \right) dx =$$

$$= x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2} - x^2 + 8e^{0,5x} + \frac{c}{2} x^2 + c_2 x + c_3 =$$

$$= x^2 \ln|x| + 8e^{0,5x} + \left(\frac{c}{2} - \frac{3}{2} \right) x^2 + c_2 x + c_3 =$$

$$= x^2 \ln|x| + 8e^{0,5x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3,$$

где $c_1 = \dfrac{c}{2} - \dfrac{3}{2}$. Полученное выражение представляет собой общее решение данного уравнения.

Интегралы $\int 2 \ln|x| dx$ и $\int 2x \ln|x| dx$ найдены с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int 2 \ln|x| dx = 2x \ln|x| - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = 2x \ln|x| - 2x + c;$$

$$\int 2x \ln|x| dx = \int \ln|x| d(x^2) = x^2 \ln|x| - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c.$$

Ответ: $y = x^2 \ln|x| + 8e^{0,5x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.

Задача 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' x^2 - y'' x + 2 = 0$, понизив его порядок.

Решение. Уравнение не содержит в явной форме искомую функцию и ее первую производную. Поэтому введем новую неизвестную функцию, зависящую от x, по формуле $z(x) = y''$. Тогда $z'(x) = y'''$, а уравнение примет вид $z' x^2 - zx + 2 = 0$. Разделив уравнение на x^2, получим линейное неоднородное уравнение первого порядка $z' - \dfrac{z}{x} = -\dfrac{2}{x^2}$ (1). Будем искать его общее решение в виде произведения двух функций $z = u(x)v(x)$. Тогда $z' = u'v + uv'$. Подставив два последних выражения в уравнение (1), получим

Редакционно-издательский отдел

Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ