Северо-Западный государственный заочный технический университет

МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 1
1-й семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Санкт-Петербург
2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА, часть 1
1-й семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Институты: все

Укрупненные группы специальностей и направлений подготовки:

080000 – Экономика и управление
140000 – Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника
150000 – Металлургия, машиностроение и материалообработка
190000 – Транспортные средства
200000 – Приборостроение и оптотехника
210000 – Электронная техника, радиотехника и связь
220000 – Автоматика и управление
230000 - Информатика и вычислительная техника
240000 – Химическая и биотехнологии

Направления подготовки высшего профессионального образования:

261000 – Технология художественной обработки материалов
280200 – Защита окружающей среды

Санкт-Петербург
Издательство СЗТУ
2009

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 517(07)

Математика. Ч. 1, 1-й семестр: учебно-методический комплекс / сост.: А.Б. Гончарова [и др.] – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009. – с. 228

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

В данном методическом комплексе изложены основные понятия векторной и линейной алгебры, приведены сведения о кривых и поверхностях второго порядка, о пределах функции, дифференциальном и интегральном исчислении функции одной переменной, о функциях нескольких переменных. Данный учебно-методический комплекс предназначен для студентов 1-го курса всех направлений и специальностей СЗТУ.

Рассмотрено на заседании кафедры математики 29.01.09г., одобрено методической комиссией факультета общепрофессиональной подготовки 29.01.09г.

Рецензенты: кафедра математики СЗТУ (зав. каф. А.А.Потапенко, д-р физ. -мат. наук, проф.); кафедра информатики СЗТУ (зав. каф. Г.Г. Ткаченко, канд. физ.-мат.наук, доц.).

Составители: Гончарова А.Б., канд. физ.-мат. наук, доц.; Ерунова И.Б., канд. физ.-мат. наук, доц.; Лобунина И.И., канд. техн. наук, доц.; Пронина Л.А., канд. техн. наук, доц.; Романова Ю.С., канд. техн. наук, доц.; Самсонов А.Н., канд. техн. наук, доц.

1. Информация о дисциплине

1.1. Предисловие

Дисциплина «Математика, часть 1» изучается студентами всех специальностей и направлений всех форм обучения. Эта дисциплина включает в себя разделы: «Векторная и линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных», «Неопределенный и определенный интегралы», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Кратные интегралы и векторный анализ», «Уравнения математической физики». Данный методический комплекс предназначен для студентов первого курса (I-го семестра) и содержит материал по первым трем из перечисленных разделов.

Целью изучения дисциплины является привитие студентам навыков математического мышления, использование математических методов и основ математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины – усвоение студентами базовых знаний, дающих возможность осуществлять математическую формулировку любых технических, физических или социально-экономических задач и умение применять математический аппарат для решения конкретных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен овладеть основами знаний по дисциплине, формируемыми на нескольких уровнях:

Иметь представление:

- о целях и областях применения высшей математики;

Знать:

- основные понятия и определения курса;
- операции с векторами и матрицами;
- правила нахождения производных различных функций;
- способы взятия интегралов;
- методы исследования числовых и функциональных рядов;
- методы решения дифференциальных уравнений.

Уметь применять эти знания для решения прикладных задач:

- решение систем алгебраических уравнений в задачах оптимизации;
- исследование функций;
- нахождение физико-геометрических характеристик различных величин;
- исследование протекания физического явления во времени.

Владеть:

- умением осуществлять математическую постановку задач, решаемых в различных областях науки, техники, экономики и маркетинга;
- методами решения поставленных задач.

Место дисциплины в учебном процессе:

Курс «Математика» является фундаментом для изучения всех технических дисциплин и также применяется в курсовом и дипломном проектировании.

1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы

1.2.1. Содержание дисциплины по ГОС

Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

1.2.2. Объем дисциплины и виды учебной работы

<table>
<tr><td rowspan="3">Вид учебной работы</td><td colspan="3">Всего часов</td></tr>
<tr><td colspan="3">форма обучения</td></tr>
<tr><td>очная</td><td>очно-заочная</td><td>заочная</td></tr>
<tr><td>Общая трудоемкость дисциплины (ОТД)</td><td colspan="3">135</td></tr>
<tr><td>Работа под руководством преподавателя (включая ДОТ)</td><td>80</td><td>80</td><td>80</td></tr>
<tr><td>В том числе аудиторные занятия:
лекции
практические занятия (ПЗ)</td><td>
44
24</td><td>
12
24</td><td>
6
10</td></tr>
<tr><td>Самостоятельная работа студента (СР)</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td></tr>
<tr><td>Промежуточный контроль, количество
в том числе: контрольная работа</td><td>10
-</td><td>12
2</td><td>12
2</td></tr>
<tr><td>Вид итогового контроля</td><td colspan="3">1 семестр – экзамен</td></tr>
</table>

1.2.3. Перечень видов практических занятий и контроля

- две контрольные работы (для очно-заочной и заочной форм обучения);

- практические занятия;

- 10 тестов (по темам);

- экзамен.

2. Рабочие учебные материалы

2.1. Рабочая программа (*объем 135 часов)*

Введение (2 часа)

[1], с.4...5; [5], с.3...4

Предмет и задачи дисциплины. Основные этапы развития математики. Ее роль в учебном процессе, научных исследованиях и промышленном производстве.

Раздел 1. Основы линейной алгебры (23 часа)
[1], с. 4…83; [8], с.39…43; [8], с.70…102

1.1. Основные понятия линейной алгебры

Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n-го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).

1.2. Решение систем линейных уравнений

Системы из двух и трех линейных уравнений. Правило Крамера. Системы из n линейных уравнений с n неизвестными.

1.3. Матрицы и их применение
к решению систем линейных уравнений

Матрицы, действия с ними. Понятие обратной матрицы. Матричная запись системы линейных уравнений.

1.4. Основы общей алгебры

Основные понятия. Группы, кольца, поля.

Раздел 2. Основы векторной алгебры (8 часов)
[2], с. 4…37

2.1. Основные понятия и определения

Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекции вектора на ось.

Направляющие косинусы и длина вектора. Понятие о векторных диаграммах в науке и технике (диаграмма сил, моментов сил, электрических токов, напряжений и т.п.). Координаты центра масс системы точек.

2.2. Перемножение векторов

Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.

Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл определителя второго порядка. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике: момент силы; сила, действующая на проводник с током в магнитном поле; скорость точки вращающегося тела; направление распространения электромагнитных волн; понятие о явлении гироскопии.

Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл определителя третьего порядка.

Раздел 3. Аналитическая геометрия (40 часов)

[2], с. 29…104

3.1. Системы координат

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Полярные координаты на плоскости. Спираль Архимеда. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Различные способы задания линий и поверхностей в пространстве.

3.2. Различные виды уравнений прямой на плоскости

Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

3.3. Уравнения плоскости и прямой в пространстве

Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. Угол между прямыми.

3.4. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Технические приложения геометрических свойств кривых (использование фокальных свойств, математические модели формообразования биологических, технических и других объектов).

3.5. Поверхности второго порядка

Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Сферы. Конусы. Эллипсоиды. Гиперболоиды. Параболоиды. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их форм методом сечений. Технические приложения геометрических свойств поверхностей (использование фокальных свойств, модели строительных конструкций, физические модели элементов и т.д.).

3.6. Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы

Пространство $\mathbb{R}^n$. Линейные операции над векторами. Различные нормы в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Линейные и квадратичные формы в $\mathbb{R}^n$. Условие знакоопределенности квадратичной формы. Понятие линейного (векторного) пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Примеры. Линейные операторы. Примеры линейных операторов для моделирования различных процессов. Многомерная евклидова геометрия. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Раздел 4. Введение в математический анализ (60 часов)

[3], с. 4….77; [8],с. 136…167

4.1. Функция

Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Понятие кривой. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций.

4.2. Предел последовательности. Предел функции

Элементы математической логики. Необходимое и достаточное условия. Прямая и обратная теоремы. Символы математической логики, их использование. Бином Ньютона. Формулы сокращенного умножения.

Элементы топологии. Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности. Стабилизация знака у членов последовательности, имеющей предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Предел монотонной функции.

4.3. Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций

Бесконечно малые функции в точке, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций. Символы 0 и ∞ .

4.4. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва, их классификация

Непрерывность функции в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Точки разрыва, их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений. Метод бисекции.

4.5. Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала

Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Уравнение касательной к кривой в данной точке. Правила нахождения производной и дифференциала.

4.6. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции.

Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков.

Заключение (2 часа)

Изложенный учебный материал послужит основой для изучения не только последующих разделов математики, но и основных технических дисциплин.

2.2. Тематический план дисциплины

Тематический план дисциплины
для студентов очной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля						
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ ПЗ
			ауд.	ДОТ	ауд.	ДОТ			
ВСЕГО		135	44	12	24		55	10	8
1	**Введение. Раздел 1. Основы линейной алгебры**	25					12		
1.1	Основные понятия линейной алгебры			2					
1.2	Решение систем линейных уравнений		2		2			1	1
1.3	Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений		2	1	2			2	2
1.4	Основы общей алгебры			2					
2	**Раздел 2. Основы векторной алгебры**	8					4		
2.1	Основные понятия и определения		2						
2.2	Перемножение векторов		2					3	
3	**Раздел 3. Аналитическая геометрия**	40					14		
3.1	Системы координат		2						
3.2	Различные виды уравнений прямой на плоскости		2						
3.3	Уравнения плоскости и прямой в пространстве		4		2			4	3
3.4	Кривые второго порядка		4	2	2			5	4
3.5	Поверхности второго порядка		2		4			6	5
3.6	Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы		2						
4	**Раздел 4. Введение в математический анализ**	62					25		
4.1	Функция		2						

4.2	Предел последовательности. Предел функции		2						
4.3	Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций		4	1	4			7	6
4.4	Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва, их классификация		4	2	2			8	7
4.5	Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала		4		6			9	8
4.6	Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Заключение		4	2				10	

Тематический план дисциплины
для студентов очно-заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по дневной форме обучения	Виды занятий и контроля							
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ к/р	№ ПЗ
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ				
ВСЕГО		135	12	44	24		55	10	2	8
1	**Введение. Раздел1. Основы линейной алгебры**	25					12			
1.1	Основные понятия линейной алгебры			2						
1.2	Решение систем линейных уравнений		2		2			1		1
1.3	Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений		2		2			2		2
1.4	Основы общей алгебры			3						
2	**Раздел 2. Основы векторной алгебры**	8					4			

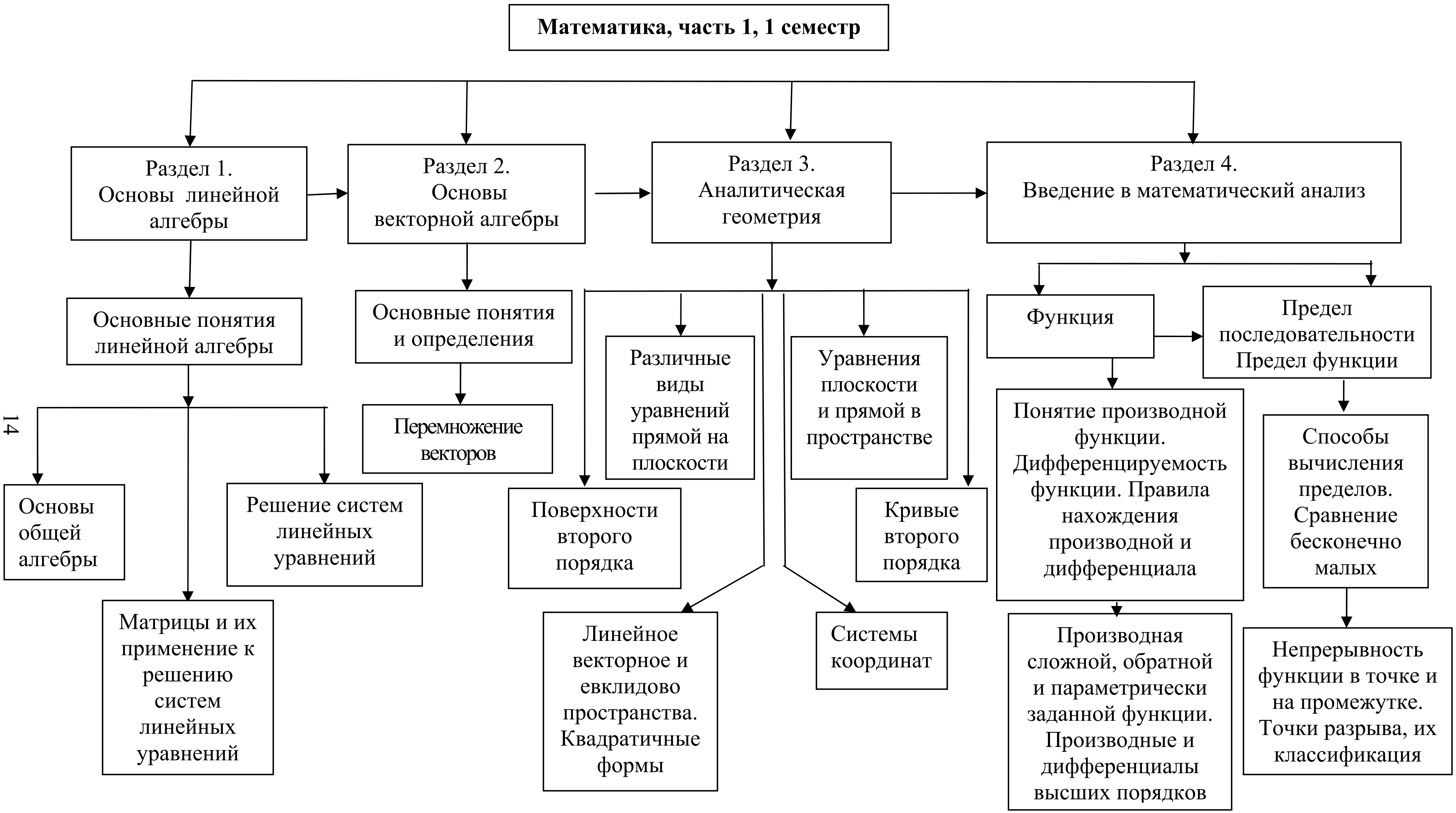
2.1	Основные понятия и определения		2							
2.2	Перемножение векторов.			2				3		
3	**Раздел 3. Аналитическая геометрия**	40					14			
3.1	Системы координат			4						
3.2	Различные виды уравнений прямой на плоскости		2	2						
3.3	Уравнения плоскости и прямой в пространстве			2	2			4	1	3
3.4	Кривые второго порядка			2	2			5		4
3.5	Поверхности второго порядка		2	2	4			6		5
3.6.	Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы			2						
4	**Раздел 4. Введение в математический анализ**	62					25			
4.1	Функция			5						
4.2	Предел последовательности. Предел функции			4						
4.3	Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций			4	4			7		6
4.4	Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва, их классификация			4	2			8		7
4.5	Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала		2	2	6			9		8
4.6	Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Заключение			4				10	2	

Тематический план дисциплины
для студентов заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по дневной форме обучения	Виды занятий и контроля							
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ к/р	№ ПЗ
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ				
ВСЕГО		135	6	60	10	14	55	10	2	8
1	**Введение. Раздел 1. Основы линейной алгебры**	25					12			
1.1	Основные понятия линейной алгебры		2							
1.2	Решение систем линейных уравнений			4		2		1		1
1.3	Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений			2	2			2		2
1.4	Основы общей алгебры			1						
2	**Раздел 2. Основы векторной алгебры**	8					4			
2.1	Основные понятия и определения		2							
2.2	Перемножение векторов			2				3		
3	**Раздел 3. Аналитическая геометрия**	40					14			
3.1	Системы координат			2						
3.2	Различные виды уравнений прямой на плоскости			4						
3.3	Уравнения плоскости и прямой в пространстве			4		2		4	1	3
3.4	Кривые второго порядка			4	2			5		4
3.5	Поверхности второго порядка			2	2	2		6		5
3.6.	Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы			2						
4	**Раздел 4. Введение в математический анализ**	62					25			
4.1	Функция			4						

4.2	Предел последовательности. Предел функции			4						
4.3	Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций			4	2	2		7		6
4.4	Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва, их классификация			3	2			8		7
4.5	Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала		2	4		6		9		8
4.6	Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков Заключение			4				10	2	

2.3. Структурно-логическая схема дисциплины «Математика, часть 1»



2.4. Временной график изучения дисциплины при использовании ДОТ

№	Название раздела	Продолжительность изучения раздела (в днях, из расчета - 4ч в день)
1	Введение. Раздел 1. Основы линейной алгебры	6
2	Раздел 2. Основы векторной алгебры	2
3	Раздел 3. Аналитическая геометрия	10
4	Контрольная работа № 1	3
5	Раздел 4. Введение в математический анализ. Заключение	16
6	Контрольная работа № 2	3
	Итого	40

2.5. Практический блок
2.5.1. Практические занятия

№ п/п	№ темы	Наименование практических занятий	Кол-во часов по				
			очной форме обучения	очно-заочной форме обучения		заочной форме обучения	
			Ауд.	Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ
1	1.2	Решение систем линейных уравнений	2	2			2
2	1.3	Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений	2	2		2	
3	3.3	Уравнения плоскости и прямой в пространстве	2	2			2

4	3.4	Кривые второго порядка	2	2		2	
5	3.5	Поверхности второго порядка	4	4		2	2
6	4.3	Способы вычисления пределов	4	4		2	2
7	4.4	Непрерывность функции. Точки разрыва	2	2		2	
8	4.5	Вычисление производной функции	6	6			6

2.6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина содержит 4 раздела. После изучения каждого раздела Вам следует ответить на вопросы тренировочных тестов и выполнить задания контрольных работ. Номера соответствующих вопросов и заданий контрольных работ указаны в тематических планах.

За каждый вид самостоятельных работ начисляется определенное количество баллов. Максимально возможное количество баллов, которые может получить студент, равно 100 баллам. Усвоение теоретического материала проверяется с помощью тестов. За каждый правильный ответ контрольного теста, материалы которого находятся либо у преподавателя, либо на учебном сайте СЗТУ, студент получает 1 балл:

$$60 \text{ вопросов} \times 1\text{балл} = 60\text{баллов}.$$

За каждую зачтенную контрольную работу студент получает 15 баллов:

$$15 \text{ баллов} \times 2 \text{ контр.работы} = 30 \text{ баллов}.$$

Дополнительно, активно работая на занятиях, выполняя творческие задания, выдаваемые преподавателем, студент может заработать еще 10 баллов.

Для допуска к экзамену Вам необходимо получить не менее 70 баллов. Экзаменационная оценка (по усмотрению преподавателя) может быть выставлена на основании итогов в соответствии со следующими критериями:

Количество набранных баллов	Экзаменационная оценка
71-80	Удовлетворительно
81-90	Хорошо
91-100	Отлично

Примечание. 30 баллов из указанной суммы баллов должны быть набраны в результате решения задач контрольных работ студентами очно-заочной и заочной форм обучения. Студенты очной формы обучения получают эти баллы, выполняя задания, выдаваемые преподавателем на практических занятиях.

3. Информационные ресурсы дисциплины

3.1. Библиографический список

Основной:

1. Лобунина, И.И., Математика, ч.1. Линейная алгебра: учеб.-метод. комплекс, учеб. пособие /И.И. Лобунина, В.А. Сентяков.. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008
2. Романова, Ю.С., Математика, ч.1. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. комплекс, учеб. пособие /Ю.С. Романова. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008
3. Пронина, Л.А., Математика, ч.1. Введение в математический анализ: учеб.-метод. комплекс, учеб. пособие / Л.А. Пронина, А.Н. Самсонов, - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
4. Волынская И.А. Математика, ч. 1: учеб.-метод. комплекс (для первого курса), информ. ресурсы дисциплины, метод. указания к выполнению практических занятий/ сост.: И. А. Волынская [и др.]. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.

Дополнительный:

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.I /Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985-2002.
6. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Т.I /В.Д.Черненко.- СПб.: Изд-во Политехника, 2003
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1978-2001.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. школа, 1999.

Средства обеспечения освоения дисциплины (ресурсы Internet)

9. http://www.mathelp.spb.ru/index1.htm
10. http://allmath.ru/higheralgebra.htm
11. http://alexlarin.narod.ru/kvm.html
12. http://matema.narod.ru/products.htm
13. http://www.ispu.ru/library/lessons/math/index.html

3.2. Опорный конспект лекций по дисциплине

Введение

В предлагаемом Вам опорном конспекте лекций по курсу математики в краткой и сжатой форме изложен теоретический материал, широко проиллюстрированный решенными примерами, необходимый к усвоению в течение первого семестра первого курса обучения в СЗТУ. В каждом разделе конспекта указаны количество и номера задач, которые необходимо решить для осуществления текущего и итогового контроля.

1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Данный раздел включает четыре темы:

1.1 Основные понятия линейной алгебры.

1.2 Решение систем линейных уравнений.

1.3 Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений.

1.4. Основы общей алгебры.

По каждой теме излагается основной теоретический материал, и приводятся иллюстрирующие его примеры.

В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров. После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы № 1 в соответствии со своим вариантом.

1.1. Основные понятия линейной алгебры

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Общая запись системы линейных уравнений. Основные определения.**
- **Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель второго порядка.**
- **Определитель третьего порядка.**
- **Основные свойства определителей.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [1], глава 1, с. 4-20 и к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Общая запись системы линейных уравнений. Основные определения

В теории систем линейных уравнений для удобства записи и исследования принимается следующая система обозначений: неизвестные будем обозначать буквой x с соответствующими индексами: $x_1, x_2, ..., x_n$; уравнения будем считать перенумерованными; коэффициенты при неизвестных обозначаются одной буквой a_{ik} с двумя индексами i и k, где i - номер уравнения, k - номер неизвестного. Эти индексы следует читать раздельно, например, коэффициент a_{21} читается “a два один”, а не “a двадцать один”. Свободные члены обозначим через b_i, где i - номер уравнения. Тогда в самом общем случае система из m линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называемую **матрицей системы** (1.1), обозначаемой

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1.2}$$

Матрицы как особые таблицы обозначаются сдвоенными вертикальными черточками, круглыми или квадратными скобками.

Решением системы линейных уравнений (1.1) называется такая совокупность n чисел $C_1, C_2, ..., C_n$, что при замене неизвестных x_1 на C_1, x_2 на $C_2, ..., x_n$ на C_n каждое из уравнений системы обращается в тождество. Подчеркнем, что $C_1, C_2, ..., C_n$, составляют одно решение системы, а не n решений.

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Так, например, система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

несовместна, так как левые части уравнений совпадают, но правые различны. Никакая совокупность значений неизвестных не может удовлетворить обоим уравнениям, так как заданные уравнения противоречат друг другу.

Совместная система называется **определенной,** если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если решений больше чем одно.

Как будет показано далее, неопределенная система имеет бесконечное множество решений.

Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

определенна, так как имеет единственное решение $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$ Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 10x_1 - 2x_2 = 4, \end{cases}$$

в которой коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны. Мы имеем на самом деле одно уравнение с двумя неизвестными, допускающее бесконечное множество решений. То есть исходная система неопределенна, так как имеет бесконечное множество решений вида

$$x_1 = t;\ \ x_2 = 5t - 2,$$

где t - любое число.

Две системы называются **эквивалентными** (равносильными), если каждое решение первой системы является решением второй,и наоборот.

Задача теории систем линейных уравнений заключается в разработке методов, позволяющих определить, совместна ли данная система уравнений или нет, и в случае совместности установить число решений, а также указать способ нахождения всех этих решений.

Применение определителей и матриц в теории линейных систем позволяет разработать методы исследования этих систем и способы их решения. Общий случай системы (1.1) будет рассмотрен позднее, а сначала главное внимание мы уделим системам, в которых число уравнений равно числу неизвестных, начиная с простейших случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель второго порядка

Изучение теории определителей начнем с рассмотрения простейшего случая системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Запишем эту систему в общих обозначениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Будем решать эту систему знакомым из элементарной алгебры методом исключения неизвестных, чтобы получить новую систему, эквивалентную данной,

где каждое уравнение содержит только одно неизвестное. Для исключения неизвестного x_2 умножим обе части первого уравнения на a_{22}, а второго - на $-a_{12}$ и сложим почленно полученные равенства. Для исключения x_1 возьмем в качестве множителей числа: $-a_{21}$ - для первого уравнения и a_{11} - для второго.
В результате получим

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.\end{cases} \tag{1.4}$$

В уравнениях системы (1.4) коэффициентом при неизвестных является одно и то же число

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

получаемое по определенному правилу из элементов матрицы системы A:

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

Матрица, имеющая две строки и два столбца, называется **квадратной матрицей второго порядка** (матрицей второго порядка). Числа, составляющие матрицу, называются **элементами матрицы**.

Далее теория матриц будет рассмотрена подробнее. Строки матрицы нумеруются сверху вниз, а столбцы - слева направо. Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: первый индекс i указывает номер строки, а второй - k - номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. У квадратной матрицы любого порядка совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла матрицы в правый нижний, называется **главной диагональю**, а совокупность элементов, расположенных на второй диагонали, называется **побочной диагональю** матрицы.

Важнейшей числовой характеристикой квадратной матрицы является ее определитель - число, получаемое по определенному правилу по элементам матрицы. (Идея введения определителей принадлежит выдающемуся немецкому математику Готфриду Лейбницу 1646-1716).

Определение. Определителем матрицы второго порядка (1.6) (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, по определению,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.7}$$

Подчеркнем еще раз принципиальное различие между матрицей и ее определителем. Матрица - **таблица** чисел; определитель квадратной матрицы - **число**, получаемое по определенному правилу из элементов матрицы. Определитель, в отличие от матрицы, обозначается простыми, а не сдвоенными вертикальными черточками. Определитель (1.7) матрицы системы (1.6) называется **определителем системы** (1.3). Таким образом, коэффициентом при неизвестных x_1 и x_2 в системе (1.4) является определитель исходной системы (1.3). Свободные члены, стоящие в правых частях уравнений системы (1.4), также являются определителями второго порядка. Свободный член в первом уравнении является определителем матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{Vmatrix}, \tag{1.8}$$

получающейся из матрицы системы (1.6) заменой первого столбца столбцом из свободных членов b_1 и b_2 а свободный член во втором уравнении - определитель матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{Vmatrix}, \tag{1.9}$$

получающейся из той же матрицы системы (1.6) заменой второго столбца столбцом из свободных членов.

Если ввести обозначения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{D}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2, \tag{1.10}$$

то система уравнений (1.4) запишется в виде

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2, \end{cases} \tag{1.11}$$

Исследуем систему (1.11). Возможны два случая: либо определитель D системы отличен от нуля, либо равен нулю.

I. $D \neq 0$.

Если определитель D системы (1.3) отличен от нуля, то система (1.11) имеет только одно решение:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.12}$$

Полученный результат является частным случаем теоремы Крамера применительно к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Общий случай теоремы Крамера приведен далее (Габриэль Крамер (1704-1752) - швейцарский математик).

Теорема Крамера. Если определитель системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. В этом решении каждое неизвестное равно дроби, знаменатель которой равен определителю системы, а числитель - определителю матрицы, получающейся из матрицы системы заменой столбца коэффициентов при вычисляемом неизвестном столбцом из свободных членов системы.

Формулы (1.12) называются **формулами Крамера** для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

II. $D = 0$.

Если определитель системы (1.3) равен нулю, то система либо несовместна (не имеет решений), либо неопределенна (имеет бесконечное множество решений). Это зависит от определителей D_1 и D_2. При этом возможны два исхода:

1) Если хотя бы один из определителей D_1 или D_2 отличен от нуля, то по крайней мере одно из равенств (1.11) невозможно, то есть система (1.11) несовместна, а следовательно, и система (1.3) несовместна.

2) Если оба определителя D_1 и D_2 .равны нулю, то система (1.11), а следовательно, и система (1.3) неопределенна и эквивалентна одному из ее уравнений и, следовательно, имеет бесконечное множество решений.

Определитель третьего порядка

В предыдущем разделе мы убедились в возможности использования определителей второго порядка для исследования и решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Чтобы распространить этот метод на системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, а затем обобщить для произвольного n, нам понадобятся определители более высоких порядков. При вычислении этих определителей для нас окажется предпочтительным способ, при котором определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков. С этой целью рассмотрим сначала квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Если в матрице третьего порядка вычеркнуть любую строку и любой столбец, то оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу второго порядка. Очевидно, что таким способом из матрицы третьего порядка можно получить девять различных матриц второго порядка.

Определение. Минором элемента a_{ik} **матрицы третьего порядка** называется определитель матрицы второго порядка, получающейся из данной матрицы вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Минор элемента a_{ik} обозначается символом D_{ik}. У матрицы третьего порядка девять различных миноров. Например, минором элемента a_{12} матрицы (1.13) является определитель

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ik} **элемента** a_{ik} **матрицы третьего порядка** называется число, равное произведению минора этого элемента на $(-1)^{i+k}$.

Таким образом, по определению

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}. \tag{1.14}$$

Из формулы (1.14) следует, что алгебраическое дополнение равно минору, если сумма индексов $i+k$ - четная, и имеет противоположный знак, если сумма индексов нечетная.

Пример. Вычислить алгебраические дополнения элементов матрицы третьего порядка

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. По формуле (1.14) вычислим

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

Определение. Определителем матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное сумме произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

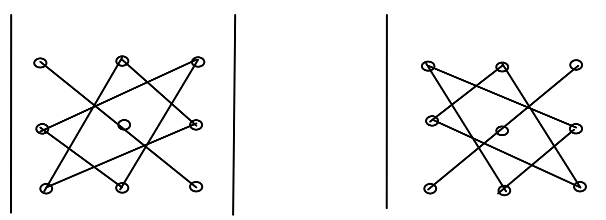
Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{1.15}$$

Если в (1.15) подставить выражения алгебраических дополнений через элементы матрицы в соответствии с (1.14) и выполнить тождественные преобразования, то получим формулу, которую принимают в курсах высшей алгебры в качестве определения определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}.a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}.a_{32}. \tag{1.16}$$

В этой формуле шесть слагаемых, каждое из которых является произведением трех элементов матрицы: по одному из каждой строки и каждого столбца. Три слагаемых со знаком “+” и три - со знаком "-". Чтобы легко запомнить формулу (1.16), используют "**правило треугольника**": со знаком "+" берутся произведения элементов главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали, а со знаком "-" берутся произведения элементов побочной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали. Правило треугольника представлено на схеме:



+ −

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель двумя способами: а) По определению, в соответствии с формулой (1.15)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2A_{11} + (-1)A_{12} + 1A_{13} =$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1(-1) = 3.$$

б) По правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3)\cdot 1 =$$

$$= -4 + 3 + 1 - 2 - 1 + 6 = 3\,.$$

Определители высших порядков

Аналогично тому, как определитель третьего порядка был определен с помощью определителей второго порядка, определители высших порядков (четвертого, пятого и т.д.) будем определять, считая, что известны определители предшествующих порядков.

Следуя этой схеме, в общем случае, предполагая известным понятие определителя $(n-1)$-го порядка, введем понятие минора D_{ik} и алгебраического дополнения A_{ik} элемента a_{ik} матрицы n -го порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (1.17)$$

Определение. Минором D_{ik} элемента a_{ik} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся из данной матрицы вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} матрицы n-го порядка называется число, равное произведению минора D_{ik} этого элемента на $(-1)^{i+k}$, то есть

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}. \tag{1.18}$$

Определение. Определителем матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \tag{1.19}$$

В соответствии с формулой (1.19) определитель матрицы n-го порядка определяется через n определителей $(n-1)$-го порядка, каждый из которых определяется через n — 1 определитель уже $(n-2)$-го порядка и т.д. Доводя это разложение до определителей 2-го порядка и вычисляя их, получим, что определитель n-го порядка представляет собой алгебраическую сумму $n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ слагаемых. Каждое слагаемое, взятое с определенным знаком, является произведением n элементов матрицы по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Именно такую структуру имело выражение (1.16) для определителя третьего порядка. Обычно это представление и принимается в курсах высшей алгебры за определение определителя n-го порядка.

Основные свойства определителей

Рассмотрим основные свойства определителей, справедливые для определителей любого порядка. Эти свойства широко используются при вычислении определителей высших порядков с целью упрощения расчетов.

Прежде чем сформулировать свойства определителей, введем новое понятие.

Определение. Транспонированием матрицы называется операция, состоящая в получении из данной матрицы A другой матрицы A^T перестановкой каждой строки на место столбца с тем же номером, то есть операция перехода от матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

к матрице

$$A^T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{1.20}$$

Матрица, полученная транспонированием матрицы A, обозначается символом A^T .Очевидно, что $(A^T)^T = A.$

Рассмотрим теперь **свойства определителей**, опуская их доказательства (см. [1]).

Свойство 1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то есть

$$D(A^T) = D(A).$$

Из свойства 1 следует, что всякое свойство определителя, справедливое относительно строк матрицы, справедливо и в отношении столбцов.

Свойство 2. (Теорема разложения). Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Следствие (теорема замещения). Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольные числа равна определителю матрицы, получающейся из данной заменой рассматриваемой строки (столбца) на строку (столбец) из этих чисел.

Свойство 3. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на одно и то же число, то определитель такой матрицы будет равен произведению этого числа и определителя исходной матрицы.

Следствие. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы равны нулю, то определитель такой матрицы равен нулю.

Свойство 4. Если в матрице переставить любые две строки (два столбца), то определитель такой матрицы будет равен определителю исходной матрицы с противоположным знаком.

Следствие. Если матрица имеет две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

Свойство 5. Если у матрицы две строки (столбца) имеют пропорциональные элементы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 6. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 7. Определитель матрицы, у которой все элементы какой-либо строки (столбца) представляют собой сумму двух слагаемых, равен сумме двух определителей матриц, получаемых из данной матрицы заменой рассматриваемой строки (столбца) на строки (столбцы), состоящие соответственно из первых и вторых слагаемых.

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число.

Рассмотренные свойства используются при вычислении определителей высших порядков. В основе метода вычисления лежит теорема разложения (свойство 2), представляющая каждый определитель в виде суммы произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

В результате вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Очевидно, объем вычислений сокращается, если некоторые элементы строки или столбца равны нулю. Используя свойство 8, можно добиться того, чтобы все элементы, кроме одного, в выбранной строке или столбце обратились в нули. Тогда вычисление определителя n-го порядка можно свести к вычислению только одного определителя $(n-1)$-го порядка.

Решение задач

Задача 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 5x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13.$$

Так как $D \neq 0,$ то система имеет единственное решение (система определенна). Это решение находим по формулам Крамера. Вычислим определители D_1 и D_2:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 - (-2) \cdot 7 = 26,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39.$$

Определим неизвестные :

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{26}{13} = 2; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{39}{13} = -3.$$

Проверка. Подставим $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$ в уравнения системы.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 12, \\ 5 \cdot 2 + (-3) = 7, \end{cases}$$ система решена правильно.

Задача 2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 6x_2 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Так как $D = 0$, то данная система либо несовместна, либо неопределенна. Найдем D_1 и D_2

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 8 = 28,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14.$$

Так как определитель системы $D = 0,$ а определители D_1 и D_2 отличны от нуля, то система несовместна. Это же можно установить, умножив обе части первого уравнения системы на 3. Получим уравнение $3x_1 + 6x_2 = 18,$ которое противоречит второму уравнению системы.

Задача 3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2, \\ -2x_1 + 6x_2 = -4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители D, D_1, D_2.

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}=-4-(-4)=0.$$

Так как все определители равны нулю, то система неопределенна (имеет бесконечное множество решений). В этом случае она эквивалентна одному уравнению, например первому. Легко заметить, что второе уравнение является следствием первого - оно получается умножением всех членов первого уравнения на (-2). Поэтому всякое решение первого уравнения является и решением системы. Придавая x_2 любые числовые значения, находим соответствующие значения для x_1 по формуле $x_1=2+3x_2$.. Таким образом, множество всех решений системы можно записать в виде: $x_1=2+3t, x_2=t,$ где $t\in\mathbb{R}$.

Задача 4. Вычислить определитель третьего порядка

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -4 & 3 & -2\\ 6 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение. Используем свойства определителей. Заметив, что все элементы первого столбца имеют общий множитель 2**,** вынесем его за знак определителя, используя свойство 3. Получим

$$D=2\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Используя свойство 8, добьемся того, чтобы в первой строке все элементы, кроме первого, обратились в нуль. Для этого выполним следующее преобразование: 1) к элементам второго столбца прибавим соответствующие элементы первого столбца; 2) к элементам третьего столбца прибавим элементы первого, умноженные на (-3), тогда получим

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & 5 & -8\end{vmatrix}.$$

Замечая, что в получившемся определителе все элементы третьего столбца имеют общий множитель 4, вынесем его за знак определителя.

$$D = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ясно, что этот определитель целесообразно разложить по элементам первой строки, где всего один элемент отличен от нуля. Получим

$$D = 8 \cdot 1 \cdot \left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8(-7) = -56.$$

Задача 5. Вычислить определитель четвертого порядка

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойство 8, преобразуем определитель так, чтобы все элементы первого столбца, кроме четвертого, обратились в нули. С этой целью: 1) к элементам первой строки прибавим удвоенные элементы четвертой строки; 2) к элементам второй строки прибавим элементы четвертой строки; 3) к элементам третьей строки прибавим элементы четвертой строки, умноженные на (-3). Получим

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца

$$D = 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Используя свойство 8, добьемся того, чтобы в последнем определителе все элементы третьего столбца, кроме второго, обратились в нуль. С этой целью к элементам первой строки прибавим удвоенные элементы второй строки, а к элементам третьей строки прибавим элементы второй строки, умноженные на (-2). Затем разложим полученный определитель по элементам третьего столбца:

$$D=-\begin{vmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix}=(-1)1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}=-3.$$

Вопросы для самопроверки по теме 1.1

1. В чем заключается принципиальное различие между матрицей и ее определителем?
2. Укажите элементы, расположенные на побочной диагонали матрицы A второго порядка.
3. Что называется минором D_{ik} элемента a_{ik} матрицы n-го порядка?
4. Как определяется алгебраическое дополнение A_{ik} элемента a_{ik} матрицы n-го порядка?
5. В каком случае алгебраическое дополнение какого-либо элемента матрицы равно его минору?
6. Докажите в общем виде, что, вычисляя определитель третьего порядка по теореме разложения (свойство 2) и по “правилу треугольника”, мы получим один и тот же результат.
7. Докажите, что, если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель заведомо равен нулю.
8. Докажите, что, в общем случае, по теореме разложения (свойство 2) определитель четвертого порядка может быть вычислен как алгебраическая сумма 24 слагаемых. Произведением какого количества элементов матрицы является каждое их этих слагаемых?
9. Почему при решении системы (1.3) возможен лишь один из трех случаев? Объясните этот факт, используя геометрическую иллюстрацию.

1.2. Решение систем линейных уравнений

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Формулы Крамера.**
- **Система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Теорема Крамера.**
- **Системы линейных однородных уравнений.**
- **Исследование и решение системы трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [1], глава 1, с. 29-37 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы № 1 в соответствии со своим вариантом под № 1-5.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Формулы Крамера

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Матрица системы - квадратная матрица A третьего порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (1.22)$$

Будем искать решение этой системы. Для исключения неизвестных x_2 и x_3 умножим обе части первого, второго и третьего уравнений системы (1.21) соответственно на алгебраические дополнения A_{11}, A_{21} и A_{31} элементов a_{11}, a_{21} и a_{31} матрицы (1.22), а затем сложим почленно левые и правые части получившихся равенств. В результате будем иметь

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 + \\ +(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 + = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \qquad (1.23)$$

В равенстве (1.23) коэффициент при неизвестном x_1 равен сумме произведений элементов первого столбца матрицы (1.22) на их алгебраические дополнения, а тогда по теореме разложения (свойство 2 определителей) он равен определителю D матрицы системы A, т.е. определителю системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.24)$$

Коэффициенты при неизвестных x_2 и x_3 равны нулю по свойству 6 определителей, как суммы произведений соответственно элементов второго и третьего столбцов на алгебраические дополнения элементов первого столбца. Свободный член, стоящий в правой части равенства (1.23), равен сумме произведений свободных членов системы b_1, b_2 и b_3 на алгебраические дополнения элементов первого столбца матрицы A. Следовательно, по теореме замещения правая часть равенства (1.23) совпадает с определителем матрицы, получаемой из матрицы системы заменой первого столбца, состоящего из коэффициентов при неизвестном x_1, столбцом из свободных членов системы. Обозначив этот определитель через D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

запишем равенство (1.23) в виде

$$Dx_1 = D_1.$$

Аналогично получим еще два уравнения, содержащие только x_2 и только x_3, вводя в качестве множителей для системы (1.21) соответственно алгебраические дополнения второго и третьего столбцов матрицы системы (1.22). В результате будем иметь систему

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2, \\ Dx_3 = D_3, \end{cases} \quad (1.25)$$

где D_2 и D_3 - определители матриц, полученные аналогично определителю D_1, заменой соответственно второго и третьего столбцов столбцом из свободных членов:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1.26)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Исследуем систему (1.21), используя полученную из нее систему (1.25), аналогично выполненному выше исследованию системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим два возможных случая: либо определитель D системы отличен от нуля, либо равен нулю.

1. $D \neq 0$

В этом случае система уравнений (1.25) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1.28)$$

Так же как и в случае системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, можно показать, что при $D \neq 0$ системы (1.25) и (1.21) эквивалентны. Формулы

(1.28) дают решение системы (1.21) и это решение единственно (система (1.21) определенна). Этот результат является частным случаем теоремы Крамера, а формулы (1.28) называются формулами Крамера применительно к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

2. $D = 0$.

Если определитель системы (1.21) равен нулю, то в зависимости от определителей D_1, D_2, D_3 система либо несовместна, либо неопределенна, а именно:

1)Если хотя бы один из определителей D_1, D_2, D_3 отличен от нуля, то система (1.21) несовместна, так как соответствующее уравнение системы (1.25), в которое входит этот определитель, не может быть удовлетворено никаким значением неизвестного.

2)Если все определители D_1, D_2, D_3 равны нулю, то, как показано в курсах высшей алгебры, система (1.21) либо совместна и имеет при этом бесчисленное множество решений (система неопределенна), либо она несовместна. В случае неопределенности системы, она эквивалентна либо двум, либо одному из ее уравнений.

Система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Теорема Крамера

Используем метод, примененный при исследовании системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными к общему случаю системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.29}$$

Матрица системы – квадратная матрица порядка n:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{1.30}$$

Пользуясь методом исключения неизвестных, преобразуем систему (1.29) в новую систему уравнений, каждое из которых содержит только одно из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для получения уравнения, содержащего только одно неизвестное $x_k \, (k = 1, 2, \ldots, n)$, следует обе части первого, второго$, \ldots, n$-го уравнения системы (1.29) умножить соответственно на алгебраические дополнения $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$

элементов k-го столбца матрицы (1.30) и сложить почленно левые и правые части полученных равенств. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2, \\ \quad .... \\ Dx_n = D_n, \end{cases} \tag{1.31}$$

где D - определитель системы уравнений (1.29)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.32}$$

а $D_1, D_2, ..., D_n$ - определители матриц, получающихся из матрицы системы (1.30) заменой соответственно первого, второго,…, n-го столбца столбцом свободных членов системы уравнений (1.29), т. е.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}. \tag{1.33}$$

Далее, исследуя систему (1.29) и полученную из нее систему (1.31) аналогично тому, как это делалось выше, выделяют два случая:

1. $D \neq 0$.

В этом случае система уравнений (1.31) имеет единственное решение по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.34}$$

являющееся единственным решением эквивалентной ей исходной системы (1.29).

Этот результат представляет собой теорему Крамера, а формулы (1.34) - формулы Крамера для системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Теорема Крамера. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. В этом решении каждое неизвестное $x_k (k = 1, 2, ..., n)$ равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числителем - определитель матрицы, получающейся из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом из свободных членов.

2. $D = 0$.

В этом случае возможен один из двух вариантов.

1) Если хотя бы один из определителей $D_1, D_2, ..., D_n$ отличен от нуля, то система уравнений (1.29) несовместна, так как соответствующее уравнение системы (1.31), в правой части которого стоит этот определитель, не может быть удовлетворено никаким значением неизвестного.

2) Если все определители $D_1, D_2, ..., D_n$ равны нулю, то система уравнений (1.29), как доказывается в полных курсах высшей алгебры, либо совместна, но имеет бесконечное множество решений (система неопределенна), либо она несовместна. В случае совместности исходная система эквивалентна системе из меньшего числа ее уравнений.

Системы линейных однородных уравнений

Линейное уравнение называется **однородным,** если свободный член в этом уравнении равен нулю.

Системы однородных уравнений являются важным частным случаем систем линейных уравнений.

Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Такая система всегда совместна, так как при любых коэффициентах a_{ik} имеет очевидное решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0.$ Это решение называется **нулевым (тривиальным) решением**. Если среди чисел, составляющих решение системы (1.35), имеется хотя бы одно, отличное от нуля, то такое решение называется **ненулевым**. Важно выяснить, при каком условии система линейных однородных уравнений (1.35) является неопределенной, а значит - что особенно важно - имеет и ненулевые решения.

Используя положения общей теории систем линейных уравнений, рассмотренные в предыдущем разделе, выделяем два случая, в зависимости от определителя системы D.

1. $D \neq 0$.

Если определитель системы линейных однородных уравнений не равен нулю, то, согласно теореме Крамера, система имеет единственное решение, которым, очевидно, является нулевое решение.

2. $D = 0$.

Если определитель системы линейных однородных уравнений равен нулю, то такая система, кроме нулевого решения, имеет еще бесконечное множество других, ненулевых решений. В этом случае исходная система эквивалентна системе из меньшего числа ее уравнений, которая может быть выделена и решена с помощью понятия о ранге матрицы.

Сформулируем основные положения процедуры нахождения ненулевых решений системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Теорема 1.1. (Необходимые и достаточные условия наличия ненулевых решений однородной системы).

Для того чтобы система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. При этом система эквивалентна системе из меньшего числа ее уравнений и имеет бесконечное множество решений.

Определение. Рангом квадратной матрицы n-го порядка называется число r такое, что среди миноров r-го порядка данной матрицы имеется, по крайней мере, один, отличный от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю.

Из определения следует, что наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы равен рангу этой матрицы.

Теорема 1.2. Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными эквивалентна системе из r ее уравнений, где r - ранг матрицы системы.

Исследование и решение системы трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

Используя указанные положения, проведем исследование и решение системы трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.37}$$

Возможны два случая:

1. $D \neq 0$.

Система имеет только одно решение - нулевое: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

2. $D = 0$.

Покажем, что в соответствии с теоремами 1.1 и 1.2 система (1.36) имеет, кроме нулевого, еще и бесконечное множество ненулевых решений, и найдем эти решения, исходя из теоремы 1.2.

Так как определитель системы $D = 0$, то ранг матрицы системы может быть равен либо двум, либо единице (случай, когда ранг равен нулю, мы не рассматриваем, так как это означало бы, что все коэффициенты равны нулю). Рассмотрим оба случая.

1) $r = 2$.

Это означает, что среди миноров второго порядка матрицы системы есть хотя бы один, отличный от нуля.

Пусть, например, не равен нулю минор D_{23} элемента a_{23}

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.38}$$

В этом случае система (1.36) эквивалентна системе из двух ее уравнений - первого и третьего:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.39}$$

Найдем все решения системы (1.39), рассматривая ее как систему двух уравнений относительно неизвестных x_1 и x_2 с определителем, равным D_{23}:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = -a_{33}x_3. \end{cases} \tag{1.40}$$

Определитель этой системы $D_{23} \neq 0$, следовательно, по теореме Крамера при каждом произвольно взятом значении неизвестного x_3 ("свободного" неизвестного, перенесенного в столбец свободных членов), она имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{33}x_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{D_{23}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{31} & -a_{33}x_3 \end{vmatrix}}{D_{23}}.$$

Используя свойства определителей, упростим полученные выражения.

$$\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{33}x_3 & a_{32} \end{vmatrix} = -x_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_3 D_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{31} & -a_{33}x_3 \end{vmatrix} = -x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -x_3 D_{22}.$$

Переходя к алгебраическим дополнениям

$$A_{21} = (-1)^{2+1} D_{21} = -D_{21}; A_{22} = (-1)^{2+2} D_{22} = D_{22};$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -D_{23},$$

придадим полученным решениям системы (1.40) более удобный вид:

$$x_1 = \frac{A_{21}}{A_{23}} x_3, \ \ x_2 = \frac{A_{22}}{A_{23}} x_3. \qquad (1.41)$$

Формулы (1.41) определяют бесконечное множество решений системы (1.39), выраженное через «свободное» неизвестное. x_3. При каждом конкретном произвольно взятом значении неизвестного x_3 могут быть вычислены по формулам (1.41) соответствующие значения неизвестных x_1 и x_2. Полученные таким образом три числа составят одно конкретное решение системы (1.39) из бесконечного множества возможных, определяемого формулами (1.41).

Замечание. Проведенное исследование одновременно демонстрирует способ решения системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

2) $r = 1$.

Ранг матрицы системы (1.36) равен единице, когда миноры всех элементов этой матрицы равны нулю, а хотя бы один из элементов матрицы - один из коэффициентов при неизвестных в системе (1.36) - не равен нулю. Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. В этом случае система (1.36) эквивалентна ее первому уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{33} = 0. \qquad (1.42)$$

При этом легко убедиться, что любое решение уравнения (1.42) является также решением второго и третьего уравнений системы (1.36).

Рассматривая уравнение (1.42) как уравнение с одним неизвестным x_1, находим, что при произвольно взятых значениях неизвестных x_2 и x_3, оно имеет единственное решение:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3. \qquad (1.43)$$

Формула (1.43) дает бесконечное множество решений уравнения (1.42). Три числа: произвольно взятые x_2 и x_3 и вычисленное по формуле (1.43) соответствующее им значение неизвестного x_1- составляют одно из решений уравнения (1.42) из бесконечного множества возможных, определяемого формулой (1.43).

Замечание. Проведенное исследование демонстрирует одновременно способ решения одного линейного уравнения с тремя неизвестными.

Мы исследовали системы линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных. Мы рассмотрели методы, позволяющие выяснить, совместна ли данная система или нет. В случае совместности мы получили возможность установить число решений и указать способ нахождения всех этих решений. В основе рассмотренных методов лежит теорема Крамера и формулы Крамера. Главным достоинством этих формул является явное выражение для решения линейной системы через коэффициенты этой системы. Однако практическое использование правила Крамера связано с весьма громоздкими вычислениями. В этом отношении более удобным является метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных, изучение которого отнесено к курсу вычислительной математики.

Самый общий случай систем произвольного числа линейных уравнений с произвольным числом неизвестных - система m линейных уравнений с n неизвестными, требующий более полных сведений о матрицах, рассмотрен в [1].

Решение задач

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Определитель системы отличен от нуля, следовательно, система совместна и имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера. Вычисляем определители D_1, D_2, D_3.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда по формулам Крамера

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-6}{-2}=3; \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{-2}=-1; \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-4}{-2}=2.$$

Задача 2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1, \\ 3x_1+x_2+4x_3=-3, \\ x_1+5x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель системы:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Так как $D=0,$ то система либо неопределенна, либо несовместна. Найдем D_1.

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Остальные определители можно уже не вычислять, так как из того, что D_1 отличен от нуля, следует, что система несовместна.

Задача 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2-4x_3=2, \\ 3x_1+3x_2-6x_3=5. \end{cases}$$

Здесь $D=0, D_1=0, D_2=0, D_3=0.$ Система несовместна, в чем легко убедиться, умножив обе части первого уравнения на 3. Получим уравнение $3x_1+3x_2-6x_3=3$, что противоречит третьему уравнению системы, следовательно, система не имеет решений.

Задача 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1-2x_2+6x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2-x_3=4. \end{cases}$$

Здесь $D=0, D_1=0, D_2=0, D_3=0.$ Так как второе уравнение получается умножением обеих частей первого уравнения на 2, то данная система равносильна системе двух уравнений и имеет бесконечное множество решений, то есть неопределенна.

Задача 5. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система является системой линейных однородных уравнений. Вычислим определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -31.$$

Так как $D \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0.$$

Задача 6. Исследовать систему линейных однородных уравнений и найти все ее решения.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $D = 0$, то система, кроме нулевого решения, имеет бесконечное множество ненулевых решений. Найдем все решения системы. Определяем ранг матрицы системы, для чего вычислим один из миноров, например D_{11}:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Так как $D_{11} \neq 0$, то ранг матрицы системы $r = 2$ и, следовательно, система эквивалентна системе из двух ее уравнений - второго и третьего. Решаем систему, состоящую из второго и третьего уравнений, относительно неизвестных x_2 и x_3:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = -2x_1, \\ -5x_2 - x_3 = -x_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы $D_{11} \neq 0$, следовательно, по теореме Крамера при каждом произвольном x_1 система имеет единственное решение:

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}-2x_1 & 1\\ -x_1 & -1\end{vmatrix}}{D_{11}}=\frac{3x_1}{7},\qquad x_3=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -2x_1\\ -5 & -x_1\end{vmatrix}}{D_{11}}=\frac{-8x_1}{7}.$$

Таким образом, множество решений исходной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{3}{7}x_1,\\ x_3=-\dfrac{8}{7}x_1,\end{cases}$$

где x_1 - любое вещественное число.

Множество решений системы часто бывает удобно записывать в параметрической форме, выражая все искомые неизвестные через произвольный параметр t. Если в нашем случае принять $\dfrac{x_1}{7}=t$, то решение системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1=7t,\\ x_2=3t,\\ x_3=-8t,\end{cases}\quad \text{где}\quad t\in\mathbb{R}.$$

Вопросы для самопроверки по теме 1.2

1. В каком случае система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение?
2. При каком условии система n линейных уравнений с n неизвестными может быть несовместной или неопределенной?
3. Сформулируйте теорему Крамера и напишите формулы Крамера для системы n линейных уравнений с n неизвестными.
4. В каком случае линейное уравнение называется однородным?
5. Может ли система линейных однородных уравнений быть несовместной?
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия наличия ненулевых решений системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.
7. Что называется рангом квадратной матрицы n-го порядка?
8. Как с помощью понятия о ранге матрицы системы решается вопрос о числе уравнений системы, эквивалентной данной системе m линейных уравнений с n неизвестными?

1.3. Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Виды матриц.**
- **Равенство матриц и линейные операции с матрицами.**
- **Умножение матриц.**
- **Обратная матрица.**
- **Решение системы линейных уравнений при помощи матриц.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [1], глава 2, с. 45-75 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы №1 в соответствии со своим вариантом под № 6-10.

Виды матриц

Ранее мы использовали понятие о матрице, обращаясь к важнейшей числовой характеристике квадратной матрицы - определителю матрицы. Теперь нам предстоит познакомиться с основными действиями над матрицами, имеющими широчайшие приложения, особенно в условиях применения компьютерной техники.

Становление теории матриц относят к середине XIX века, и до сих пор она остается важным инструментом исследования, хорошо приспособленным к запросам практики. Здесь мы рассмотрим простейшие вопросы матричного исчисления.

Определение. Прямоугольная таблица чисел $a_{ik}(i=1,2,...,m;k=1,2,...,n)$, состоящая из m строк и n столбцов, называется **матрицей размера** $m\times n$ и обозначается так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1.44}$$

или $\|a_{ik}\|$ $(i=1,2,...,m;\ \ k=1,2,...,n)$.

Часто матрицу обозначают одной заглавной буквой, например матрица A,B и т.д. Числа, образующие матрицу, называются ее **элементами**. Каждый элемент a_{ik}

имеет два индекса; первый индекс i обозначает номер строки, второй индекс k - номер столбца. Матрица (1.44) - матрица общего вида.

Рассмотрим отдельные частные случаи матриц.

1) $n=1$. Если матрица A имеет размер $m\times 1$, то она называется **одностолбцовой** матрицей:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{Vmatrix}.$$

2) $m=1$. Если матрица A имеет размер $1\times n$, то она называется **однострочной** матрицей:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{Vmatrix}.$$

3) $m=n$. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется **квадратной**. Число строк, равное числу столбцов, называется **порядком квадратной матрицы**. В частности, квадратная матрица первого порядка - это просто число. У квадратной матрицы n-го порядка совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, расположенных на диагонали, соединяющей левую верхнюю вершину матрицы с правой нижней вершиной, называется **главной диагональю** матрицы. Совокупность элементов, расположенных на второй диагонали, называется **побочной диагональю**. Для определителя квадратной матрицы A используются обозначения: $\det A$ или ΔA, или $D(A)$.

Квадратную матрицу, все элементы которой, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то есть

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

называют **диагональной**.

Диагональная матрица n-го порядка, все диагональные элементы которой равны единице, называется **единичной** и обозначается E_n или просто E:

$$E=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{Vmatrix}.$$

4) Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** матрицей и обозначается O:

$$O=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix}.$$

Если необходимо указать число строк и столбцов нулевой матрицы, то пишут O_{mn}.

Особое значение имеет единичная матрица E, играющая в матричном исчислении ту же роль, что и число 1 в элементарной алгебре, и нулевая матрица O, роль которой аналогична роли числа нуль в элементарной алгебре.

Данное выше определение матрицы предполагает, что определены:

1. Понятие равенства матриц,
2. Сложение матриц,
3. Умножение матрицы на число,
4. Умножение матриц.

Указанный комплекс понятий и операций лежит в основе матричного исчисления. Его становление относят к середине XIX века, но полноту и изящество оно приобрело позднее, вместе с развитием линейной алгебры.

Равенство матриц и линейные операции с матрицами

1. Равенство матриц.

Определение. Две матрицы A и B называются **равными**, если имеют одинаковый размер и если равны соответствующие элементы матриц

$$a_{ik}=b_{ik}(i=1,2,...,m;\quad k=1,2,...,n).$$

При этом пишут

$$A=B. \tag{1.45}$$

Заметим, что матричное равенство (1.45) равносильно $m\cdot n$ числовым равенствам:

$$a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12},..., a_{mn}=b_{mn}.$$

2. Сложение матриц

Операция сложения матриц определяется только для матриц, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Определение. Суммой $A+B$ матриц A и B, имеющих одинаковый размер, называется матрица C, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, то есть

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad \begin{pmatrix} i = 1,2,...,m \\ k = 1,2,...n \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

Для суммы матриц A и B используется обозначение

$$C = A + B.$$

Таким образом, если $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{Vmatrix}$; $\quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{Vmatrix}$, то

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Свойства операции сложения (аналогичны свойствам сложения чисел).

1. Переместительное свойство

$$A + B = B + A.$$

2. Сочетательное свойство

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

3. Сумма любой матрицы A и нулевой матрицы O того же размера равна матрице A:

$$A + O = A.$$

Таким образом, нулевая матрица в матричном исчислении играет роль нуля в алгебре чисел.

3. Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы A **на число** λ называется матрица B, каждый элемент которой равен произведению этого числа на соответствующий элемент матрицы A, то есть

$$b_{ik} = \lambda a_{ik} \quad (i = 1, 2, ..., m; \quad k = 1, 2, ..., n).$$

Для произведения матрицы A на число λ используются обозначения

$$B = \lambda A.$$

Таким образом, если

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{Vmatrix},$$

то

$$B = \lambda A = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mm} \end{Vmatrix}. \tag{1.47}$$

Пример. Найти произведение матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

на число $\lambda = -3.$

Решение. В соответствии с определением, имеем

$$B = -3A = -3\begin{Vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6 & 12 \\ -9 & -3 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1. Распределительное свойство относительно числового и матричного множителей:

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A, \tag{1.48}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \tag{1.49}$$

где λ, μ - любые числа.

2. Сочетательное свойство относительно числового множителя:

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A. \tag{1.50}$$

3. $$1 \cdot A = A. \tag{1.51}$$

4. $$\lambda \cdot O_{mn} = O_{mn}, \tag{1.52}$$

где O_{mn} − нулевая матрица любого размера.

5. $$\lambda \cdot O_{mn} = O_{mn}, \qquad (1.53)$$

Для матриц одинакового размера можно определить разность $A - B$ с помощью равенства

$$A - B = A + (-1)B. \qquad (1.54)$$

Умножение матриц

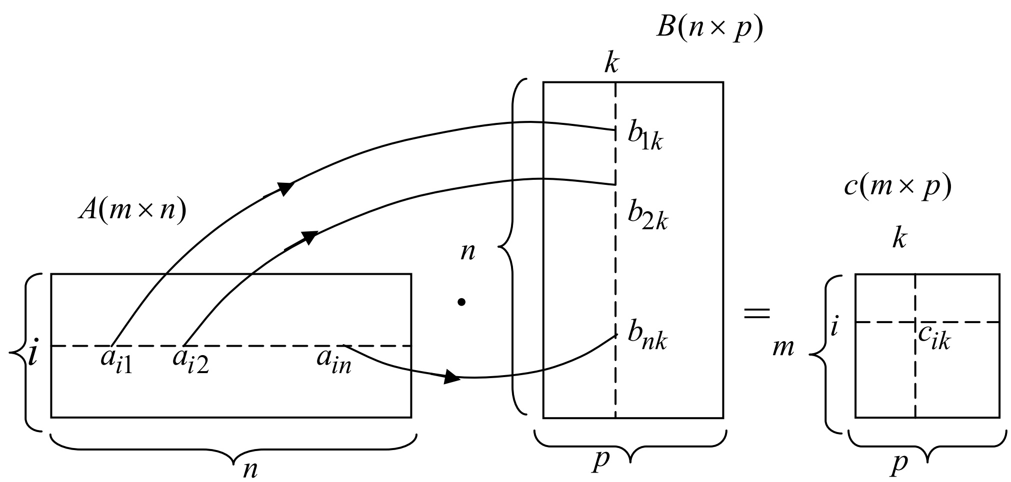
Операция умножения двух матриц определена только для тех случаев, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк у второго.

Определение. Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times p$ называется матрица C размера $m \times p$, каждый элемент которой c_{ik} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B, то есть

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} \quad \left(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., p\right) \quad . \qquad (1.55)$$

Для произведения матриц A и B используется обозначение $C = A \cdot B$

Это правило условно отражено на схеме.



Умножение матриц не обладает переместительным свойством, т.е. **некоммутативно**.

В связи с этим принято говорить об умножении данной матрицы A на матрицу B слева или справа. Произведение AB называется произведением матрицы A на матрицу B справа, а произведение BA - произведением матрицы A на матрицу B слева.

Исключение составляют так называемые **перестановочные** матрицы, для которых $AB = BA$. Например, матрицы

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{Vmatrix} \text{ и } B=\begin{Vmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{Vmatrix}.$$

перестановочны, так как

$$AB=BA=\begin{Vmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{Vmatrix}.$$

Основные свойства операции умножения матриц

1. Сочетательное свойство относительно числового и матричного множителей:

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B), \tag{1.56}$$

$$(AB)C=A(BC). \tag{1.57}$$

2. Распределительное свойство относительно сложения:

$$(A+B)C=AC+BC. \tag{1.58}$$

3. Транспонирование произведения двух матриц равносильно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке, то есть

$$(AB)^T=B^T A^T. \tag{1.59}$$

4. Определитель произведения квадратных матриц A и B равен произведению определителей этих матриц:

$$D(AB)=D(A)\cdot D(B). \tag{1.60}$$

5 .Произведение произвольной матрицы A размера $m\times n$ на единичную матрицу E_n справа и на единичную матрицу E_m слева равно матрице A, то есть

$$AE_n=A; \quad E_mA=A. \tag{1.61}$$

В частности, для любой квадратной матрицы A n-го порядка

$$AE_n=E_nA=A. \tag{1.62}$$

Обратная матрица

Как известно, для каждого числа $a\neq 0$ существует такое число b, что $a\cdot b=1$. Число b называется обратным для числа a. Распространяя эту идею на квадратные матрицы, поставим вопрос о существовании обратной матрицы, то есть такой матрицы, которая в произведении с данной матрицей дает единичную матрицу E.

Определение. Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует квадратная матрица X**,** удовлетворяющая соотношениям

$$AX=XA=E. \tag{1.63}$$

Всякая матрица X, удовлетворяющая равенствам (1.63), называется **обратной** по отношению к матрице A и обозначается A^{-1}**.**

Можно доказать, что у каждой обратимой матрицы A существует лишь единственная обратная матрица.

В условия (1.63) матрицы A и X входят симметрично. Следовательно, если матрица A - обратная для X, то матрица X - обратная для A, то есть

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad . \tag{1.64}$$

Выясним, при каких условиях квадратная матрица обратима.

Теорема 1.3. Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель не равнялся нулю.

Квадратную матрицу A, определитель которой $D(A)$ отличен от нуля, называют **невырожденной** или **неособенной**. Если $D(A) = 0$, то матрица называется **вырожденной** или **особенной.**

У всякой неособенной матрицы A порядка n существует одна и только одна обратная матрица, которая может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{D(A)} & \frac{A_{21}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D(A)} \\ \frac{A_{12}}{D(A)} & \frac{A_{22}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D(A)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D(A)} & \frac{A_{2n}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D(A)} \end{Vmatrix}. \qquad (1.65).$$

Решение системы линейных уравнений при помощи матриц

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.66}$$

Эта система может рассматриваться как равенство двух одностолбцовых матриц:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Vmatrix}. \tag{1.67}$$

Введем в рассмотрение три матрицы: матрицу A системы (1.66) – квадратную матрицу порядка n (размера $n \times n$)

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (1.68)$$

и две одностолбцовые матрицы: матрицу X из неизвестных и матрицу B из свободных членов.

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Vmatrix}. \qquad (1.69)$$

Тогда по правилу умножения матриц левая часть матричного равенства (1.67) может быть представлена как произведение матриц AX, а правая часть - матрица B. Таким образом, матричное равенство (1.67), а, следовательно, и система n линейных уравнений (1.66) с n неизвестными может быть записана в виде одного матричного уравнения

$$AX = B. \qquad (1.70)$$

Матричное уравнение (1.70) равносильно системе (1.66) и содержит неизвестную матрицу X. Решая это уравнение, то есть, определяя матрицу X, находим сразу значения всех неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Допустим, что определитель матрицы A системы (1.66) отличен от нуля, в этом случае по теореме Крамера система (1.66) совместна и имеет единственное решение. Тогда, умножив обе части матричного уравнения (1.70) на A^{-1} слева, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

откуда, учитывая, что $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, будем иметь

$$X = A^{-1}B. \qquad (1.71)$$

Мы получили решение системы (1.66) в матричном виде. Соотношение (1.71) эквивалентно формулам Крамера, что легко установить, если заменить обратную матрицу ее выражением и произвести умножение матриц. Матричная запись решения (1.71) компактна и красива, но не избавляет нас от вычислений, поскольку матрица A^{-1} нам заранее не дана.

Случай произвольных систем линейных уравнений и решение систем линейных уравнений методом Гаусса рассмотрены в пособии [1].

Решение задач

Задача 1. Умножить матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \text{ на матрицу } B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Так как матрица A имеет три столбца, а матрица B - три строки, то умножение матрицы A на матрицу B возможно, при этом произведением матрицы A на матрицу B будет матрица C, состоящая из двух строк и четырех столбцов.

Вычислим элементы матрицы C

$$c_{11} = (-2)(-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2,$$
$$c_{12} = (-2)2 + 3 \cdot 1 + 0(-3) = -1,$$
$$c_{13} = (-2)(-2) + 3(-1) + 0 \cdot 0 = 1,$$
$$c_{14} = (-2)3 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0,$$
$$c_{21} = 3(-1) + (-1)0 + 1 \cdot 1 = -2,$$
$$c_{22} = 3 \cdot 2 + (-1)1 + 1(-3) = 2,$$
$$c_{23} = 3(-2) + (-1)(-1) + 1 \cdot 0 = -5,$$
$$c_{24} = 3 \cdot 3 + (-1)2 + 1 \cdot 1 = 8.$$

Таким образом,

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что в данном примере может идти речь только о произведении AB матрицы A на матрицу B. Произведение матрицы B на матрицу A не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Задача 2. Вычислить произведения AB и BA, если

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ и } B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2+1 & 6-2 \\ 0-1 & 0+2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2+0 & -1+3 \\ -2+0 & 1+2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Итак, в данном примере оба произведения AB и BA имеют смысл, но $AB \neq BA$.

Задача 3. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Определитель матрицы отличен от нуля, следовательно, матрица неособенная и имеет обратную матрицу A^{-1}, вычисляемую по формуле (1.65). Составим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 2) = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3;$$

По формуле (1.65) найдем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1 & -2 & -5\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2}\end{Vmatrix}.$$

Проверим правильность результата, используя определение обратной матрицы (1.63). Для этого перемножим матрицы A и A^{-1}:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2}\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & -1+2-1 & -\frac{5}{2}+4-\frac{3}{2}\\ 1+0-1 & -2+1+2 & -5+2+3\\ -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & 1+0-1 & \frac{5}{2}+0-\frac{3}{2}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=E.$$

Таким образом, матрица A^{-1} вычислена верно.

Задача 4. Даны матрицы A,B,C. Найти матрицу $P=BC-2A^{-1}$

$$B=\begin{Vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\\ -2 & -1\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{Vmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц B и C

$$BC=K.$$

Это произведение определено, так как число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы C. Матрица $K=BC$ должна иметь две строки и два столбца, то есть должна быть квадратной матрицей второго порядка. Найдем ее элементы по правилу умножения матриц (1.55):

$$k_{11}=(-1)\cdot 2+3\cdot 1+(-2)(-2)=5,$$
$$k_{12}=(-1)\cdot 3+3\cdot 0+(-2)(-1)=-1,$$
$$k_{21}=0\cdot 2+2\cdot 1+1(-2)=0,$$
$$k_{22}=0\cdot 3+2\cdot 0+1(-1)=-1.$$

Таким образом,

$$BC = K = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, то обратная матрица A^{-1} существует и может быть вычислена по формуле (1.65):

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-2) = -2, \qquad A_{21} = (-1)^{1+2}(-3) = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = (-1) \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Окончательно получим

$$P = BC - 2A^{-1} = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + 2 \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

с помощью обратной матрицы.

Решение. Запишем данную систему в виде одного матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{Vmatrix}.$$

Для решения матричного уравнения с помощью обратной матрицы вычислим определитель матрицы A

$$D(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Так как $D(A) \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1}, для вычисления которой найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3;$$

Тогда
$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Найдем решения системы по формуле (1.71):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли решение данной системы: $x_1 = 2$; $x_2 = -5$; $x_3 = 3$.

Вопросы для самопроверки по теме 1.3

1. Какая матрица называется единичной? Как она обозначается?

2. В каком случае определена операция умножения двух матриц?
3. Каков размер матрицы C, являющейся произведением матрицы A размера 2×3 и матрицы B размера 3×2?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
5. По какой формуле может быть вычислена обратная матрица A^{-1} для данной матрицы A порядка n?
6. Каким образом записывается система n линейных уравнений с n неизвестными в виде одного матричного уравнения?
7. Как получить решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричном виде?

1.4. Основы общей алгебры

При изучении данной темы Вам необходимо ознакомиться со следующими вопросами: «Алгебраическая операция», «Группа», «Кольцо», «Поле». Основной материал по указанной теме изложен в [1], гл.3, с.74-81. Для проверки усвоения материала рекомендуется ответить на вопросы для самопроверки, которые помогут вам акцентировать свое внимание на наиболее важных понятиях этой темы.

Вопросы для самопроверки по теме 1.4

1. Говорят, что на множестве G определена алгебраическая бинарная операция, если ……..

2. Множество G с определенной на нем алгебраической операцией (назовем ее умножением) является группой, если………

3. Группа называется абелевой, если ……

4. Как называют операцию в абелевой группе?

5. Является ли группой множество всех невырожденных квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами (относительно операции умножения матриц)?

6. Приведите примеры групп.

7. Какую величину называют порядком группы?

8. Кольцом называется……

9. Является ли верным утверждение: «умножение в кольце обязательно должно обладать ассоциативностью, коммутативностью и единицей»?

10. Кольцо называется ассоциативным, если…..

11. Приведите примеры колец.

12. Справедливо ли утверждение: «все четные числа образуют кольцо без единицы»

13. Докажите, что кольцо образуют все квадратные матрицы *n-го* порядка с произвольными числовыми элементами.

14. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент a имеет обратный a^{-1} называется……..

15. Приведите примеры полей.

16. Продемонстрируйте выполнимость условия ассоциативности для кольца всех комплексных чисел на примере.

17. Телом называется…..

18. Является ли множество всех действительных чисел телом?

2. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Данный раздел содержит следующие темы:

- **2.1. Основные понятия и определения.**
- **2. 2. Перемножение векторов.**

По каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие его примеры. В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров.

После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы № 1 в соответствии со своим вариантом.

2.1. Основные понятия и определения

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Векторы.**
- **Линейные операции над векторами.**
- **Проекции вектора.**
- **Базис векторов на плоскости и в пространстве.**
- **Декартова прямоугольная система координат.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки. Если Вы будете испытывать недостаток информации, обратитесь к [2], глава 1, с. 4-14 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Векторы

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом - точка B. Он обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Она обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$. Для задания вектора необходимо и достаточно задать его длину и направление. Вектор можно переносить параллельно самому себе и откладывать от произвольной точки. Такие векторы называются **свободными.**

Нулевым называется вектор, начало и конец которого совпадают**.** Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$, он не имеет определенного направления, его длина равна нулю.

Единичным вектором называется такой вектор, длина которого равна единице в выбранном масштабе.

Сонаправленными (противоположно направленными) называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их направления совпадают (противоположны). Одинаковая направленность двух векторов обозначается $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а противоположная $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Вектор, противоположно направленный по отношению к вектору $\vec{a}$ и имеющий такую же длину, называют противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначают $(-\vec{a})$.

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{e}$ единичной длины, сонаправленный с $\vec{a}$ (рис. 2.1).

Коллинеарными называются векторы, параллельные одной и той же прямой (рис. 2.2). Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

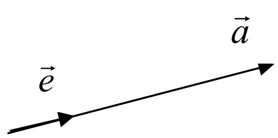


Рис. 2.1

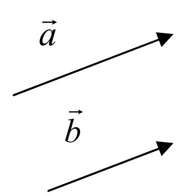


Рис. 2.2

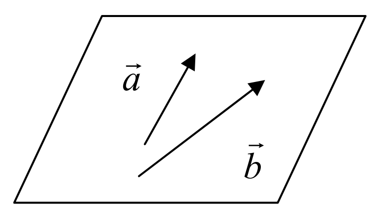


Рис. 2.3

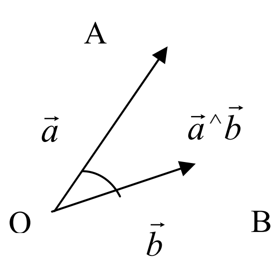


Рис. 2.4

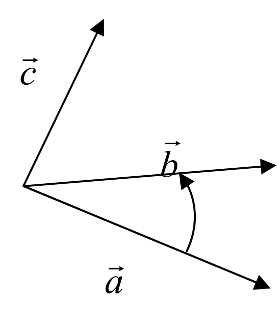


Рис. 2.5

Компланарными называются векторы, параллельные одной и той же плоскости (рис. 2.3).

Равными называются векторы, имеющие одинаковую длину и одинаковое направление.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от одной и той же точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$..

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между лучами, на которых лежат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Угол между векторами обычно обозначается $\vec{a}\hat{}\vec{b}$ так, что $0\le\vec{a}\hat{}\vec{b}\le180^\circ$ (рис. 2.4).

Ортогональными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\hat{}\vec{b}=90^\circ$.

Правой называется упорядоченная тройка ненулевых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$, происходящим против часовой стрелки (рис. 2.5).

В противном случае тройка называется **левой**.

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$, при условии, что конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совпадают («правило треугольника» рис. 2.6). Если начала обоих векторов совместить и построить на них параллелограмм, то сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить как вектор, начало которого совпадает с общим началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец - с противоположной вершиной параллелограмма («правило параллелограмма» рис. 2.7).

Свойства сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность),
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность),
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (поглощение нуля),
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

2. Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{d}$ равный сумме вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$ (рис. 2.8): $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

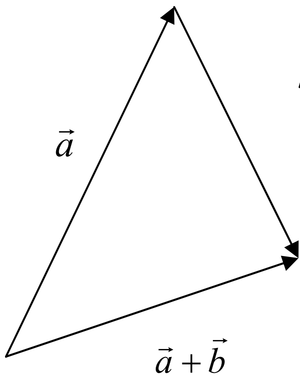


Рис. 2.6

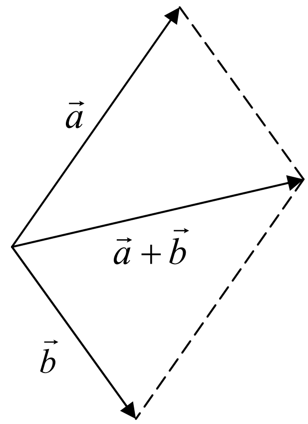


Рис. 2.7

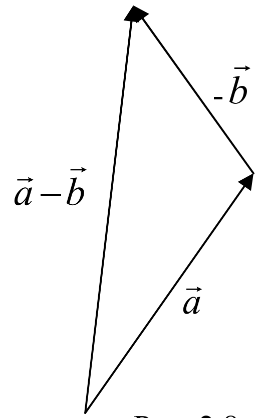


Рис. 2.8

3. Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ **на число** $\lambda \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, сонаправленный с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направленный, если $\lambda < 0$. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda = 0$, то, по определению, произведение считается нулевым вектором. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ обозначается $\lambda\vec{a}$.

Свойства умножения вектора на число:

1. $(\lambda+\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел),
2. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),
3. $\lambda(\beta\vec{a})=(\lambda\beta)\vec{a}$ (ассоциативность),
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (умножение на единицу).

Свойства линейных операций над векторами позволяют производить преобразования выражений, содержащих эти операции, по тем же правилам, которые используются в элементарной алгебре.

Проекции вектора

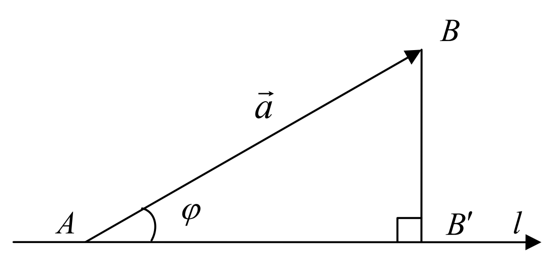


Рис. 2.9

Осью называется прямая, на которой выбрано одно из двух возможных направлений, зафиксирована точка, называемая началом, и выбран масштаб для измерения длин. Выбранное направление на оси удобно задавать с помощью орта $\vec{e}$.

Пусть задана ось l и вектор $\vec{a}$. Отложим вектор $\vec{a}$ от произвольной точки A, лежащей на оси, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ (рис. 2.9). Опустим перпендикуляр BB' из точки B на ось

l.

Проекцией вектора $\vec{a}$ **на ось** l называется число

$$Пр_l\vec{a} = \begin{cases} AB', \text{ если } \overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow l \\ -AB', \text{ если } \overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow l \end{cases},$$

где AB' длина соответствующего отрезка. Когда A совпадает с B', $Пр_l\vec{a}=0$. Очевидно, что

$$\overrightarrow{AB'} = Пр_l\vec{a}\cdot\vec{e}.$$

Свойства проекций:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла между вектором $\vec{a}$ и осью l, т.е.

$$\text{Пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi, \qquad (2.1)$$

где φ - угол между осью l и вектором $\vec{a}$.

2. Проекция суммы векторов равна сумме проекций, т.е.

$$\text{Пр}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Пр}_l\vec{a} + \text{Пр}_l\vec{b}.$$

3. При умножении вектора на число его проекция также умножится на это число, т.е.

$$\text{Пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{Пр}_l\vec{a}.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ **на ненулевой вектор** $\vec{b}$ называется проекция $\vec{a}$ на любую ось, одинаково направленную с $\vec{b}$. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, и можно утверждать, что $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.

Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис векторов на плоскости и в пространстве

Линейной комбинацией системы векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется сумма произведений этих элементов на произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Линейно зависимой называется такая система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, в которой из равенства нулю их линейной комбинации

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

следует существование хотя бы одного ненулевого коэффициента $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ данной комбинации.

Линейно независимой называется система векторов, в которой указанное равенство возможно только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ линейно зависима, тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Используя это условие, можно утверждать следующее:

1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
2. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
3. Четыре и более вектора всегда линейно зависимы.

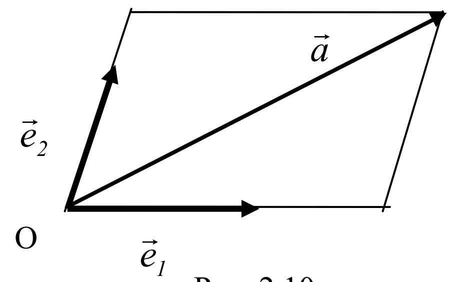


Рис. 2.10

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, отложенных от одной точки.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некомпланарных векторов, отложенных от одной точки.

Ортонормированным называется базис, все образующие векторы которого взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Выберем на плоскости некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (рис. 2.10)

Разложением вектора $\vec{a}$ **по базису** векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется запись вектора $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 .$$

Координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе называются коэффициенты x, y в этом разложении. Тот факт, что координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ равны x, y, обычно записывается в форме $\vec{a} = (x, y)$.

Декартова прямоугольная система координат

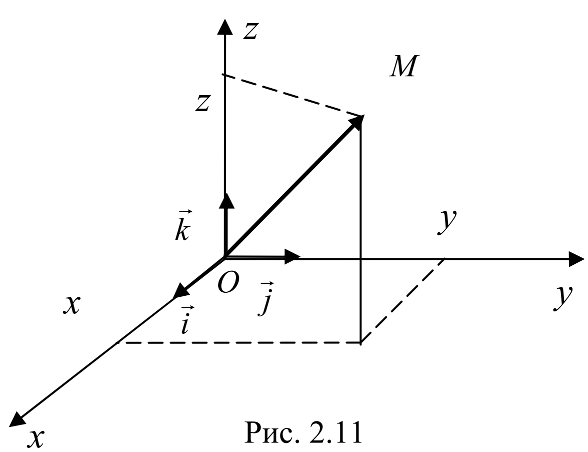


Рис. 2.11

Зафиксируем в пространстве произвольную точку O и назовем её началом координат. Через эту точку проведем три взаимно-перпендикулярных оси с ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, образующих правую тройку векторов. Эти оси называют координатными осями абсцисс, ординат и аппликат и обозначают соответственно Ox, Oy и Oz. Совокупность точки O и координатных осей называют декартовой прямоугольной системой координат (рис. 2.11).

Декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$ относительно данной системы координат $Oxyz$ назовем упорядоченную тройку чисел (x, y, z), где $x = Пр_{\vec{i}}\vec{a}$, $y = Пр_{\vec{j}}\vec{a}$, $z = Пр_{\vec{k}}\vec{a}$. Ясно, что имеет место равенство

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

Тот факт, что вектор $\vec{a}$ отождествляется с упорядоченной тройкой (x,y,z), принято записывать так: $\vec{a} = (x,y,z)$.

Декартовыми прямоугольными координатами точки M относительно данной системы координат $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, так что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

При этом используется запись $M(x,y,z)$. Аналогично вводится декартова прямоугольная система координат на плоскости.

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$, согласно теореме Пифагора, находится по формуле

$$\overrightarrow{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Направляющими косинусами и вектора $\overrightarrow{OM}$ называются косинусы углов α, β и γ, которые этот вектор образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Ясно, что $x = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\alpha,\ y = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\beta,\ z = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\gamma$, откуда

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Возведя три последних равенства в квадрат и сложив их, получим соотношение, связывающее углы α, β и γ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Пусть имеются два вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Справедливы следующие утверждения:

1. Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых, т.е.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)\,. \qquad (2.2)$$

2. Координаты произведения вектора на число k равны произведению соответствующих координат на это число, т.е.

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)\,. \qquad (2.3)$$

Используя указанные операции над векторами в координатной форме, можно получить следующие важные соотношения:

1. Координатный признак равенства векторов: в фиксированной системе координат векторы $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты, т.е.

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2. \tag{2.4}$$

2. Выражение координат вектора через координаты его конца и начала: если координаты точек $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A). \tag{2.5}$$

3. Координатный признак коллинеарности векторов: вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}. \tag{2.6}$$

При этом если одна из координат, например $y_2=0$, то и $y_1=0$.

Вопросы для самопроверки по теме 2.1

1. Дайте определение вектора.
2. Продолжите определение: ”векторы называются коллинеарными, если….”
3. Продолжите определение: ”векторы называются компланарными, если….”
4.Что называется суммой векторов? Какими свойствами обладает операция сложения векторов?
5. Как определяется произведение вектора на число? Какими свойствами оно обладает?
6. Продолжите определение: ”проекцией вектора на ось называется…...”
7. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах проекций.
8. Что такое линейная зависимость и линейная независимость векторов?
9. Продолжите определение: ”базисом векторов на плоскости называется…...”
10. Дайте определение декартовой прямоугольной системы координат на плоскости.
11. Продолжите определение: ”координатами точки в данной системе координат называются…...”
12.Что понимают под координатами вектора в данной системе координат?
13. Как производятся линейные операции над векторами в координатной форме?

2.2. Перемножение векторов

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Скалярное произведения векторов.**
- **Векторное произведения векторов.**

- **Смешанное произведения векторов.**

При недостатке информации обратитесь к [2], глава 1, с. 14-28 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений. После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы № 1 в соответствии со своим вариантом из № 11-20.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$ и вычисляется так:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}). \tag{2.7}$$

Если $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$ то, по определению, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Скалярным квадратом данного вектора называется скалярное произведение вектора на себя самого; оно равно квадрату длины вектора $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Если известны декартовы координаты векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,то их скалярное произведение можно записать в виде

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{2.8}$$

Основные свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность),
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),
3. $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (ассоциативность относительно скалярного множителя),
4. Признак ортогональности: для того, чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{2.9}$$

5. Длину вектора $\vec{a}=(x,y,z)$ при известных его координатах можно найти по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2.10}$$

6. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ равен

$$\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{2.11}$$

7. Скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора на проекцию второго на направление первого, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{2.12}$$

Векторное произведение векторов

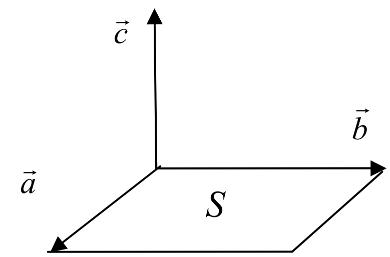


Рис. 2.12

Пусть заданы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.12).

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на неколлинеарный ему вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, такой что:

а) длина вектора $\vec{c}$ численно равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т.е.

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}),$$

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

в) тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ правая.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, а также если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то по определению принимается $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Основные свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ (антикоммутативность),

2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

3. $\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (ассоциативность),

4. Признак коллинеарности: для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}.$$

5. Если координаты векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ известны, то их векторное произведение можно найти следующим образом:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

6. Модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от одной точки:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|. \tag{2.14}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называют число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}\times\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен нулю, то по определению $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

Основные свойства смешанного произведения.

1. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, например:

$$(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

2. При умножении одного из сомножителей на постоянное число смешанное произведение умножается на это число, например:

$$(\vec{a},\vec{b},(\lambda\vec{c})) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

3. При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, поэтому здесь важен порядок сомножителей, но безразлично, где стоит знак векторного, а где скалярного произведения, т.е.

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}\,.$$

4. Признак компланарности: смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его сомножители компланарны, т.е.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0. \tag{2.15}$$

5. При известных декартовых прямоугольных координатах векторов $a=(x_1;y_1;z_1)$, $b=(x_2;y_2;z_2)$ и $c=(x_3;y_3;z_3)$, имеем

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

6. Смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ левая:

$$V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|. \tag{2.17}$$

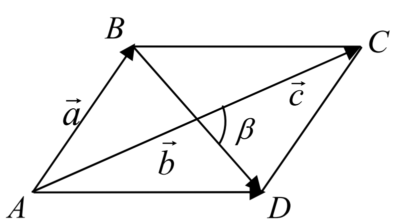


Рис. 2.13

Решение примеров

Пример 1. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2,1,0)$ и $\vec{b}=(0,-2,1)$.

Решение. Построим параллелограмм, сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложив их из общей точки A (рис. 2.13). Введем в рассмотрение два вектора: $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{BD}$. Угол между диагоналями параллелограмма, и, соответственно, между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ обозначим β. Для вычисления величины угла между векторами используем формулу (2.11). Нам понадобятся координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Выразим эти векторы через известные $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пользуясь правилами сложения и вычитания векторов можем записать:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \text{ и } \vec{d}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Используя формулу (2.5), вычислим координаты $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{c}=(2+0,\ 1+(-2),\ 0+1)=(2,-1,1),$$
$$\vec{d}=(0-2,\ -2-1,\ 1-0)=(-2,-3,1).$$

Подставим эти координаты в (2.11):

$$\cos\beta=\cos(\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d})=\frac{2(-2)+(-1)(-3)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}}=0$$

По найденному косинусу угла определяем сам угол $\beta=90^0$.

Ответ: $\beta=90^0$.

Пример 2. Определить значения x, при котором длина вектора $\vec{a}=x\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ равна 5.

Решение. Выразим длину вектора $\vec{a}$ через его координаты по (2.10):

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{x^2+13}=5 \text{ , откуда } x^2+13=25.$$

Тогда $x^2=12$ или $x=\pm 2\sqrt{3}$.

Ответ: $x=\pm 2\sqrt{3}$.

Пример 3. При каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ перпендикулярны друг другу?

Решение. Используем признак ортогональности векторов (2.9):

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \text{ тогда}$$

$$m\cdot 3-1\cdot 3+0\cdot 4=0\ ,\quad 3\cdot m-3=0\ ,\quad m=1.$$

Ответ: m=1.

Пример 4. Даны координаты вершин треугольника A(2,-1,3), B(1,1,1), C(5,-2,5). Найти площадь треугольника.

Решение. Рассмотрим два вектора: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, построенного на этих двух векторах. По формуле (2.15) площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения двух векторов, поэтому площадь треугольника ABC есть половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Определим координаты векторов по формуле (2.5) как разность координат точек конца и начала вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (1\text{-}2,\ 1\text{-}(\text{-}1),\ 1\text{-}3)=(-1,2,-2), \qquad \overrightarrow{AC} =(5\text{-}2,\ \text{-}2\text{-}(\text{-}1),\ 5\text{-}3)=(3,-1,2)$$

Найдем векторное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j} - 5\cdot\vec{k}.$$

Длина этого вектора равна:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,| = \frac{3\sqrt{5}}{2}(ед^2).$$

Ответ: $S_{ABD} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}(ед^2)$.

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника $A(1,2,3)$, $B(3,3,0)$, $C(4,6,3)$. Определить проекцию стороны AB на основание треугольника AC.

Решение. Рассмотрим вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Их координаты определяем по (2.5):

$$\overrightarrow{AB} =(2,1,-3),\quad \overrightarrow{AC} = (3,4,0).$$

Проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ определим на основании (2.12):

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\,\overrightarrow{AC}\,|\cdot Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}, \text{ откуда } Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Найдем скалярное произведение векторов по (2.8):

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + (-3)\cdot 0 = 10,$$

а длину $\overrightarrow{AC}$ по (2.10): $|\,\overrightarrow{CA}\,| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$ и рассчитаем $Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{10}{5} = 2$. Положительное значение проекции означает, что угол между векторами острый.

Ответ: $Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = 2$.

Пример 6. Даны три вектора $\vec{a}$=(4,-3,2), $\vec{b}$=(3,-2,5) и $\vec{c}$=(1,0,-3). Найти объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

Решение. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составляет одну шестую часть от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, который можно найти, используя свойство 6 смешанного произведения векторов. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по (2.16):

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 24-15+0+4-0-27=-14.$$

Используя формулу (2.17), имеем

$$V = \frac{1}{6}|\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,| = \frac{|-14|}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}(ed^3)\,.$$

Ответ: $V = 2\frac{1}{3}(ed^3)$.

Пример 7. Параллелепипед построен на векторах $\vec{a}$=(4,-3,2), $\vec{b}$=(3,-2,5) и $\vec{c}$=(1,0,3). Найти длину высоты, опущенной из конца вектора $\vec{b}$ на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Решение. Высоту параллелепипеда можно выразить через его объем V и площадь основания S следующим образом: $h=\frac{V}{S}$.

Объем параллелепипеда определим, используя свойство 6 смешанного произведения векторов по (2.17): $V=|\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,|$, тогда

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24-15+0+4-0+27=-8 \quad \text{и} \quad V=|-8|=8.$$

В основании параллелепипеда лежит параллелограмм, поэтому площадь основания S найдем, используя свойство 6 векторного произведения векторов:

$$S=|\,\vec{a}\times\vec{c}\,|,$$

тогда по (2.13)

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i}-10\vec{j}+3\vec{k}, \text{ откуда } S=\sqrt{(-9)^2+(-10)^2+3^2}=\sqrt{190}\,.$$

Вычислим длину высоты: $h=\dfrac{8}{\sqrt{190}}(ед)$.

Ответ: $h=\dfrac{8}{\sqrt{190}}(ед)$.

Пример 8. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=4$, а угол между этими векторами равен 30^0.

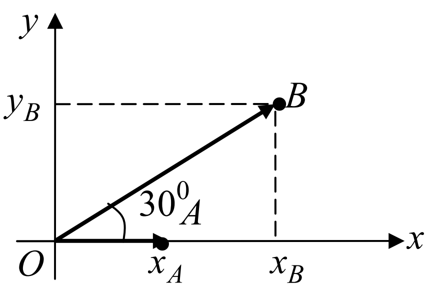


Рис. 2.14

Решение. Введем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox была направлена по вектору $\overrightarrow{OA}$ (см. рис. 2.14). Тогда $\overrightarrow{OA}=x_A\cdot\vec{i}=\sqrt{3}\cdot\vec{i}$,

$$\overrightarrow{OB}=x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}=$$

$$=\left(\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos 30^0\right)\vec{i}+\left(\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\sin 30^0\right)\vec{j}=$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+4\cdot\frac{1}{2}\vec{j}=2\sqrt{3}\,\vec{i}+2\vec{j}.$$

Обозначим векторы, идущие по диагоналям параллелограмма, через $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$. Тогда

$$\vec{d}_1=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3\sqrt{3}\,\vec{i}+2\vec{j},\quad \vec{d}_2=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\sqrt{3}\,\vec{i}+2\vec{j}.$$

Поэтому $\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{31}$, $\left|\vec{d}_2\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$.

Ответ: $\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{31}$, $\left|\vec{d}_2\right|=\sqrt{7}$.

Пример 9. Найти вектор $\vec{a}$, длина которого равна $3\sqrt{30}$, перпендикулярный векторам $\vec{b}$=(1,-1,3) и $\vec{c}$=(2,-3,-4) и образующий острый угол с осью Oz.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{a}$=(x,y,z). Запишем условия перпендикулярности векторов, используя равенство (2.9):

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow 1\cdot x+(-1)y+3z=0$$
$$\vec{a}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow 2\cdot x+(-3)y+(-4)z=0$$

Выразим длину вектора $\vec{a}$ через его координаты по формуле (2.10):

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3\sqrt{30}\ \text{ или }\ x^2+y^2+z^2=270.$$

Запишем все три уравнения в систему и решим ее:

$$\begin{cases} x-y+3z=0, \\ 2x-3y-4z=0, \\ x^2+y^2+z^2=270. \end{cases}$$

Исключим из первых двух уравнений переменную x. Для этого умножим первое уравнение на (-2), сложим со вторым и выразим y через z:

$$\begin{cases} -2x+2y-6z=0, \\ 2x-3y-4z=0, \end{cases}$$

получим $-y-10z=0$, откуда следует $y=-10z$.

Аналогично исключим из первых двух уравнений переменную y. Для этого умножим первое уравнение на (-3), сложим со вторым и выразим x через z:

$$\begin{cases} -3x+3y-9z=0, \\ 2x-3y-4z=0, \end{cases}$$

следовательно, $-x-13z=0$ и $x=-13z$.

Подставим найденные x и y в третье уравнение системы и решим это уравнение:

$$(-13z)^2+(-10z)^2+z^2=270,$$

$$270z^2=270,$$

$$z^2=1, z=\pm1.$$

По условию угол вектора $\vec{a}$ с осью Oz острый, поэтому проекция вектора на ось должна быть положительной, следовательно, $z=1$. Далее найдем $y=-10z$=-10 и $x=-13z=-13$. Итак, окончательно $\vec{a}$ = (-13,-10,1).

Ответ: $\vec{a}$ = (-13,-10,1).

Вопросы для самопроверки по теме 2.2

1. Продолжите определение: ”Скалярным произведением векторов называется…...”
2. Перечислите свойства скалярного произведения векторов.
3. Докажите теорему о выражении скалярного произведения через координаты сомножителей.
4. Продолжите определение: ”Векторным произведением векторов называется…...”
5. Перечислите свойства векторного произведения векторов.
6. Сформулируйте и докажите теорему о выражении векторного произведения через координаты сомножителей.
7. Дайте определение смешанного произведения векторов, сформулируйте его свойства.
8. Получите выражение смешанного произведения векторов через координаты сомножителей.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Данный раздел включает в себя шесть тем:

3.1. Системы координат.
3.2. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
3.3. Уравнения плоскости и прямой в пространстве.
3.4. Кривые второго порядка.
3.5. Поверхности второго порядка.
3.6. Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы.

По каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие его примеры.

В рубрике «решение задач» дан подробный разбор типовых примеров. После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить три задачи из контрольной работы № 1 в соответствии со своим вариантом.

3.1. Системы координат

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Декартовы системы координат.**
- **Преобразования координат.**
- **Полярные координаты на плоскости.**
- **Цилиндрические координаты в пространстве.**
- **Сферические координаты в пространстве.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки. При возникновениии вопросов следует обратиться к [2], глава 2, с. 29-37.

Декартовы системы координат

Задание некоторой точки O и базиса из двух ненулевых неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ определяет на плоскости систему координат. Точка O называется началом этой системы. Проведем через O две оси в направлениях векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, причем за масштабы на этих осях примем длины векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, соответственно (рис. 3.1).

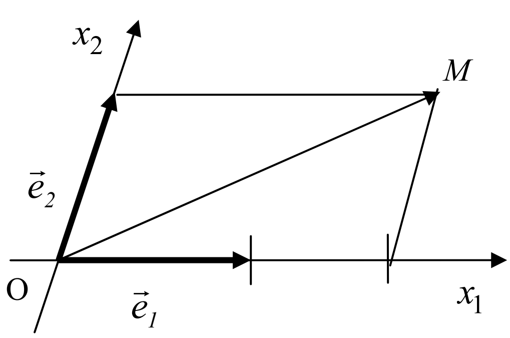


Рис. 3.1

Полученные оси называются координатными. Ось, параллельная $\vec{e}_1$, называется **осью абсцисс**, а ось, параллельная $\vec{e}_2$, - **осью ординат**. Система координат обычно называется **общей декартовой** и обознача-

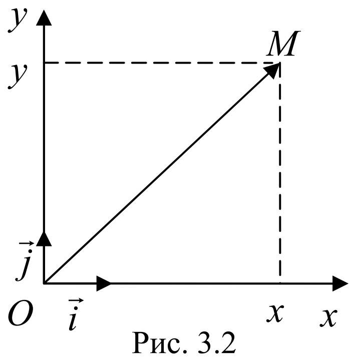


Рис. 3.2

ется $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. В том случае, когда выбран ортономированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, полученная система координат называется **декартовой прямоугольной**.

Декартовыми прямоугольными координатами точки M относительно данной системы координат Oxy называются два числа: x и y – координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ (рис. 3.2). При этом используется запись $M(x,y)$.

Декартовы системы координат в пространстве вводят аналогично.

Преобразование прямоугольных координат

При решении задач часто возникает необходимость перехода от одной системы координат к другой. Такой переход называется **преобразованием координат**.

Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат с одинаковыми базисными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и различными начальными точками O и O' (рис. 3.3). Координаты произвольной точки плоскости M в системе Oxy обозначим через (x,y), а в системе $O'x'y'$ через (x',y').

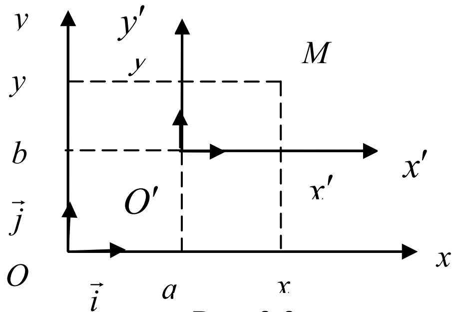


Рис. 3.3

Параллельным переносом называют такое преобразование системы координат, при котором направления осей сохраняются, а начало координат O' новой системы имеет координаты (a,b) относительно старой. При этом связь между старыми и новыми координатами точки выражает формула

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases} \tag{3.1}$$

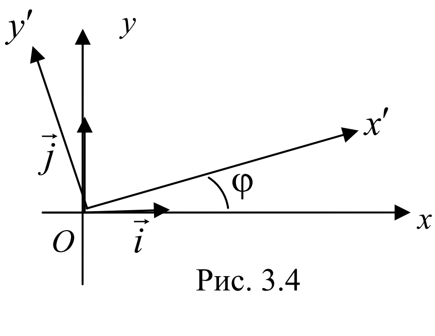


Рис. 3.4

Пусть теперь на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$, причем вторая повернута относительно первой на угол φ (рис. 3.4).

Поворотом системы координат называется преобразование координат, при котором новая система повернута относительно старой на некоторый угол около начала координат. В этом случае формулы, связывающие старые и новые координаты точки, принимают вид:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \\ y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'. \end{cases} \tag{3.2}$$

Любое общее преобразование координат можно свести к последовательному выполнению в произвольном порядке рассмотренных двух преобразований. Связь между координатами точки в этом случае устанавливают следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = a + \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \\ y = b + \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'. \end{cases} \tag{3.3}$$

Полярные координаты

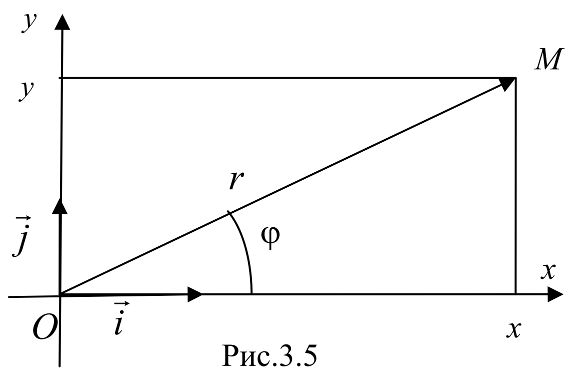


Рис.3.5

Выберем некоторую точку O на плоскости и луч l, исходящий из этой точки. Точка O называется **полюсом**, а луч l **осью** полярной системы координат (рис. 3.5).

Полярными координатами точки M называются два числа: расстояние r от точки M до полюса и угол поворота φ от полярной оси l до луча OM, отсчитываемый против часовой стрелки. Координата r называется **полярным радиусом** точки, а координата φ **полярным углом**, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Часто для обозначения полярного радиуса вместо буквы r используют букву ρ.

Связь между прямоугольными декартовыми координатами и полярными координатами произвольной точки плоскости в том случае, когда за полюс выбрано начало прямоугольной системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью оси Ox (рис. 3.5) устанавливают следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{3.4}$$

Цилиндрические координаты

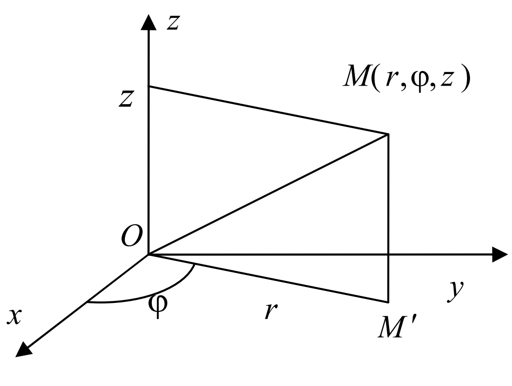


Рис. 3.6

Обобщением полярных координат на случай пространства является цилиндрическая система координат. Спроектируем в пространстве произвольную точку M на плоскость Oxy, на которой введена полярная система координат, и выберем ось, перпендикулярную этой плоскости, начало которой совпадает с полюсом полярной системы. Эта ось называется осью цилиндрической системы.

Цилиндрическими координатами точки M пространства называются 3 числа: r и φ - полярные координаты проекции M' данной точки на плоскость Oxy, а также z - проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Oz системы (рис. 3.6).

Если оси декартовой системы расположены относительно цилиндрической, как изображено на рис. 3.6, то формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{3.5}$$

Сферические координаты

Чтобы ввести сферическую систему координат, выберем в пространстве, как и в случае цилиндрической системы, плоскость с заданной на ней полярной системой и ось, перпендикулярную этой плоскости.

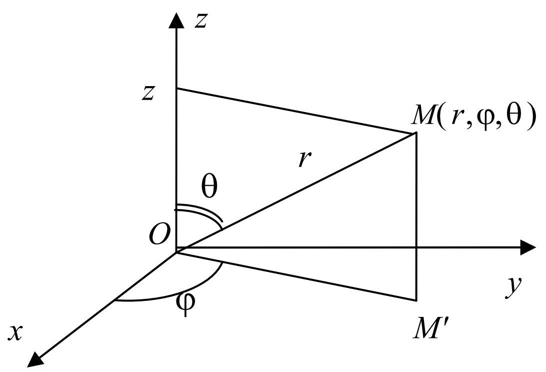


Рис.3.7

Сферическими координатами точки M пространства называются три числа: r - расстояние до точки M от начала O, φ - полярный угол проекции точки M на плоскость Oxy, θ - угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 3.7).

Указанные числа изменяются в пределах: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Если сферическую систему согласовать с прямоугольной так, как показано на рис. 3.7, то легко получить формулы перехода от декартовых координат к сферическим, использовав тот факт, что $OM' = r\sin\theta$:

$$\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z = r\cdot\cos\theta. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решение примеров

Пример 1. В системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ даны точки $A(2;1)$ и $B(-1;2)$. Найти расстояние $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ между точками A и B, если известно, что $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$ и $(\vec{e}_1 \hat{} \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Для определения расстояния $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ между точками A и B воспользуемся свойством 5 скалярного произведения векторов, тогда

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}$$

Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ как разность координат конца и начала вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2; 2-1) = (-3;1)$$

Найдем $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2$, используя свойства скалярного произведения векторов

$$\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)^2 = (-3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)^2 = (-3\vec{e}_1)^2 + 2(-3\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_2 + (\vec{e}_2)^2 =$$

$$= 9(\vec{e}_1)^2 - 6\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + (\vec{e}_2)^2 = 9\,|\,\vec{e}_1\,|^2 - 6\,|\,\vec{e}_1\,|\cdot|\,\vec{e}_2\,|\cos(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + |\,\vec{e}_2\,|^2 .$$

Подставив в полученную выше формулу исходные данные, получим

$$\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)^2 = 9\cdot 2^2 - 6\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1^2 = 36 - 6 + 1 = 31.$$

Откуда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{31}.$

Пример 2. В системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ даны точки $A(2;1)$, $B(-1;2)$ и $C(1;0)$. Найти площадь S треугольника ABC, если известно, что $|\,\vec{e}_1\,| = 2$, $|\,\vec{e}_2\,| = 1$ и $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Найдем координаты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2; 2-1) = (-3;1), \qquad \overrightarrow{AC} = (1-2; 0-1) = (-1;-1).$$

По свойству 6 векторного произведения $S = \dfrac{|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,|}{2}$. Вычислим $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, используя свойства векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\times(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2) =$$

$$= 3\vec{e}_1\times\vec{e}_1 - \vec{e}_2\times\vec{e}_1 + 3\vec{e}_1\times\vec{e}_2 - \vec{e}_2\times\vec{e}_2 = \vec{0} + \vec{e}_1\times\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1\times\vec{e}_2 - \vec{0} = 4\vec{e}_1\times\vec{e}_2 .$$

Тогда $S = \dfrac{1}{2}\cdot 4\,|\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2\,|$, где $|\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2\,| = |\,\vec{e}_1\,|\cdot|\,\vec{e}_2\,|\cdot\sin(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = 2\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. После соответствующей подстановки получим $S = 2\sqrt{3}(ед^2)$.

Ответ: $S = 2\sqrt{3}(ед^2)$.

Пример 3. Найти уравнение кривой $y^2 - x^2 = 2$ в декартовой прямоугольной системе координат $O'x'y'$, повернутой вокруг начала координат на угол 45^0. Как называется эта кривая?

Решение. Воспользуемся формулой (3.2) преобразования координат. Учитывая, что $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Подставим эти значения x и y в уравнение кривой:

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(x' - y')^2 = 2$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим уравнение кривой в новой системе координат: $x' \cdot y' = 1$. Это гипербола.

Ответ: уравнение гиперболы $y^2 - x^2 = 2$ в новой системе координат выглядит следующим образом: $x' \cdot y' = 1$.

Пример 4. Найти уравнение кривой $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ в декартовой прямоугольной системе координат $O'x'y'$, начало которой перенесено в точку O' (0,-1).

Решение. Воспользуемся формулой (3.1) преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

и подставим значения x и y в уравнение. После элементарных преобразований получим уравнение кривой, записанное в новой системе координат:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Это эллипс (см. ниже тему “Кривые второго порядка”).

Пример 5. Записать уравнение окружности $(x+3)^2 + y^2 = 9$ в полярных координатах.

Решение. Перепишем уравнение данной окружности в виде $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и подставим x и y согласно (3.4): $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 + 6r\cos\varphi = 0$. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем $r^2 = -6r\cos\varphi$. Отсюда следует, что данная окружность в выбранной полярной системе координат задается уравнением $r = -6\cos\varphi$.

Ответ: $r = -6\cos\varphi$.

Пример 6. Записать уравнение параболоида (см. ниже тему “Поверхности второго порядка”) $2x^2 + 2y^2 = 2 - z$ в цилиндрической системе координат.

Решение. Используя формулы преобразования координат (3.5), перепишем данное уравнение в виде: $2(r\cos\varphi)^2 + 2(r\sin\varphi)^2 = 2 - z$.

Упростим выражение $2r^2 = 2 - z$ или $z = 2(1 - r^2)$.
Получили преобразованное уравнение параболоида.

Ответ: $z = 2(1 - r^2)$.

Вопросы для самопроверки по теме 3.1

1.Продолжите определение: “Общими декартовыми системами координат называются….. ”. Как определяются координаты точки в таких системах?

2. Запишите формулы параллельного переноса прямоугольных координат.

3. Выведите формулы поворота прямоугольных координат.

4. Продолжите определение: “Полярной системой координат называется.”

5. Укажите связь полярной и декартовой прямоугольной системы координат .

6. Продолжите определение: “Цилиндрической системой координат называется….. ”

7. Выведите формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым прямоугольным.

8. Продолжите определение: “Сферической системой координат называется….. ”

9. Выведите формулы перехода от сферических координат к декартовым прямоугольным.

3.2. Различные виды уравнений прямой на плоскости

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Различные виды уравнений прямой на плоскости.**
- **Угол между прямыми на плоскости.**
- **Расстояние от точки до прямой.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки. При возникновении вопросов следует обратиться к [2], глава 3, с. 38-42.

Различные виды уравнений прямой на плоскости

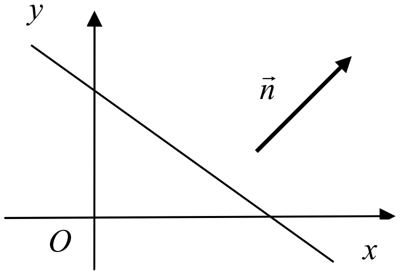


Рис. 3.8

1. Общее уравнение прямой на плоскости

Общим уравнением прямой на плоскости называется уравнение первой степени с двумя переменными x и y

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.7}$$

где A и B одновременно не обращаются в ноль.

Можно показать, что всякое уравнение вида (3.7) определяет на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy прямую линию и всякая прямая на плоскости может быть представлена в виде (3.7). При этом вектор $\vec{n}=(A,B)$ перпендикулярен этой прямой и поэтому называется **нормальным вектором прямой** (рис. 3.8).

Часто при решении конкретных геометрических задач удобней применять иные формы уравнений прямой, называемые специальными.

2. Уравнение прямой в форме с угловым коэффициентом

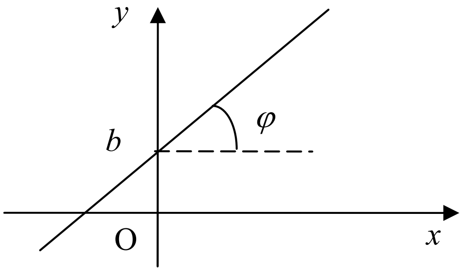


Рис.3.9

Если прямая не параллельна оси Oy, то коэффициент B в уравнении (3.7) не равен нулю. Разрешив уравнение (3.7) относительно переменной *y,* получим

$$y = kx + b\ , \tag{3.8}$$

где $k=-\dfrac{A}{B},\quad b=-\dfrac{C}{B}.$

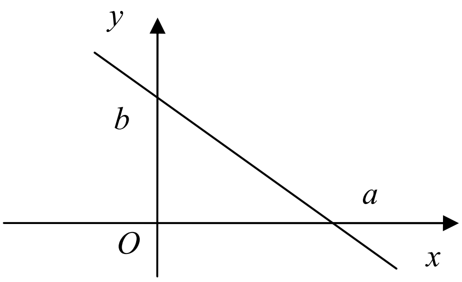


Рис. 3.10

Пусть φ означает угол наклона прямой к оси *Ox.* Тогда можно показать, что коэффициент $k=\mathrm{tg}\varphi$ и его называют угловым коэффициентом прямой. Значение b есть ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рис. 3.9.)

3. Уравнение прямой в отрезках

Если в уравнении (3.7) ни один из коэффициентов не равен нулю, то, поделив все члены уравнения на ($-C$), получим равносильное ему уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{3.9}$$

где $a=-C/A,\quad b=-C/B$.

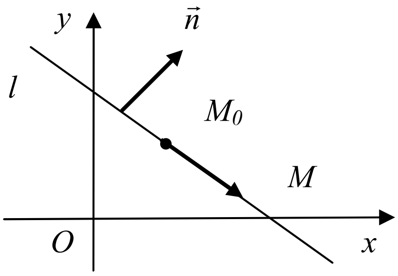


Рис. 3.11

Можно показать, что модули чисел a и b равны длинам отрезков, которые отсекает прямая на осях координат (рис. 3.10).

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору

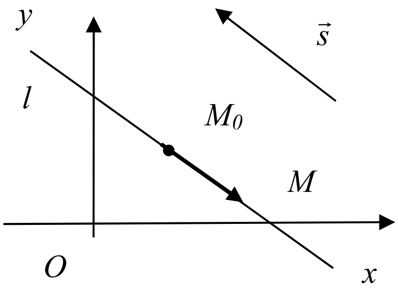


Рис. 3.12

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащая искомой прямой *l,* и нормальный вектор этой прямой $\vec{n}=(A,B)$ (рис. 3.11).

Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ прямой l и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$, лежащий на прямой l и, следовательно, перпендикулярный вектору

$\vec{n}$. Запишем условие перпендикулярности этих векторов в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{3.10}$$

Получили искомое уравнение.

5. Каноническое уравнение прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащая искомой прямой *l,* и вектор $\vec{s}=(m,n)$, коллинеарный этой прямой (рис. 3.12). Вектор $\vec{s}$ называют направляющим вектором прямой *l.*

Запишем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ и $\vec{s}=(m,n)$ в координатной форме:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{3.11}$$

Уравнение вида (3.11) называют **каноническим уравнением** прямой с направляющим вектором $\vec{s}=(m,n)$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$.

6. Параметрические уравнения прямой

Приравняем отношение (3.11) некоторому параметру *t* и выразим через него переменные *x* и *y*. Получим **параметрические уравнения** прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \tag{3.12}$$

где параметр *t* может принимать любое вещественное значение.

7. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ (рис. 3.13). Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка прямой.

Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ и $\overrightarrow{M_0M}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ коллинеарны. Запишем условие их коллинеарности в виде:

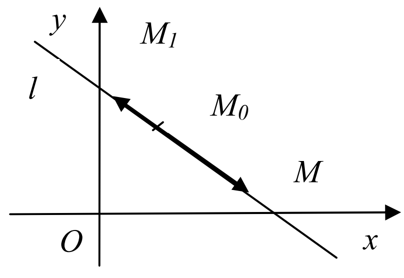


Рис. 3.13

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \tag{3.13}$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через две точки.

Угол между прямыми на плоскости

Величина угла α между прямыми на плоскости определяется по величине угла между их направляющими или нормальными векторами, т.е.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}. \tag{3.14}$$

Если две прямые заданы своими общими уравнениями, то выражение для косинуса угла между ними принимает вид:

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.15}$$

Расстояние от точки до прямой на плоскости

Под расстоянием d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$. Для определения этого расстояния используют формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.16}$$

Решение примеров

Пример 1. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (-1,3) и перпендикулярной прямой $3x$-$4y$+1=0.

Решение. Так как нормальный вектор данной прямой $\vec{n}(3,-4)$ является направляющим вектором для перпендикулярной ей прямой, то искомое уравнение можно записать в канонической форме (3.11):

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4},$$

откуда находим

$$4x+3y-5=0.$$

Ответ: общее уравнение искомой прямой имеет вид: $4x+3y-5=0$.

Пример 2. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2,-3) и параллельной прямой x-$4y$+7=0.

Решение. Примем нормальный вектор данной прямой в качестве нормального вектора искомой и запишем уравнение в виде (3.10)

$$1(x-2) + (-4)(y+3) = 0.$$

откуда находим

$$x-4y-14=0.$$

Ответ: общее уравнение искомой прямой имеет вид $x-4y-14=0$.

Пример 3. Найти точку пересечения прямых

$$2x\text{-}3y\text{-}5=0 \text{ и } x+2y+1=0.$$

Решение. Координаты точки пересечения прямых M удовлетворяют обоим уравнениям, поэтому для их определения решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y-5=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и вычтем результат из первого, получим

$$-7y-7=0,$$

откуда $y=-1$, тогда $x=-2y-1=1$.

Ответ: координаты точки $M(1,-1)$.

Пример 4. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x+3y-6=0$ и $2x-3y+7=0$

Решение. Это расстояние ищем как длину перпендикуляра, опущенного из любой точки первой прямой на вторую. Выберем точку на первой прямой, например, при $x=0$ получим $y=2$. Используем формулу (3.16), учитывая, что координаты нормального вектора прямых $\vec{n}(2,3)$, а значение $C=7$ для второй прямой

$$d=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 2+7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}.$$

Ответ: расстояние между прямыми равно $\sqrt{13}$.

Пример 5. Даны вершины треугольника A (4,5), B(-3,0), C(-8,3) . Написать уравнение медианы, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение. Медиана делит противолежащую сторону на две равные части. Найдем координаты точки M - середины стороны AC - по формулам

$$x=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{4-8}{2}=-2 \text{ и } y=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5+3}{2}=4.$$

Воспользуемся формулой (3.13) - уравнением прямой, проходящей через две точки B(-3,0) и M (-2,4).

$$\frac{x+3}{-2+3}=\frac{y-0}{4-0},$$

После преобразований получим уравнение медианы BM: $4x-y+12=0$.

Ответ: уравнение медианы BM: $4x-y+12=0$.

Пример 6. Даны вершины треугольника A (4,6), B(-4,0), C(-1,-4). Написать уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение. Высота треугольника является прямой, проходящей через известную точку B, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AC}$. Используя координаты точек A и C, будем иметь $\overrightarrow{AC}(-1-4,-4-6)=(-5,-10)$. В соответствие с формулой (3.10) можем написать:

$$-5(x-(-4))+(-10)(y-0)=0,$$

откуда $x+2y+4=0$.

Ответ: уравнение высоты имеет вид $x+2y+4=0$.

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ и отсекающей на оси Ox отрезок, равный 7.

Решение. Найдем координаты второй точки, через которую проходит прямая – это точка пересечения с осью Ox. Координаты этой точки (7,0). Тогда будем иметь в соответствие с формулой (3.13):

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-5}{0-5},$$

или после упрощения $x+y-7=0$.

Ответ: уравнение искомой прямой имеет вид $x+y-7=0$.

Пример 8. Найти угол между прямыми $y-x-3=0$ и $2x+3y+4=0$

Решение. Координаты нормальных векторов прямых определим из их уравнений: $\vec{n}_1(-1,1)$ и $\vec{n}_2(2,3)$. По формуле (3.14) найдем косинус угла между прямыми:

$$\cos\alpha=\frac{|(-1)\cdot 2+1\cdot 3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{26}},$$

откуда $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Ответ: угол между прямыми равен $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Пример 9. Написать уравнения прямых, отсекающих на оси Ox отрезок, равный 5, на оси Oy - отрезок, равный 4, и образующих острый угол с осью Ox.

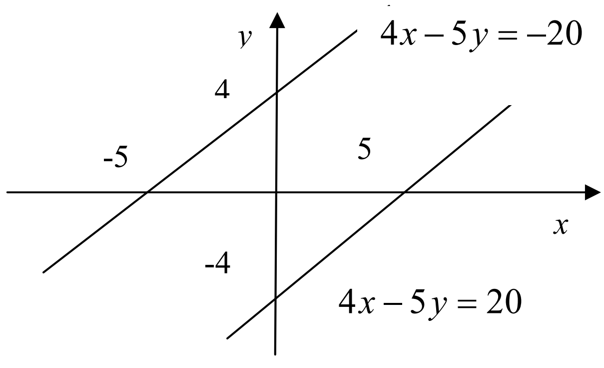


Рис. 3.14

Решение. Используем уравнение прямой в отрезках (3.9). Учитывая, что угол с осью Ox должен быть острый, имеем (рис. 3.14):

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{4}=1 \text{ и } \frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1, \text{или}$$

$$4x-5y+20=0 \text{ и } 4x-5y-20=0$$

Ответ: уравнения искомых прямых имеют вид $4x-5y+20=0$ и $4x-5y-20=0$.

Вопросы для самопроверки по теме 3.2

1. Как выглядит общее уравнение прямой на плоскости?

2. Как перейти от общего уравнения прямой к уравнению в отрезках?
3. Какую геометрическую величину определяет коэффициент k в уравнении $y = kx + b$?
4. Выведите уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.
5. Выведите уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором.
6. Выведите параметрические уравнения прямой.
7. Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
8. Укажите способы нахождения величин углов между прямыми.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых на плоскости.
10. Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до прямой.

3.3. Уравнения плоскости и прямой в пространстве

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Различные виды уравнений плоскости в пространстве.**
- **Различные виды уравнений прямой в пространстве.**
- **Углы и расстояния.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [2], глава 3, с. 43-58 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить задачу в соответствии со своим вариантом из № 21-30.

Различные виды уравнений плоскости в пространстве

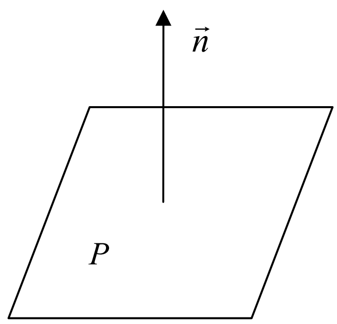


Рис. 3.15

1. Общее уравнение плоскости

Общим уравнением плоскости в пространстве называется уравнение первого порядка с тремя переменными

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.17}$$

где A, B и C одновременно не обращаются в ноль.

Можно показать, что всякое уравнение вида (3.17) определяет в пространстве в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ плоскость и всякой плоскости в пространстве можно поставить в соответствие уравнение вида (3.17). При этом вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости и поэтому называется **нормальным вектором плоскости** (рис.3.15), причем коэффициенты A, B, C являются координатами этого вектора.

Часто при решении конкретных геометрических задач удобней применять иные формы уравнений плоскости, называемые специальными.

2. Уравнение плоскости в отрезках

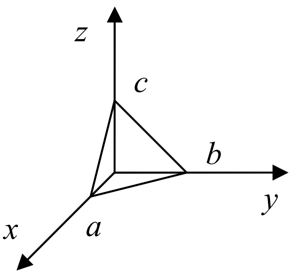


Рис. 3.16

Если в уравнении (3.17) ни один из коэффициентов не равен нулю, то, поделив все члены уравнения на ($-D$), получим равносильное ему уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3.18)$$

где $a=-D/A, \quad b=-D/B, \quad c=-D/C$.

Уравнение вида (3.18) называют **уравнением плоскости "в отрезках"**. Можно показать, что модули чисел a,b,c равны длинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях координат (рис. 3.16).

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и нормально данному вектору

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащая плоскости P, и вектор нормали к этой плоскости $\vec{n}=(A,B,C)$ (рис. 3.17).

Для каждой точки $M(x,y,z)$ плоскости P векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, лежащие в плоскости P, взаимно перпендикулярны. Условием перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ является равенство нулю их скалярного произведения

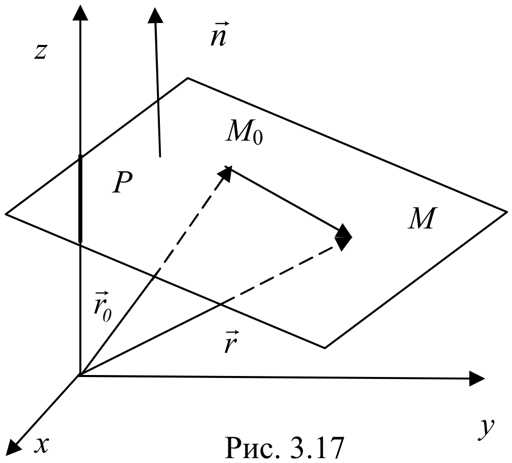


Рис. 3.17

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0.$$

Если задана прямоугольная система координат, то, переписав это уравнение в координатной форме, получаем уравнение плоскости P:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.19)$$

Если ввести в рассмотрение радиус-векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ точек M_0 и M, то их условие перпендикулярности можно записать в виде

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0. \qquad (3.20)$$

Последнее уравнение - это **уравнение** заданной **плоскости в векторной форме**.

4. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

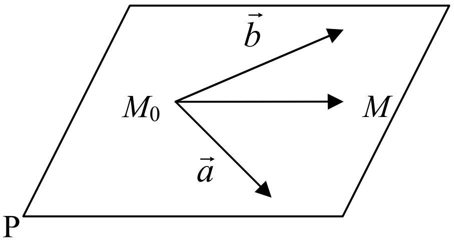


Рис. 3.18

Найдем уравнение плоскости P, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ (рис.3.18). Условием принадлежности произвольной точки M плоскости P является компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$, а признаком компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения, то есть

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

В прямоугольных координатах это уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.21)$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащие некоторой плоскости (рис. 3.19). Найдем уравнение указанной плоскости. Этот случай сводится к предыдущему, если в качестве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взять, например, векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$. В итоге получим уравнение

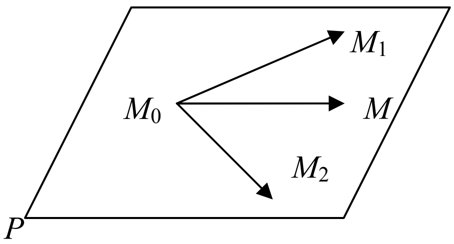


Рис. 3.19

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.22)$$

Различные виды уравнений прямой в пространстве

1. Общие уравнения прямой в пространстве

Если прямая является пересечением двух плоскостей P_1 и P_2, уравнения которых $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, соответственно (рис.3.20), то эту прямую можно задать системой уравнений, называемых **общими уравнениями** прямой:

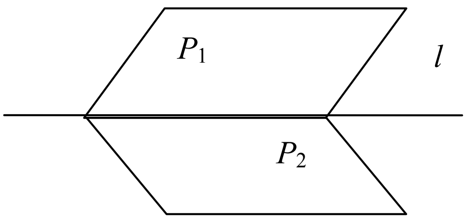


Рис. 3.20

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.23)$$

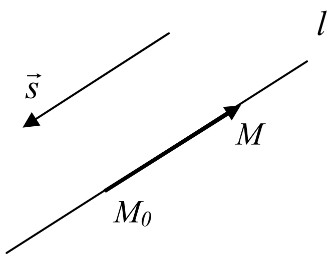


Рис.3.21

2. Векторно-параметрическое уравнение прямой в пространстве

Пусть l - произвольная прямая. Ее положение в пространстве определяется некоторой точкой

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на прямой, и вектором $\vec{s} = (m, n, p)$, параллельным этой прямой (рис.3.21). Вектор $\vec{s}$ называется **направляющим вектором прямой**. Если $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой l, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны. По признаку коллинеарности двух векторов существует вещественное число t такое, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}.$$

Если ввести в рассмотрение радиус-векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ точек M_0 и M, то эту формулу можно записать в виде

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}. \tag{3.24}$$

Уравнение (3.24) называются **векторно-параметрическим** уравнением прямой.

3. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве

Перепишем последнее соотношение (3.24) в координатной форме, а затем разрешим их относительно *x, y*, и z и получим **параметрические уравнения** прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{3.25}$$

Такие уравнения особенно удобны при решении задач о пересечении прямых с плоскостями или иными поверхностями.

Если записать признак коллинеарности двух векторов в координатной форме, то получим **канонические уравнения** прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.26}$$

Если какой-либо из знаменателей в (3.26) равен нулю, то необходимо, чтобы нулю был равен и соответствующий числитель.

4. Уравнение прямой через две точки в пространстве

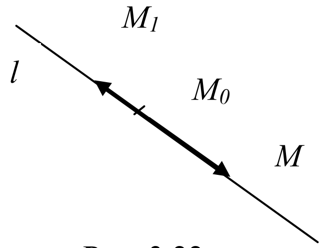


Рис. 3.22

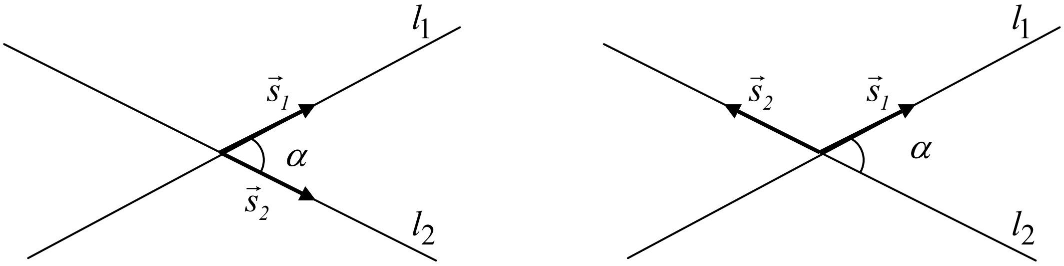
Для записи уравнения прямой, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 3.22), используем признак коллинеарности двух векторов: $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, где $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3.27}$$

Углы и расстояния

1. Угол между прямыми в пространстве

Углом между прямыми l_1 и l_2 называют меньший из углов, образованных прямыми l_1 и l_2.



а) Рис. 3.23 б)

Очевидно, что углы между прямыми и их направляющими векторами либо равны, либо отличаются на величину π (рис.3.23). Тогда, используя свойства скалярного произведения векторов, для угла между прямыми получаем

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}. \qquad (3.28)$$

2. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

Углом β между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис.3.24).

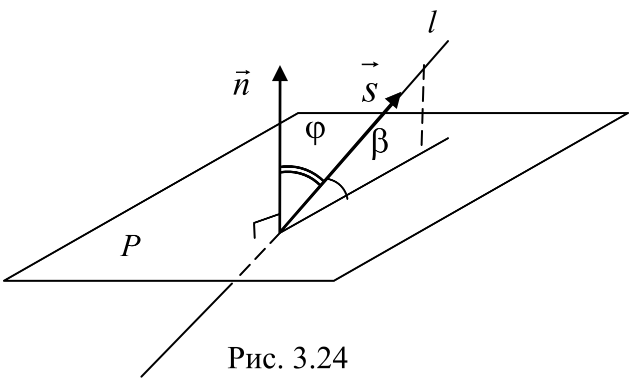


Рис. 3.24

Очевидно, что

$\sin\beta = \sin(90^o - \varphi) = |\cos\varphi|$,

где φ - угол между нормальным вектором плоскости $\vec{n}$ и направляющим вектором $\vec{s}$ прямой. Следовательно,

$$\sin\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}. \qquad (3.29)$$

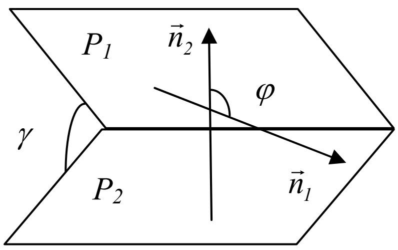


Рис. 3.25

3. Угол между плоскостями

Углом γ между двумя плоскостями P_1 и P_2 назовем меньший из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Если плоскости параллельны, то величина угла считается равной нулю.

Очевидно, что независимо от направлений нормальных векторов плоскостей, $\cos\gamma = |\cos\varphi|$, где φ - угол между нормальными векторами плоскостей (рис. 3.25). Тогда

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}. \tag{3.30}$$

4. Расстояние между двумя точками в пространстве

Расстояние между двумя точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в пространстве можно определить как длину вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, тогда его длина

$$l = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} \tag{3.31}$$

5. Расстояние от точки в пространстве до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость P, уравнение которой $Ax + By + Cz + D = 0$. Под расстоянием S от точки до плоскости понимается длина перпендикуляра M_0M, опущенного из точки на плоскость (рис. 3.26), которая определяется по формуле

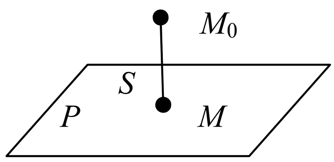


Рис. 3.26

$$S = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.32}$$

6. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Под расстоянием d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, направляющий вектор которой $\vec{s}$. Возьмем произвольную точку прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, тогда

$$d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{s}|}. \tag{3.33}$$

Решение примеров

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,2,1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(2,2,-4)$.

Решение. Уравнение (3.19) для нашего случая принимает вид

$$2(x+1) + 2(y-2) - 4(z-1) = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$2x + 2y - 4z + 2 = 0 \text{ или } x + y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ: искомое уравнение плоскости имеет вид $x + y - 2z + 1 = 0$.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,-1,3)$, $B(2,0,-1)$, $C(5,2,1)$.

Решение. Подставим координаты точек в уравнение (3.22):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2-1 & 0-(-1) & -1-3 \\ 5-1 & 2-(-1) & 1-3 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя и приведения подобных членов получаем уравнение плоскости: $10x-14y-z-21=0$.

Ответ: искомое уравнение плоскости имеет вид $10x-14y-z-21=0$.

Пример 3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2,1,3)$ и $B(4,5,3)$.

Решение. В качестве точки M_0 будем использовать точку A, а в качестве направляющего вектора прямой - вектор $\overrightarrow{AB}=(2,4,0)$. Канонические уравнения прямой в этом случае имеют вид:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{0}.$$

Понимать это соотношение следует как систему

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}, \quad z=3.$$

Ответ: искомые уравнения прямой имеют вид $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}, \quad z=3.$

Пример 4. Найти координаты точки пересечения плоскости $2x-y+3z+3=0$ и прямой, проходящей через точку $M_0(1,2,1)$ параллельно вектору $\vec{s}=(2,4,-2)$.

Решение. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+4t. \\ z = 1-2t \end{cases}$$

Координаты точки пересечения $M(x,y,z)$ прямой и плоскости удовлетворяют одновременно и уравнению плоскости и уравнениям прямой. Подставим x, y и z из уравнений прямой в уравнение плоскости, получаем:

$$2(1+2t)-(2+4t)+3(1-2t)+3=-6t+6=0.$$

Отсюда $t=1$ и можно найти координаты точки пересечения, подставляя это значение в уравнения прямой: $M(3,6,-1)$.

Ответ: координаты точки пересечения плоскости и прямой $M(3,6,-1)$.

Пример 5. Прямая задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} x-y+z-2 = 0 \\ 2x+y-2z+5 = 0 \end{cases}.$$

Найти канонические уравнения этой прямой.

Решение. Исключая последовательно из системы переменные x и y, получим:

$$3y-4z+9=0 \;\text{ и }\; 3x-z+3=0.$$

Выразим переменную z из обоих уравнений и приравняем полученные результаты:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{3}.$$

Ответ: канонические уравнения прямой имеют вид $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{3}$.

Пример 6. Найти величину угла между прямой l_1, заданной каноническими уравнениями:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3},$$

и прямой l_2, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x-y+z+3=0, \\ x-y+z+5=0. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{s}_2$ прямой l_2 как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}.$$

Подставим координаты направляющих векторов в формулу (3.28):

$$\cos\alpha=\frac{|5\cdot 0+4\cdot(-1)+3\cdot(-1)|}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{7}{10}.$$

Ответ: величина угла между заданными прямыми равна $\arccos\left(\dfrac{7}{10}\right)$.

Пример 7. Найти расстояние от точки $M_0(3,-2,1)$ до прямой l_1, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-3}{4}.$$

Решение. В данном случае можно взять в качестве точки, принадлежащей прямой, точку $M_1(2,-5,3)$, тогда $\overrightarrow{M_1M_0}=(-1,-3,2)$. Направляющим вектором прямой l является вектор $\vec{s}=(2,-3,4)$. Вычислим векторное произведение, стоящее в числителе формулы (3.33):

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{i}-8\vec{j}-9\vec{k}.$$

Подставим эти значения в формулу (3.33):

$$d=\frac{\sqrt{6^2+(-8)^2+(-9)^2}}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{181}}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: расстояние от указанной точки до прямой равно $\dfrac{\sqrt{181}}{\sqrt{29}}$.

Вопросы для самопроверки по теме 3.3

1. Запишите общее уравнение плоскости .
2. Выведите уравнение плоскости в отрезках.
3. Выведите уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором.
4. Выведите уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.
5. Выведите уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.
6. Выведите параметрические и канонические уравнения прямой.
7. Покажите на примере, как осуществляется переход от общих уравнений прямой к параметрическим.
8. Продолжите определение: “ Углом между прямыми в пространстве называется….. ”.Как найти величину этого угла по уравнениям прямых?
9. Продолжите определение: “ Углом между прямой и плоскостью называется….. ”. Как найти величину этого угла по уравнениям прямой и плоскости?
10. Дайте определение угла между плоскостями. Как найти величину этого угла по уравнениям плоскостей?
11. Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.
12. Выведите формулы для нахождения расстояния от точки до прямой.

3.4. Кривые второго порядка

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими кривыми:

- **Эллипс.**
- **Гипербола.**
- **Парабола.**

После изучения материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. При возникновениии вопросов следует обратиться к [2], глава 4, с.59-65 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо из контрольной работы №1 решить задачу под № 31-40 в соответствии со своим вариантом.

Эллипс

Кривой линией второго порядка на плоскости называется множество точек, координаты которых в прямоугольной системе Oxy удовлетворяют уравнению второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.34}$$

где хотя бы один из параметров A, B, C отличен от нуля.

При изучении линий второго порядка применяют метод преобразования координат с целью нахождения такой новой системы координат, в которой уравнение линии имеет наиболее простой вид. Такие наиболее приспособленные к линиям второго порядка системы координат называются каноническими, а уравнения линий в этих системах – каноническими уравнениями. Рассмотрим канонические уравнения трех линий второго порядка.

Эллипсом называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.35}$$

где a и b любые положительные числа.

Исследуем форму эллипса.

Из уравнения следует, что для точек эллипса выполняются соотношения: $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, $\frac{y^2}{b^2} \le 1$ откуда $|x| \le a, |y| \le b$, т.е. эллипс расположен внутри прямоугольника, задаваемого неравенствами $-a \le x \le a, -b \le y \le b$ (рис. 3.27). Найдем точки пересечения эллипса с осями координат: с осью Oy - это точки $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$; с осью Ox - $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$. Эти точки называются **вершинами** эллипса. Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются **большой** и **малой осями** эллипса. Соответственно, числа a и b называются **большой** и **малой полуосями**.

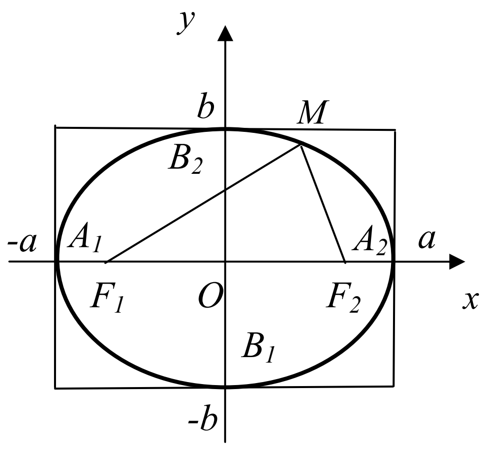


Рис. 3.27

Переменные x и y содержатся в уравнении эллипса в четных степенях. Это означает, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно начала системы координат – точки O (ее называют **центром** эллипса); поэтому рассмотрим лишь ту часть кривой, которая лежит в первой четверти координатной плоскости. Разрешим уравнение эллипса относительно переменной y с учетом того, что в этой четверти $y > 0$, тогда

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Из этого равенства следует, что при увеличении x от 0 до a соответствующее значение y будет убывать от b до 0, поэтому, учитывая симметрию эллипса, приходим к выводу о том, что эллипс – это замкнутая линия овальной формы.

Если в уравнении эллипса положить $a = b = r$, то оно превратится в уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ радиуса r с центром в начале координат. Степень отличия эллипса от окружности принято описывать с помощью величины, называемой **эксцентриситетом**

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{3.36}$$

где
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{3.37}$$

Так как $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$ получаем $a = b$ и эллипс является окружностью. При уменьшении значения b эллипс сжимается к большой оси, а эксцентриситет увеличивается.

Фокусами эллипса называются лежащие на большой оси эллипса точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Эти точки обладают следующим **свойством**: сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная длине большой оси эллипса, т.е.

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

где M - произвольная точка эллипса.

Гипербола

Гиперболой называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.38}$$

где a и b – любые положительные числа.

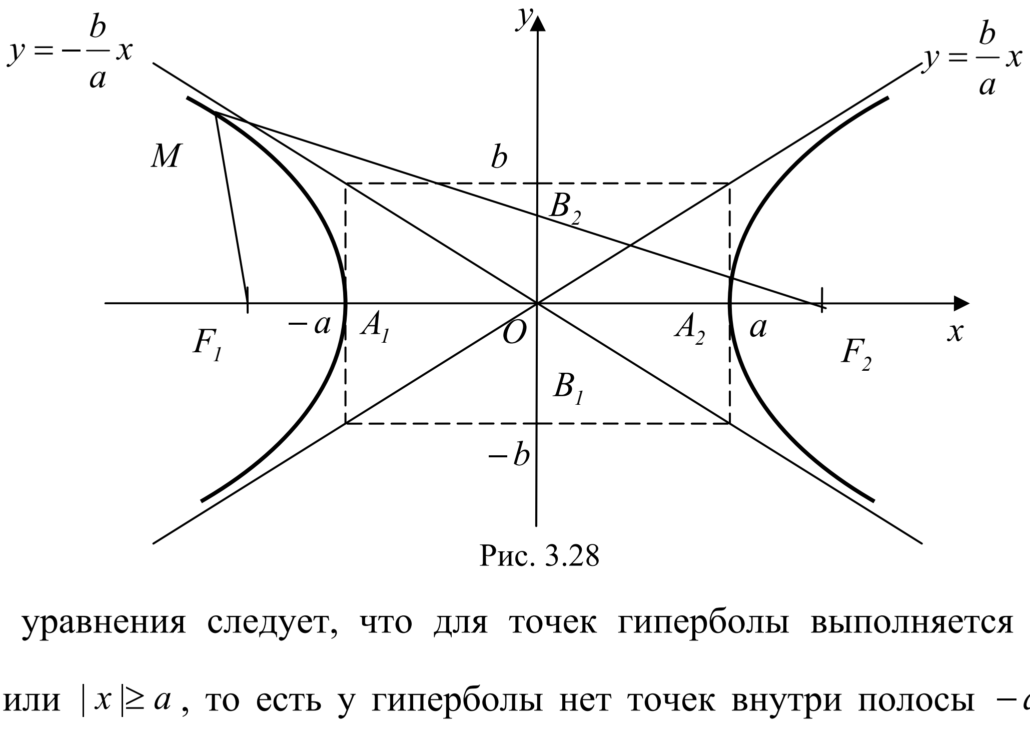


Рис. 3.28

Из уравнения следует, что для точек гиперболы выполняется условие: $\frac{x^2}{a^2} \ge 1$ или $|x| \ge a$, то есть у гиперболы нет точек внутри полосы $-a < x < a$.

При $y=0$ из уравнения гиперболы имеем $x=\pm a$, значит, гипербола пересекается с осью Ox в двух точках: $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$, которые называются **вершинами** гиперболы (рис. 3.28). С осью Oy гипербола не пересекается, так как уравнение $-\frac{y^2}{b^2}=1$ не имеет вещественных корней. Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ называют, соответственно, **вещественной** и **мнимой осями**. Числа a и b - **вещественной** и мнимой полуосями. Точка O - это **центр** гиперболы.

Поскольку каноническое уравнение гиперболы содержит только четные степени координат, то гипербола, как и эллипс, симметрична относительно осей и начала координат. Разрешим уравнение гиперболы относительно переменной y:

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,.$$

Очевидно, что при возрастании абсолютного значения x от a до бесконечности абсолютное значение y неограниченно возрастает.

При больших значениях x можем записать:

$$y\approx \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}}=\pm\frac{b}{a}|x|\,.$$

Это означает, что при увеличении абсолютного значения x гипербола неограниченно приближается к прямым $y=\pm\frac{b}{a}x$, которые называются **асимптотами** гиперболы.

Степень "сжатия" гиперболы к оси Ox определяет **эксцентриситет**:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}\ ,$$

где

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \tag{3.39}$$

Так как $c>a$, то для гиперболы: $1<\varepsilon<+\infty$. Чем меньше ε, тем сильнее гипербола "сжата" к оси Ox.

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ называются **фокусами** гиперболы. Сформулируем **фокальное свойство гиперболы**: абсолютное значение разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$, т.е.

$$|MF_1-MF_2|=2a\,,$$

где M- произвольная точка гиперболы.

Если $a=b$, то гипербола называется равнобочной. Ее асимптоты в этом случае взаимно перпендикулярны. Если их выбрать за оси координат, то в новой прямоугольной системе координат гипербола будет задаваться уравнением вида $y=\frac{k}{x}$, где $k=\frac{a^2}{2}$.

Парабола

Параболой называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$y^2 = 2px, \tag{3.40}$$

где p - любое число.

Пусть $p > 0$, тогда парабола расположена правее оси Oy.

Из уравнения параболы следует, что при увеличении x координата y неограниченно возрастает по абсолютному значению. Четность степени y в уравнении означает симметричность параболы относительно оси Ox. Ось симметрии называется осью параболы, а точка пересечения параболы с осью - **вершиной** параболы. Парабола имеет вид, представленный на рис. 3.29.

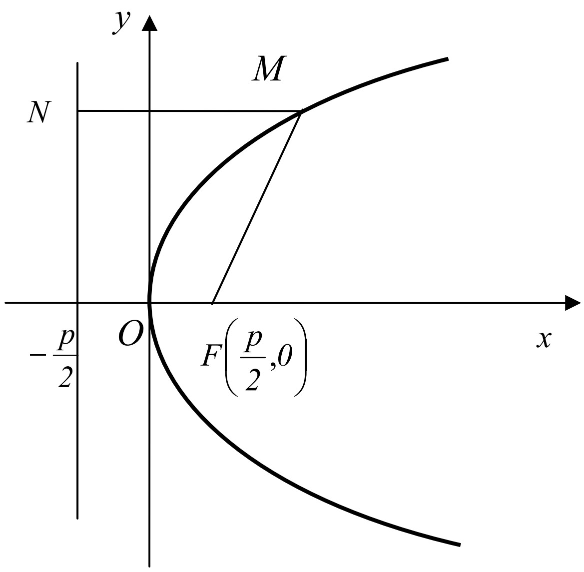


Рис. 3.29

Точка $F(\frac{p}{2},0)$, лежащая на оси симметрии, называется **фокусом** параболы, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ - ее **директрисой**. Точки параболы обладают следующим **свойством**: каждая точка параболы равноудалена от фокуса и директрисы параболы, т.е.

$$|MF| = |MN|,$$

где M - произвольная точка параболы, а точка N- основание перпендикуляра, опущенного из M на директрису.

Решение примеров

Пример 1. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$ к каноническому виду, определить вид линии, описываемой этим уравнением, сделать схематический рисунок.

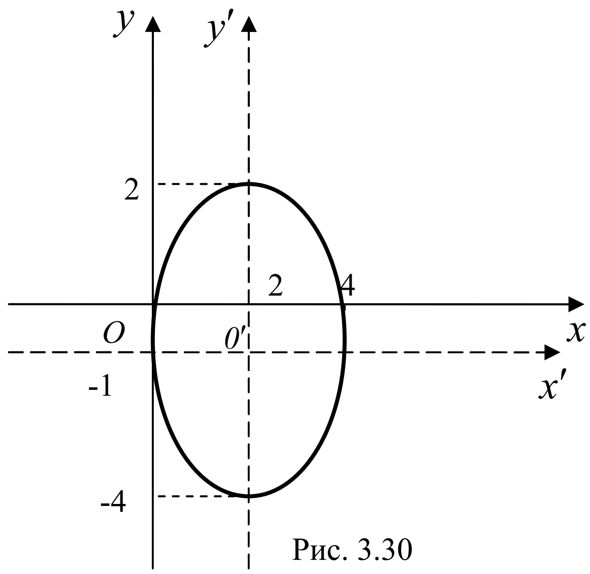


Рис. 3.30

Решение. Преобразуем исходное уравнение, дополнив до полных квадратов выражения, содержащие x и y соответственно.

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) + 4 - 36 - 4 = 0$$

или

$$9(x-2)^2+4(y+1)^2=36.$$

Разделив обе части последнего уравнения на 36, получим

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$\begin{cases} x'=x-2, \\ y'=y+1, \end{cases}$$

то есть, совершим параллельный перенос осей, причём новое начало координат поместим в точку $O'(2,-1)$. В новой системе координат $O'x'y'$ уравнение примет вид

$$\frac{x'^2}{2^2}+\frac{y'^2}{3^2}=1.$$

Получено каноническое уравнение эллипса. Его центр находится в точке $O'(2,-1)$, величины полуосей $a=2, b=3$ (рис. 3.30).

Пример 2. Найти координаты точек пересечения кривых, заданных уравнениями: $x^2-y^2=4$ и $2y=x+2$.

Решение. Для определения координат точек пересечения кривых решим систему из указанных уравнений:

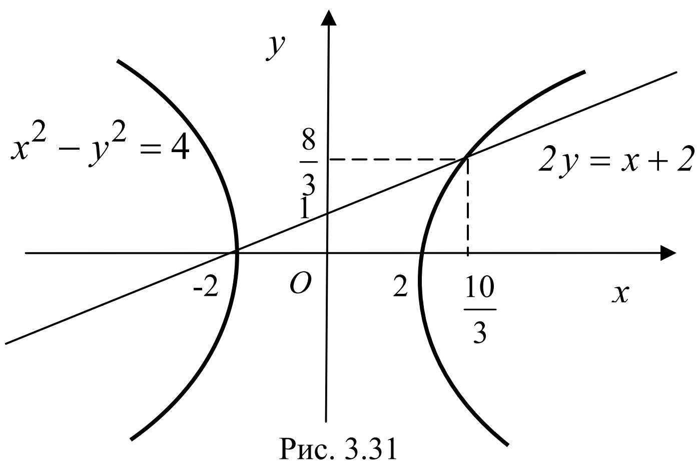


Рис. 3.31

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{2}+1, \\ x^2-(\dfrac{x}{2}+1)^2=4, \end{cases}$$

откуда $3x^2-4x-20=0$.

Корнями уравнения являются числа $x_1=-2$ и $x_2=\dfrac{10}{3}$.

Найдем соответствующие значения переменной $y: y_1=0; y_2=\dfrac{8}{3}.$

Рисунок 3.31 подтверждает аналитическое решение.

Пример 3. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью *Ox*.

Решение. Найдем точку пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью *Ox*. Для этого положим $y=0$ и определим соответствующее значение $x=1$. Значит, фокус параболы находится в точке $F(1,0)$, которая лежит на оси симметрии кривой. Каноническое уравнение параболы в этом случае имеет вид:

$$y^2=2px.$$

По координатам фокуса определяем $p=2$, тогда уравнение параболы $y^2=4x$.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=0$.

Решение. Из уравнения кривой определим ее полуоси: $a=5, b=4.$ На основании (3.37) найдем координаты фокусов эллипса

$$c=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3.$$

Отсюда, левый фокус эллипса имеет координаты F_1(-3,0). Нижняя вершина эллипса находится в точке с координатами B_1(0,-4) (рис. 3.32). Для написания уравнения прямой воспользуемся формулой (3.13), в которую подставим координаты точек F_1 и B_1:

$$\frac{x+3}{0+3}=\frac{y-0}{-4-0}$$

или

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y}{-4}.$$

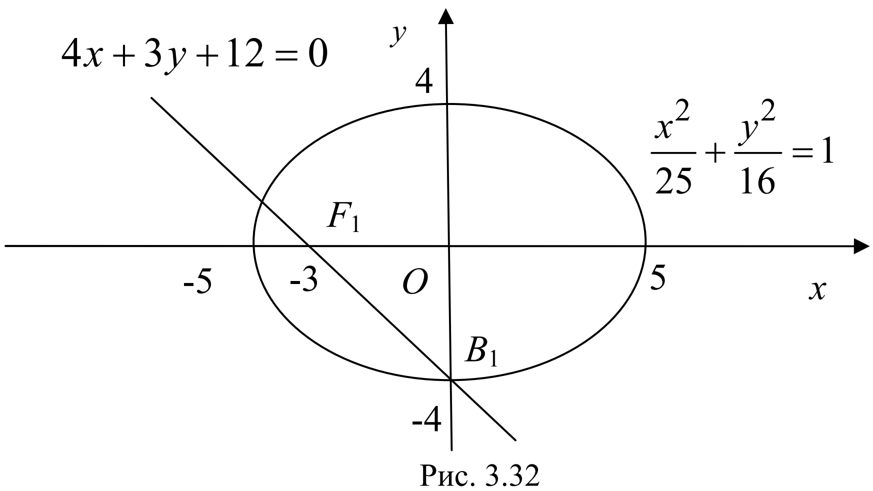


Рис. 3.32

После преобразований получим искомое уравнение прямой:

$$4x+3y+12=0.$$

Пример 5. Составить уравнение гиперболы с центром в начале координат, симметричной относительно осей координат, если известно, что она проходит через точку $M\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ и ее эксцентриситет равен $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нам необходимо определить значения величин a и b. Воспользуемся формулой (3.39) для вычисления эксцентриситета гиперболы

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, или после подстановки $\varepsilon = \sqrt{2}$ получим $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Отсюда имеем: $a = b$. Так как точка M лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять каноническому уравнению гиперболы, то есть

$$\frac{\sqrt{3}^2}{a^2} - \frac{\sqrt{2}^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

Зная, что $a = b$, получим из последнего равенства $a = b = 1$.

Запишем уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

Вопросы для самопроверки по теме 3.4

1. Дайте определение эллипса. Какой вид имеет эта кривая в декартовой прямоугольной системе координат?
2. Запишите каноническое уравнение эллипса.
3. Что такое большая и малая полуоси эллипса?
4. Какая характеристика служит для описания степени сжатия эллипса?
5. Дайте определение фокусов эллипса и сформулируйте свойства этих точек.
6. Дайте определение гиперболы. Какой вид имеет эта кривая в декартовой прямоугольной системе координат?
7. Дайте определения эксцентриситета и фокусов гиперболы. Сформулируйте свойство фокусов гиперболы.
8. Дайте определение параболы. Какой вид имеет эта кривая в декартовой прямоугольной системе координат?
9. Дайте определения директрисы и фокуса параболы. Сформулируйте свойства фокуса и директрисы параболы.
10. Выпишите общее уравнение линии второго порядка. Перечислите все геометрические объекты, которые могут быть описаны этим уравнением.
11. Покажите на примере, как можно привести общее уравнение кривой к каноническому виду с помощью преобразования системы координат.

Если Вы испытываете трудности с ответами на вопросы, обратитесь к [2], глава 4.

3.5. Поверхности второго порядка

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими поверхностями:

- **Эллипсоид.**
- **Гиперболоиды.**
- **Конус второго порядка.**
- **Параболоиды.**
- **Цилиндры второго порядка.**

После изучения темы Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. При возникновениии вопросов обращайтесь к [2], глава 5, с.69-81.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить одну задачу из контрольной работы №1 в соответствии со своим вариантом под № 41-50.

Эллипсоид

По аналогии с уравнениями кривых второго порядка на плоскости вводятся уравнения поверхностей второго порядка в пространстве, а затем после введения канонических систем координат в пространстве получаются соответствующие канонические уравнения поверхностей.

Рассмотрим канонические уравнения поверхностей второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат.

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (3.41)$$

где a, b, c - некоторые положительные числа.

Степени всех переменных, входящих в это уравнение, являются четными, поэтому эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей, а также осей и начала координат. Отсюда следует, что эллипсоид целиком содержится внутри прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a, 2b, 2c$, параллельными координатным плоскостям.

Для исследования формы поверхности применим метод параллельных сечений. Рассмотрим сначала сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. В сечении плоскостью $z=h$, где $|h|<c$, будем иметь линию, уравнение которой получаем, подставляя $z=h$ в уравнение (3.41):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h. \qquad (3.42)$$

Преобразуем это уравнение, разделив все равенство на выражение, стоящее в правой его части и получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \quad z=h.$$

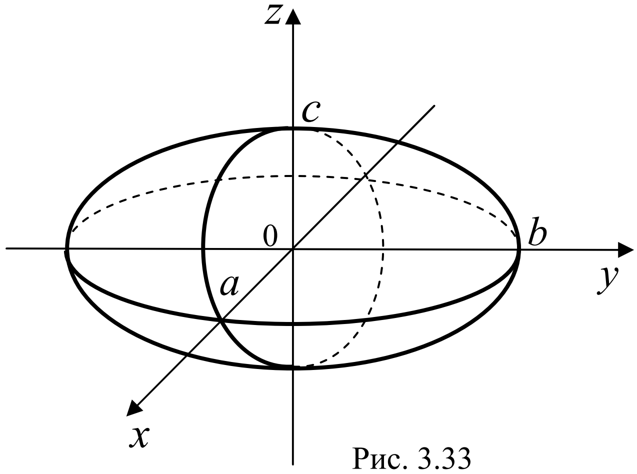


Рис. 3.33

При $h=0$ получим эллипс с полуосями a и b. С увеличением $|h|$ полуоси эллипса будут уменьшаться и при $|h|=c$ из уравнения (3.42) имеем $x=0, y=0$. Это означает, что плоскости $z=c$ и $z=-c$ имеют с эллипсоидом по одной общей точке с координатами $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$ соответственно.

Аналогично рассматриваются и сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz. Полученная информация о сечениях эллипсоида позволяет представить себе строение данной поверхности в целом (рис. 3.33).

Вершинами эллипсоида называются точки пересечения поверхности с осями координат; **центр** эллипсоида находится в начале координат. Числа a,b,c называются **полуосями** эллипсоида. Если все три полуоси совпадают, т.е. $a=b=c=R$, то уравнение эллипсоида принимает вид:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

и эллипсоид в этом случае является **сферой** радиуса R с центром в начале координат. Нетрудно показать, что каждый эллипсоид может быть получен из сферы сжатием или растяжением вдоль трех взаимно - перпендикулярных осей.

Гиперболоиды

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0. \tag{3.43}$$

Исследуем однополостный гиперболоид методом сечений. Сечение этой поверхности плоскостью $z=h$ определяется системой уравнений:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \quad z=h$$

и, следовательно, является эллипсом при любом h. Полуоси эллипсов имеют при $h=0$ наименьшие значения и увеличиваются при возрастании $|h|$, то есть, при удалении плоскости сечения от плоскости Oxy. Сечение наименьшего размера, расположенное в плоскости Oxy, принято называть **горловым эллипсом**.

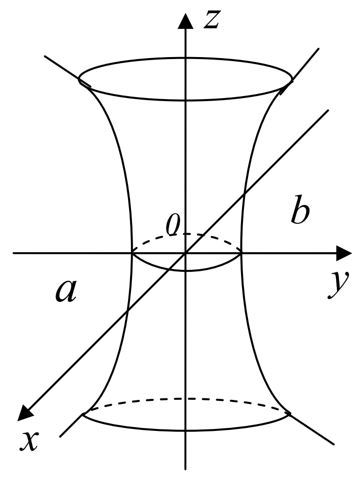


Рис. 3.34

Сечения плоскостями Oyz и Oxz являются гиперболами, которые задаются, соответственно, системами:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0.$$

Таким образом, однополостный гиперболоид имеет форму бесконечной трубы эллиптического сечения, которая расширяется от горлового эллипса (рис. 3.34). Ось Oz называется **осью гиперболоида**.

Числа a, b, c называются **полуосями** однополостного гиперболоида.

Так как уравнение рассматриваемой поверхности содержит переменные в четных степенях, то однополостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии, совпадающие с координатными плоскостями Oxy, Oyz и Oxz, а также три оси симметрии, совпадающие с координатными осями Ox, Oy и Oz. Центр симметрии однополостного гиперболоида совпадает с началом координат.

Очевидно, что уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, отличающиеся от канонического лишь переобозначениями координат, также задают однополостные гиперболоиды, имеющие оси, соответственно, Oy и Ox.

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (3.44)$$

где *a, b, c* – некоторые положительные числа.

Так же, как и в случае однополостного гиперболоида, из четности степеней переменных в каноническом уравнении видно, что двуполостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.

Рассмотрим сечения заданной поверхности плоскостями $z = h$, где $|h| > c$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \quad z = h.$$

Если $h^2 < c^2$, то правая часть первого уравнения отрицательна и данная система не задает никакой фигуры. При $|h| = c$ сечения гиперболоида плоскостями $z = c$ и $z = -c$ дают по одной точке с координатами $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$. При $|h| > c$ сечения представляют собой эллипсы:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1, \quad z = h.$$

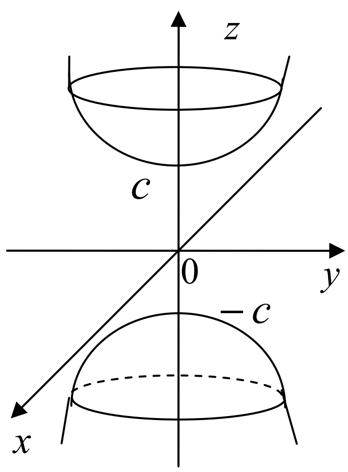


Рис. 3.35

Их центры лежат на оси Oz, а оси параллельны осям Ox и Oy. Полуоси этих сечений неограниченно возрастают при увеличении $|h|$.

Сечения плоскостями Oxz и Oyz, как и в случае однополостного гиперболоида, являются гиперболами:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0 \qquad \text{и} \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0 .$$

Проведенное исследование показывает, что двуполостный гиперболоид состоит из двух частей, называемых **полостями** гиперболоида, и расположенными по разные стороны от плоскости Oxy (рис. 3.35).

Числа a, b, c, как и в предыдущем случае, называются **полуосями** гиперболоида.

Уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ также задают двуполостные гиперболоиды, осями которых являются, соответственно, оси Oy и Ox.

Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{3.45}$$

где a, b, c – некоторые положительные числа.

Для изучения формы конуса применим метод сечений. Сечения плоскостями $z=h$ являются эллипсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2},$$

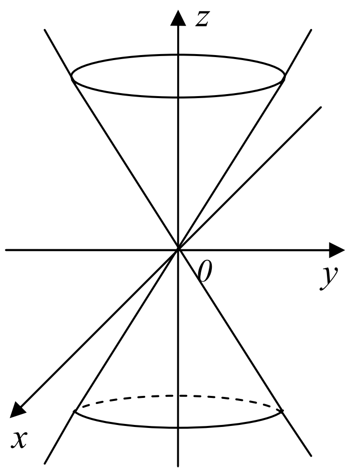


Рис. 3.36

за исключением случая $h=0$, когда этот эллипс вырождается в одну точку $O(0,0,0)$. Полуоси этих сечений увеличиваются пропорционально росту $|h|$.

Сечения плоскостями Oxz и Oyz представляют собой пары пересекающихся прямых, задаваемых системами:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=0 \qquad \text{и}$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad x=0 .$$

Так как уравнение конуса содержит лишь квадраты переменных, то конус симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Таким образом, конус второго порядка имеет вид, представленный на рис. 3.36.

Параболоиды

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{3.46}$$

где a и b – любые положительные числа.

Четность степеней x и y показывает, что он симметричен относительно плоскостей Oyz и Oxz, а, следовательно, и относительно оси Oz. Кроме того, левая часть уравнения всегда не отрицательна, поэтому для любой точки параболоида $z \geq 0$, а это означает, что параболоид лежит по одну сторону от плоскости Oxy.

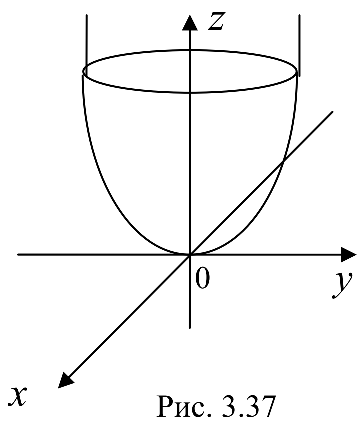


Рис. 3.37

Сечения параболоида плоскостями $z = h (h > 0)$ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2}=1, \quad z=h,$$

полуоси которых неограниченно возрастают при увеличении h. Сечения плоскостями Oxz и Oyz представляют собой параболы:

$$x^2 = a^2 z, \quad y = 0 \text{ и}$$

$$y^2 = b^2 z, \quad x = 0.$$

Параболоид имеет вид, представленный на рис. 3.37.

Ось симметрии параболоида называется **осью** эллиптического параболоида, а точка пересечения параболоида и его оси называется **вершиной** параболоида.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{3.47}$$

где a и b – любые положительные числа.

В этом случае рассмотрим сначала сечения данной поверхности плоскостями $x = h$, параллельными плоскости Oyz. Эти сечения являются параболами:

$$y^2 = -b^2\left(z-\frac{h^2}{a^2}\right), x = h.$$

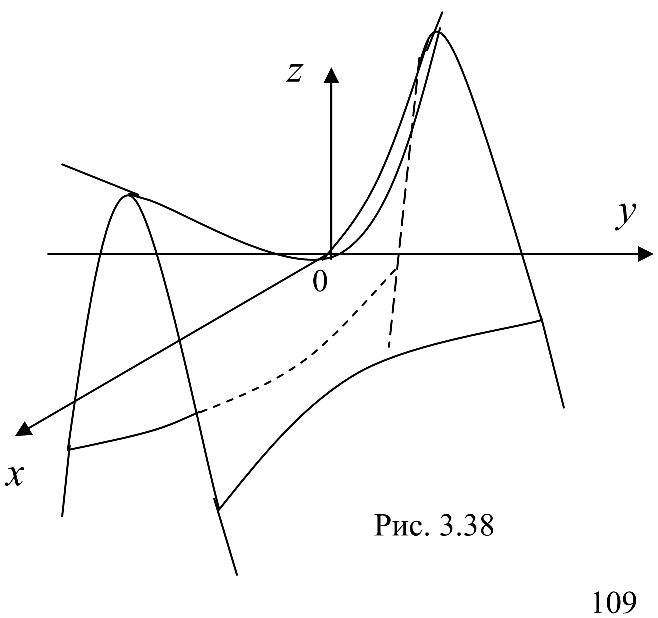


Рис. 3.38

Вершины этих парабол лежат в плоскости $y = 0$, сами параболы симметричны относительно этой плоскости, а их ветви направлены вниз - в сторону отрицательных значений z.

Сечение плоскостью $y = 0$ также является параболой:

$$x^2 = a^2 z, y = 0,$$

вершина которой лежит в начале

координат, ось совпадает с осью Oz, а ветви направлены вверх - в сторону положительных z.

Таким образом, рассматриваемая поверхность имеет форму седла с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии Oxz и Oyz (рис. 3.38).

Горизонтальные сечения гиперболического параболоида являются гиперболами, за исключением сечения плоскостью $z = 0$, которое представляет собой пару пересекающихся прямых.

Цилиндры второго порядка

Цилиндрической поверхностью или **цилиндром** называется поверхность, образованная прямыми, проведенными через всевозможные точки заданной линии S параллельно заданной прямой l. При этом линия S называется **направляющей** цилиндра, прямая l - **осью** цилиндра, а прямые, параллельные оси и лежащие на цилиндре - его **образующими.**

Уравнения второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.48}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.49}$$

$$y^2 = 2px \tag{3.50}$$

задают в пространстве цилиндрические поверхности с осью Oz. Их направляющими являются, соответственно, эллипс, гипербола и парабола, заданные на плоскости теми же уравнениями. Тип направляющей определяет название цилиндра второго порядка: **эллиптический цилиндр** (рис. 3.39), **гиперболический цилиндр** (рис. 3.40), **параболический цилиндр** (рис. 3. 41).

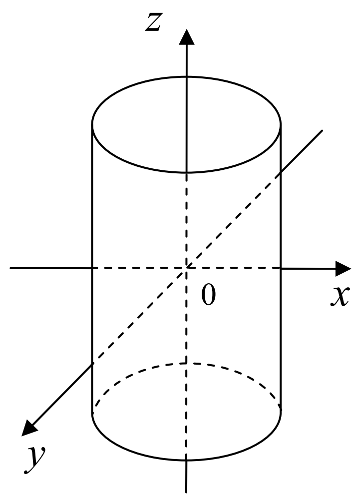


Рис. 3.39

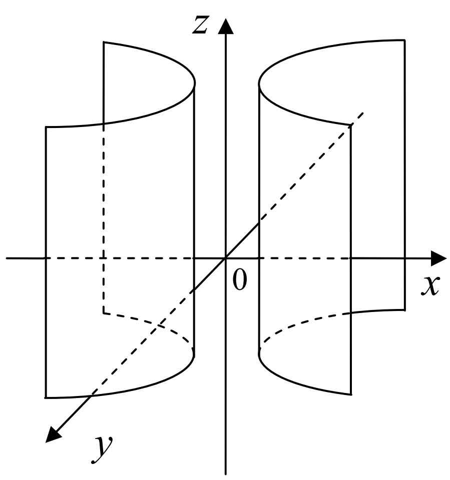


Рис. 3. 40

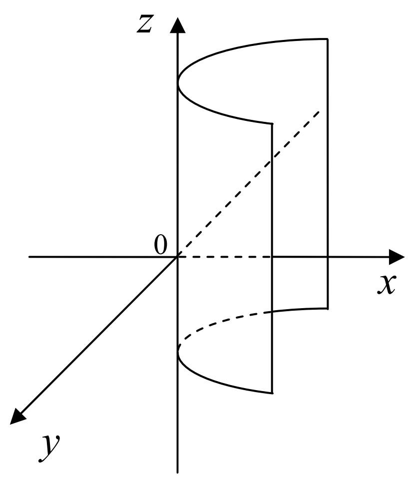


Рис. 3.41

Решение примеров

Пример 1. Привести уравнение $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$ к каноническому виду, определить вид поверхности.

Решение. Дополним уравнение до полных квадратов всех трех переменных:

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+6y+9\right)+\left(z^2+2z+1\right)-2=4+9+1.$$

После преобразований получим:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=4^2.$$

Полученное каноническое уравнение описывает сферу с центром в точке B(2,-3,-1) и радиусом $R=4$.

Пример 2. Составить уравнение эллиптического параболоида с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz, если известно, что точки $M(-1,-2,2)$ и $N(1,1,1)$ лежат на этой поверхности.

Решение. Каноническое уравнение эллиптического параболоида с вершиной в начале координат и осью Oz имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \tag{3.51}$$

Точки M и N лежат на данной поверхности, поэтому их координаты должны удовлетворять уравнению эллиптического параболоида. Подставив координаты точек в уравнение (3.51), получим:

$$\begin{cases}\dfrac{(-1)^2}{a^2}+\dfrac{(-2)^2}{b^2}=2,\\[2mm] \dfrac{1^2}{a^2}+\dfrac{1^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

Преобразуем эту систему:

$$\begin{cases}b^2+4a^2=2a^2b,^2\\ b^2+a^2=a^2b^2.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и определим $b^2=3$ и далее $a^2=\dfrac{3}{2}$.

Подставим найденные значения a^2 и b^2 в уравнение эллиптического параболоида и упростим его:

$$2x^2+y^2=3z.$$

Каноническое уравнение эллиптического параболоида с указанными параметрами имеет вид $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{1,5}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=z.$

Пример 3. Составить уравнения линий пересечения двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -4$ и эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 11$.

Решение. Определим уравнения плоскостей, в которых лежат линии пересечения поверхностей. Для этого найдем значения переменной z, удовлетворяющие обоим уравнениям. Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$3z^2 = 15,$$

откуда

$$z = \pm\sqrt{5}.$$

Подставляя найденные значения переменной z в уравнение любой из поверхностей, получим уравнения окружностей $x^2 + y^2 = 1$, лежащих в плоскостях $z = \sqrt{5}$ и $z = -\sqrt{5}$.

Таким образом двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -4$ и эллипсоид $x^2 + y^2 + 2z^2 = 11$ пересекаются по окружностям $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 4. Определить вид поверхностей, ограничивающих тело, заданное в пространстве системой неравенств, и изобразить это тело:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-2)^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 \le 4, \\ -1 \le z \le 2. \end{cases}$$

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$ задает в пространстве конус с осью Oz, смещенный вдоль оси Oz на две единицы. Эта поверхность разбивает все пространство на три части: точки самого конуса, точки внутри и снаружи конуса. Возьмем произвольную точку внутри конуса, например точку $O(0,0,0)$. Ее координаты удовлетворяют первому неравенству, поэтому неравенство описывает область внутри конуса.

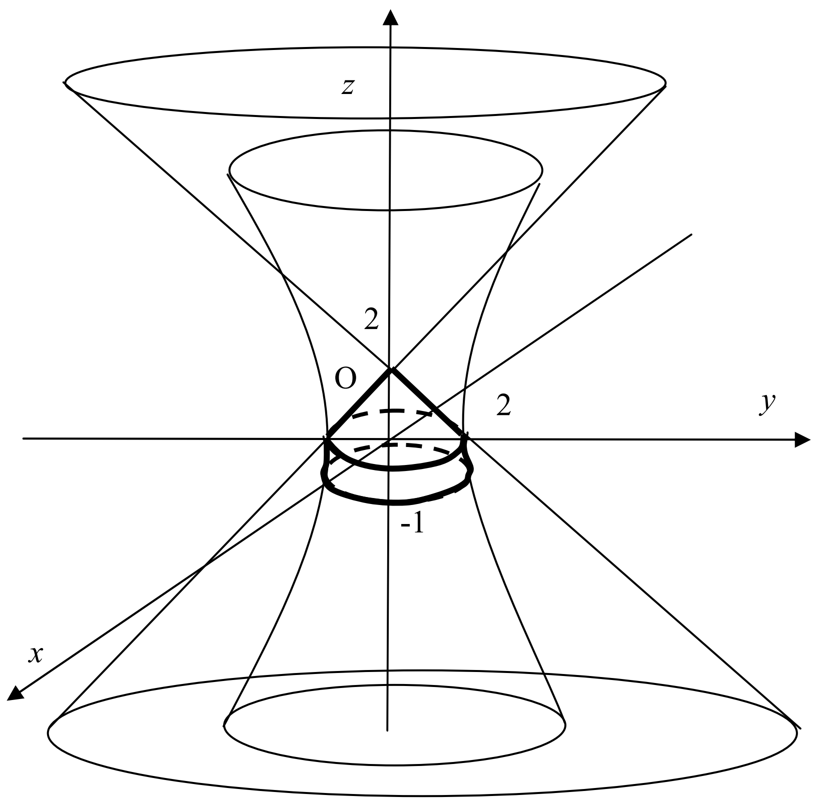


Рис. 3.42

Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ задает однополостный гиперболоид с осью вращения Oz. В сечении гиперболоида плоскостью $z = 0$ получаем окружность с радиусом $r = 2$. Координаты произвольной точки внутри гиперболоида (той же точки $O(0,0,0)$) удовлетворяют и второму неравенству, поэтому данное неравенство также описывает область внутри гиперболоида.

Наконец, неравенство $-1 \le z \le 2$ задает ту часть пространства, которая лежит между плоскостями z=-1 и $z = 2$.

Из изложенного следует, что исследуемое тело имеет вид, указанный на рис. 3.42.

Пример 5. Сделать схематический рисунок тела, заданного системой неравенств, указать вид поверхностей, ограничивающих тело:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \le 2y, \\ \dfrac{y}{2} \le z \le y, \\ -4 \le y \le 4. \end{cases}$$

Решение. Приведем уравнение $y^2 - x^2 = 2y$ к каноническому виду:

$$(y-1)^2 - x^2 = 1.$$

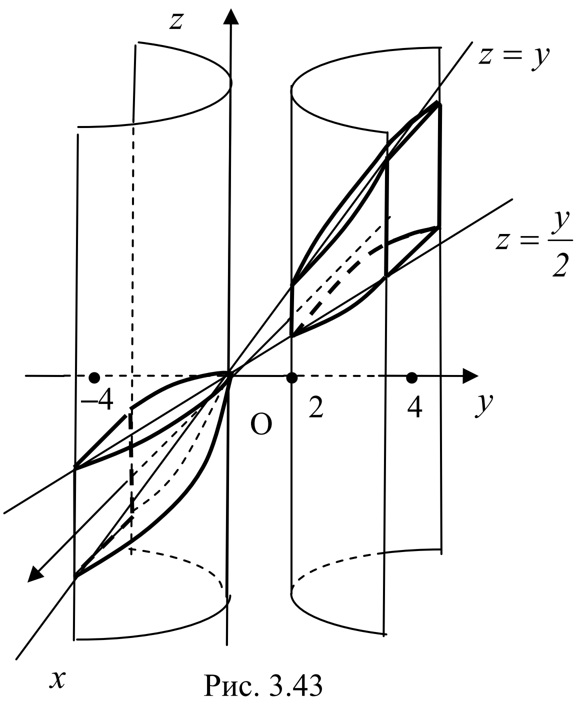


Рис. 3.43

В пространстве такое уравнение описывает гиперболический цилиндр с осью, смещенной вдоль оси Oy на одну единицу. Первое неравенство описывает область внутри цилиндра (проверим точку с координатами $(0,5,0)$ на принадлежность этой части пространства).

Уравнения $z = \dfrac{y}{2}$ и $z = y$ определяют две пересекающиеся плоскости, перпендикулярные координатной плоскости Oyz. Вторые неравенства описывают часть пространства между ними.

Уравнения $y = \pm 4$ определяют две параллельные плоскости, перпендикулярные координатной плоскости Oxy. Третьи неравенства описывают часть пространства от плоскости $y = -4$ до плоскости $y = 4$.

Ответ: исследуемое тело имеет вид, указанный на рис. 3.43.

Вопросы для самопроверки по теме 3.5

1. Дайте определение цилиндрической поверхности. Перечислите известные Вам цилиндры второго порядка. Какой вид они имеют?

2. Дайте определение эллипсоида. Какой вид имеет эта поверхность в канонической системе координат?

3. Какие линии представляют собой сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным?

4. Продолжите определение: “Однополостным гиперболоидом называется….. ”. Исследуйте форму этой поверхности форму методом сечений.

5. Дайте определение двуполостного гиперболоида.

6. В каком случае говорят о поверхностях вращения? Приведите примеры .

7. Запишите каноническое уравнение конуса второго порядка. Изобразите эту поверхность.

8. Дайте определение эллиптического параболоида. Какой вид имеет эта поверхность в канонической системе координат?

9. Продолжите определение: “Гиперболический параболоид-это... ”.

3.6. Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы

При изучении данной темы Вам предстоит познакомиться со следующими понятиями:

- **Линейное векторное пространство.**
- **Линейный оператор.**
- **Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.**
- **Евклидово пространство.**
- **Квадратичная форма.**

Множество V называется **линейным векторным пространством,** если на нем определены две операции: сложение и умножение на число, причем

1) $a+b=b+a$ для любых $a,b\in V$ (коммутативность сложения);

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a,b,c\in V$ (ассоциативность сложения);

3) $\lambda(\beta a)=(\lambda\beta)a$ для любого $a\in V$ и любых чисел β и λ (ассоциативность умноженная на число);

4) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ для любых $a,b\in V$ и любого числа λ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения);

5) $(\lambda+\beta)a=\lambda a+\beta a$ для любого $a\in V$ и любых чисел λ и β;

6) существует 0 – нейтральный элемент относительно сложения – такой, что $a+0=a$ для всех $a\in V$;

7) $1a=a$ для всех $a\in V$;

8) для любого $a\in V$ существует противоположный ему элемент $-a$, так что $a+(-a)=0$.

Элементы линейного векторного пространства часто называют векторами. Свойства линейных векторных пространств и примеры таких пространств можно найти в [2], гл.6, с.81-86.

Линейным оператором A, отображающим пространство V в пространство U, называется закон, ставящий в соответствие каждому вектору $x \in V$ единственный элемент $A(x) \in U$, причем $A\left(\lambda x + \beta y\right) = \lambda A(x) + \beta A(y)$ для всех $x, y \in V$ и любых чисел $\beta\lambda$. Скобки в последней формуле обычно не пишут. Действия над линейными операторами и примеры таких операторов рассмотрены в [2], гл.6, с.92-95.

Ненулевой вектор x называется **собственным вектором** линейного оператора A, если найдется такое число λ, что $Ax = \lambda x$. В этом случае говорят, что собственный вектор x отвечает **собственному числу** λ линейного оператора A. Подробнее этот вопрос рассмотрен в [2], гл.6, с.98-101.

Вещественное линейное векторное пространство V называют **евклидовым,** если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым вектором $a, b \in V$ вещественное число $\left(a, b\right)$, называемое их скалярным произведением, причем

1) $(a,b) = (b,a)$ для всех $a, b \in V$;
2) $\left(a+b, c\right) = (a,c) + \left(b, c\right)$ для всех $a, b, c \in V$;
3) $\left(\lambda a, b\right) = \lambda(a,b)$ для всех $a, b \in V$ и любого числа λ;
4) $\left(a, a\right) > 0,$ если $a \neq 0$.

Подробнее этот вопрос рассмотрен в [2], гл.6, с.87-92.

Квадратичной формой называют однородный многочлен второй степени от $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{aligned}\hat{O}(x_1, x_2, ..., x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + ... + c_{1n}x_1x_n &+ \\ + c_{22}x_2^2 + ... + c_{2n}x_2x_n &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ + c_{nn}x_n^2 &.\end{aligned}$$

Ее коэффициенты в этой записи образуют треугольную матрицу. Удобнее каждый недиагональный коэффициент разделить на 2 и записать дважды; тогда

$$\begin{aligned}\hat{O}(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2 &,\end{aligned}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Введем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, она симметрична, т.е. $A^T = A$. Обозначим столбец $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T$ через X. Тогда $\hat{O}(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$.

Можно доказать, что любая квадратичная форма с вещественными коэффициентами с помощью линейного преобразования переменных, имеющего невырожденную вещественную матрицу, приводится к диагональному виду.

Подробнее о квадратичных формах рассказано в [2], гл.6, с.101-103.

4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Данный раздел включает шесть тем:

4.1. Функция.

4.2. Предел последовательности. Предел функции.

4.3. Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций.

4.4. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции, их классификация.

4.5. Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала.

4.6. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

В каждой теме излагается основной теоретический материал и приводятся иллюстрирующие примеры. Завершает тему подробный разбор решения типовых примеров.

После изучения раздела студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить пять задач из контрольной работы № 2 в соответствии со своим вариантом.

4.1. Функция

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Функция и способы ее задания;**
- **Основные характеристики функций;**
- **Обратная функция и сложная функция;**
- **Элементарные функции.**

После изучения данных вопросов в опорном конспекте Вам следует ответить на вопросы для самоконтроля.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 1, с. 15-25 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Определение функции, способы ее задания. Основные характеристики функций

Понятие функции является не только основным понятием математического анализа, но и в других разделах математики играет важную роль. Понятие функции связано с установлением зависимости между двумя переменными величинами.

Определение. Пусть даны два множества X и Y, элементы x и y которых являются вещественными числами. Если в силу некоторого закона каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие одно и только одно число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция** f и пишут

$$y = f(x), \ x \in X .$$

Множество X называют **областью (множеством) определения** функции $f(x)$ и обозначается $D(f)$; x называют аргументом функции. Множество $f(X)$ значений $y \in Y$, которые поставлены в соответствие элементам $x \in X$, называют **множеством значений** функции.

Если множество $f(X)$ содержит один-единственный элемент C (т.е. всем $x \in X$ ставится в соответствие одно и то же число C), то функция называется постоянной, и в этом случае пишут

$$y = f(x) = C = \text{const} .$$

Графиком функции $y = f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy называется множество точек плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$, $x \in X$.

Способы задания функции:

1. Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. При этом если функция задается уравнением $F(x, y) = 0,$ то говорят, что функция $y(x)$ задана **неявно**.

Если при аналитическом способе задания область определения не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

2. Графический способ: задается график функции.

3. Табличный способ: функция задается таблицей, в которой дан ряд значений аргумента и соответствующих значений функции.

Примеры.

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а знаменатель не должен равняться нулю. Таким образом, область определения находится из неравенства: $x^2 - 4 > 0$. Откуда получаем $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $D(f) = \{(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)\}$.

2. Найти область определения функции $y = 3^x + \log_2(x+1)$.

Решение. Первое слагаемое определено при всех вещественных переменных, а логарифм определяется для положительных чисел. Значит, область определения задается неравенством $x+1>0$, или $x \in (-1;+\infty)$.

Ответ: $D(f) = (-1;+\infty)$.

Некоторые характеристики функций

1. Четные и нечетные функции

Определение. Функция $y = f(x)$ с областью определения X называется **чётной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ с областью определения X называется **нечётной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называются функциями **общего вида**. Из определения следует, что:

1. Область определения чётной и нечётной функций симметрична относительно начала координат.
2. График чётной функции симметричен относительно оси ординат.
3. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры.

1. Функция $f(x) = x^4 - 2x^2$ является четной, т.к. $(-x)^4 = x^4, (-x)^2 = x^2$ и, значит $f(-x) = f(x)$.

2. Функция $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2}$ является нечетной. Действительно,

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2} = -\frac{x^3 - 2x}{x^2} = -f(x).$$

3. Функция $f(x) = 5x + 3$ является функцией общего вида, так как при замене x на $-x$ первое слагаемое, меняет знак, а второе остается без изменений и, значит, меняется модуль значения функции.

2. Периодические функции

Определение. Функция $y = f(x)$ с областью определения X называется **периодической**, если существует такое число $T > 0$, что:

1) если $x \in X$, то $x - T \in X$ и $x + T \in X$;

2) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$;

3) среди всех таких чисел T есть наименьшее. Это наименьшее T называется периодом функции $y = f(x)$.

Пример.

Функция $f(x) = 3\sin 2x + 1$ периодическая с периодом $T = \pi$, так как из тригонометрии известно, что функция $y = \sin x$ имеет период 2π, соответственно $\sin 2x$ имеет период π.

3. Ограниченные функции

Определение. Функция $y=f(x)$ с областью определения X называется **ограниченной сверху** на множестве X_0, ($X_0 \subset X$), если существует такое число M, что для любого $x \in X_0$ выполнено неравенство $f(x) \le M$. Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве X_0, если существует такое m, что для любого $x \in X_0$ выполнено неравенство $f(x) \ge m$.

Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной** на множестве X_0, если существует такое $L>0$, что для любого $x \in X_0$ выполнено неравенство $|f(x)| \le L$.

Очевидно, что функция ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и ограничена снизу.

Отметим также, что сумма и произведение ограниченных функций также есть ограниченная функция.

Пример.

Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ограничена на всей числовой прямой. Так как $x^2 \ge 0,$ то $0 \le \dfrac{1}{x^2+1} \le 1,$ а это и означает ограниченность.

4. Монотонные функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на некотором множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента отвечает большее значение функции.

Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если функция $y=f(x)$ возрастает на X или убывает на X, то она называется **строго монотонной** на X.

Функция называется **неубывающей** на множестве X, если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$, для любых $x_1, x_2 \in X$, и **невозрастающей** на множестве X, если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$, для любых $x_1, x_2 \in X$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие на X функции называются функциями, **монотонными** на X.

Пример.

Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой. Действительно, если $x_1 < x_2$, то $x_1^3 < x_2^3$.

Обратная функция, сложная функция, элементарные функции.

Обратная функция

Пусть дана функция $y=f(x)$, для которой X - множество определения, $Y_0=f(X)$ - множество значений. Пусть эта функция возрастает или убывает на X (на рис. 4.1 показан случай возрастающей функции). Тогда каждому значению $y\in Y_0$ будет соответствовать одно-единственное значение $x\in X$, т.е. на множестве Y_0 оказывается определенной функция $x=\varphi(y)$. Эта функция называется **обратной** к функции $y=f(x)$, которую называют **прямой** функцией по отношению к своей обратной. Для обратной функции Y_0 - будет множеством определения, а X - множеством значений. Если прямая функция задана аналитически, то формула $x=\varphi(y)$ получается в результате разрешения соотношения $y=f(x)$ относительно x.

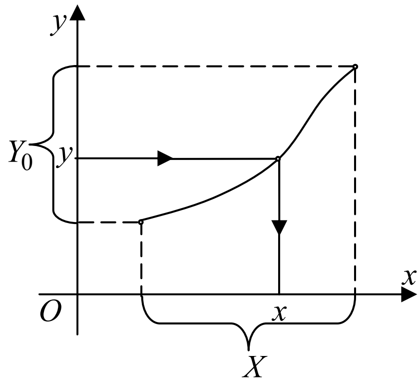


Рис. 4.1

Вводя обычные обозначения для значений аргумента и функции, будем в дальнейшем обратную функцию записывать в виде $y=\varphi(x)$. Из школьного курса известно, что графики прямой и обратной функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов.

Если функция $y=f(x)$ не возрастает или не убывает на множестве X, то могут иметь место такие значения $y\in Y_0$, которым отвечают более одного значения $x\in X$. В этом случае не существует обратной функции к функции $y=f(x)$. Но тогда обычно удается выделить такое подмножество X_0 множества X, на котором $y=f(x)$ уже возрастает или убывает. Рассматривая функцию $y=f(x)$, $x\in X_0$, получим функцию $x=\varphi(y)$, обратную к ней.

Пример.

Функция $y=x^3$, возрастает на всей числовой прямой (т.е. $X=\mathbb{R}$), множество ее значений $Y_0=\mathbb{R}$. Значит, эта функция имеет обратную функцию $y=\sqrt[3]{x}$, $X=\mathbb{R}$.

Сложная функция

Рассмотрим две формулы:

$$y=f(u),\ \ u\in U,$$
$$u=\varphi(x),\ \ x\in X.$$

Первая формула определяет функцию $y = f(u)$ на множестве U, а вторая – функцию $u = \varphi(x)$ на множестве X. Обе эти формулы, рассматриваемые совместно, определяют так называемую **сложную функцию**, или **функцию от функции**.

Множество определения X^* сложной функции состоит из тех и только тех значений $x \in X$, для которых соответствующие значения $u = \varphi(x)$ принадлежат множеству определения U функции $f(u)$.

Переменная u называется **промежуточным аргументом** сложной функции, а x, принимающий значения из множества X^*, называется **независимой переменной.**

Пример.

Рассмотрим две функции: функцию $y = f(u) = \lg u$, определенную на множестве $U = (0,+\infty)$, и функцию $u = \varphi(x) = 1 - x^2$, определенную на множестве $X = \mathbb{R}$. При этом $\varphi(X) = (-\infty,1]$.

Множества $\varphi(X)$ и U имеют общие элементы (их пересечение не является пустым множеством), в силу чего данные формулы определяют сложную функцию на множестве X^* тех значений x, для которых $u = 1 - x^2 > 0$. Решением последнего неравенства будет $-1 < x < 1$. Итак, данные формулы определяют сложную функцию

$$y = \lg\left(1 - x^2\right), \text{ где } x \in X^* = (-1,1)$$

Элементарные функции

Определим так называемые элементарные функции, которые, как правило, мы будем рассматривать в курсе математического анализа.

Как известно, к алгебраическим действиям относятся: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с рациональным показателем.

Явными алгебраическими функциями называются функции, значения которых получаются в результате конечного числа алгебраических действий над аргументом и различными постоянными.

Существуют три типа явных алгебраических функций:

1) целая рациональная функция (алгебраический многочлен); так называется функция вида

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где a_k - произвольные вещественные числа, а n - целое неотрицательное число;

2) дробная рациональная функция – частное от деления двух целых рациональных функций;

3) иррациональная функция; так называют явную алгебраическую функцию, для получения значений которой надо проделать над аргументом и действие извлечения корня. Примеры таких функций:

$$y=\sqrt{3x^2+2},\qquad y=\frac{\sqrt{2x+1}}{5x+3}.$$

Любая явная функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной** функцией. Простейшими трансцендентными функциями являются:

1) степенная функция $y=x^a$, где a - иррациональное число и $x>0$;
2) показательная функция $y=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$;
3) логарифмическая функция $y=\log_a x\left(a>0,a\neq 1\right)$;
4) тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ и другие;
5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ и другие.

К множеству элементарных функций относятся все явные алгебраические и простейшие трансцендентные функции, а также все функции, получающиеся из них с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции взятия функции от функции, примененных последовательно конечное число раз. Например, элементарными являются функции

$$y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\;\; y=\mathrm{arctg}\frac{2x^4}{1-x^2},\quad y=\mathrm{tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}.$$

Мы не будем относить к классу элементарных функций те функции, которые на своем множестве определения задаются более чем одной формулой, и которые невозможно задать одной формулой, удовлетворяющей только что сформулированными условиями. Так, например, функция

$$y=\begin{cases}x+2, x\leq 0,\\ x^2, x>0\end{cases}$$

элементарной не является.

Решение задач

Пример 1. Найти область определения функции $y=\dfrac{3}{2-x}$.

Решение: Выражение в знаменателе не должно равняться нулю, т.е. $x\neq 2$, а это значит, что областью определения данной функции является множество вещественных чисел x за исключением $x=2$.

Пример 2. Найти область определения функции $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$.

Решение: Каждое подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т.е. должны выполняться одновременно два неравенства $x-2\geq 0$ и $5-x\geq 0$, а это значит, что должны быть $x\geq 2$ и $x\leq 5$. Выполнение этих двух неравенств означает, что $x\in\left[2;5\right]$.

Пример 3. Проверить, будет ли функция $y = x^3 + \sin x$ четной или нечетной.

Решение: Подставим в данную функцию $-x$ вместо x и проведем элементарные операции. Из тригонометрии известно, что $y = \sin x$ - функция нечетная, поэтому

$$y(-x) = \left(-x\right)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x = -\left(x^3 + \sin x\right) = -y(x),$$

а это и значит, что данная функция нечетная.

Пример 4. Проверить, будет ли функция $y = x^2 + \cos 2x$ четной или нечетной.

Решение: Подставим в данную функцию $-x$ вместо x и проведем элементарные операции. Из тригонометрии известно, что функция $y = \cos x$ четная, поэтому

$$y(-x) = \left(-x\right)^2 + \cos 2(-x) = x^2 + \cos 2x = y(x),$$

а это и значит, что данная функция четная.

Пример 5. Проверить, будет ли функция $y = \dfrac{3x}{x+5}$ четной или нечетной.

Решение: Функция y не определена в точке $x = -5$. Значит, мы не можем рассмотреть $y(-x)$ для $x = 5$. Однако в точке $x = 5$ определена. Поэтому функция не может быть ни четной, ни нечетной, т.е. данная функция – функция общего вида.

Пример 6. Проверить, будет ли функция $y = x^2 + 3x + 7$ четной или нечетной.

Решение: Подставим в данную формулу $-x$ вместо x:

$$y(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 7 = x^2 - 3x + 7.$$

Т.е. ни одно из равенств $y\left(-x\right) = y\left(x\right)$ или $y\left(-x\right) = -y\left(x\right)$ не выполняется.

Таким образом, данная функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. это функция общего вида.

Пример 7. Показать, что функция $y = 3x^2 + 7$ ограничена снизу на всей числовой прямой, но не ограничена сверху.

Решение: $3x^2 + 7 \geq 7$, это и означает ограниченность снизу. Так как x^2 может принимать сколь угодно большие значения, то функция сверху не ограничена.

Пример 8. Показать, что функция $y = 3x^3 + 2x^2$ возрастает на промежутке $\left[0;+\infty\right)$.

Решение: Пусть $0 \leq x_1 < x_2$. Тогда $x_1^3 < x_2^3$ и $x_1^2 < x_2^2$. Значит,

$$y(x_1) = 3x_1^2 + 2x_1^2 < 3x_2^3 + 2x_2^2 = y(x_2),$$

т. е. функция возрастает на рассматриваемом промежутке.

Пример 9. Показать, что функция $y = x^2 - 3x$ убывает на промежутке $(-\infty;0]$.

Решение: Пусть $x_1 < x_2 \le 0$. Для отрицательных x из условия $x_1 < x_2$ следует, что после возведения в квадрат обеих частей этого неравенства будем иметь $x_1^2 > x_2^2$. Умножив обе части неравенства $x_1 < x_2$ на отрицательное число, получим $-3x_1 > -3x_2$. Складывая последние два неравенства, будем иметь $x_1^2 - 3x_1 > x_2^2 - 3x_2$, а это и означает, что $y(x)$ убывает на рассматриваемом промежутке.

Вопросы для самопроверки по теме 4.1

1. Дайте определение функции и перечислите способы задания функции.
2. Дайте определения графика функции.
3. Дайте определение и приведите примеры чётной функции, нечётной функции, функции общего вида. Укажите, какими свойствами обладают их графики.
4. Дайте определение периодической функции. Приведите примеры.
5. Сформулируйте определения функции, ограниченной на данном множестве. Приведите примеры.
6. Сформулируйте, какие функции называют монотонными.
7. Дайте определение обратной функции. Укажите условия её существования.
8. Какие обратные тригонометрические функции Вам известны? Укажите области их задания и множества значений.
9. Вспомните, какие функции называются элементарными.
10. Дайте определение обратной функции.
11. Дайте определение четной функции.

4.2. Предел последовательности. Предел функции.

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Последовательности и их основные характеристики.**
- **Определение предела последовательности.**
- **Определение предела функции; простейшие свойства пределов.**
- **Бесконечно малые и бесконечно большие функции.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки.

Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 2, с. 26-42 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов.

Последовательности и их основные характеристики

Понятие предела функции не только пронизывает весь математический анализ, но и в других разделах математики играет важную роль. Мы начнем изучать понятие предела с простейшего частного случая – предела последовательности.

Определение. Функция, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется **числовой последовательностью**.

Итак, пусть задана последовательность $f(n),(n=1,2,...)$. Значения функции в данном случае образуют счётное множество и их обычно обозначают так: $f(1)=x_1, f(2)=x_2, f(3)=x_3,\cdots, f(n)=x_n,\cdots$.

По сложившейся традиции совокупность чисел $x_1, x_2,\cdots,x_n,\cdots$ также называют **бесконечной** числовой последовательностью и обозначают $\{x_n\}$. При этом сами числа x_n называют членами последовательности, а выражение $x_n = f(n)$ **- общим членом последовательности** $\{x_n\}$.

Чаще всего последовательность задается формулой, определяющей ее общий член x_n. Например, $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{x_n\}=\left\{n\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной***,* если существует число $M>0$, такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n|\le M$.

Аналогично, последовательность $\{x_n\}$ называют **ограниченной сверху** (справа), если все ее члены не превосходят некоторого числа M, и **ограниченной снизу** (слева), если все ее члены не меньше некоторого числа m.

Очевидно, что ограниченная последовательность ограничена как слева, так и справа. Если же последовательность ограничена с одной стороны, то она может быть неограниченной. Очевидно, что определение неограниченности (как отрицания ограниченности) будет следующим:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной***,* если для любого числа $M>0$, найдется такое $n_0\in\mathbb{N}$, что выполняется неравенство $|x_{n_0}|>M$.

Примеры.

1. Последовательность $\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}$ ограничена, так как при всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n|\le 1$.

2. Последовательность $\{x_n\}=\{n-5\}$ ограничена снизу, так как $x_n\ge -4$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

3. Последовательность $\{x_n\}=\{-1-n\}$ ограничена сверху; так как $x_n\le -1$.

4. Последовательности $\{n-5\}$ и $\{-1-n\}$ не являются ограниченными.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} > x_n$, означающее, что последующий член последовательности больше предыдущего.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} < x_n$, означающее, что последующий член последовательности меньше предыдущего.

Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает или убывает, то она называется **строго монотонной**.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} \ge x_n$, означающее, что последующий член последовательности всегда не меньше предыдущего и **невозрастающей**, если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} \le x_n$, означающее, что последующий член последовательности всегда не больше предыдущего.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются **монотонными**.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{n^2 + 3n - 2\}$ возрастающая.

Решение. Считая n произвольным натуральным числом, рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - 2 - n^2 - 3n + 2 = \left((n+1)^2 - n^2\right) + 3\left(n+1-n\right) = 2n+1+3 > 0$$

т.е. $x_{n+1} > x_n$, значит, последовательность возрастающая.

Определение предела последовательности

I. Конечный предел последовательности

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$,если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тот факт, что число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер N такой, чтобы для всех $n > N$ выполнялось бы неравенство $\left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это неравенство выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому в качестве N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда при $n > N$ выполняется неравенство $\left|0-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

II. Бесконечный предел последовательности

Выше мы дали определение конечного предела последовательности, однако существуют последовательности, которые не имеют конечного предела. Например, $x_n = n^2$.

Определение. Предел последовательности x_n равен бесконечности, если для любого положительного числа M найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n| > M$.

В этом случае пишут так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Определение. Предел последовательности x_n равен $+\infty$, если для любого положительного числа M найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $x_n > M$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Определение. Предел последовательности x_n равен $-\infty$, если для любого положительного числа M найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $x_n < -M$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$.

Последовательности, которые стремятся к $\infty, +\infty$ или $-\infty$, называются **бесконечно большими** последовательностями.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2) = +\infty$.

Решение. Возьмем произвольное число $M > 0$ и найдем номер N такой, что для всех $n > N$ выполнялось бы неравенство $3n - 2 > M$. Это неравенство выполняется, если $n > \frac{M+2}{3}$. Поэтому в качестве N можно взять целую часть числа $\frac{M+2}{3}$. Тогда при $n > N$ выполняется неравенство $3n-2 > M$, что и означает $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2) = +\infty$.

Свойства пределов последовательностей и примеры вычисления пределов последовательностей аналогичны свойствам и приемам вычислений пределов функций, которые мы разберем позже.

Определение предела функции

Для определения предела функции нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия.

I. Окрестности точек

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. **ε-окрестностью точки** x_0 будем называть множество точек x, расстояние $\rho(x, x_0)$ от которых до точки x_0 меньше ε. Обозначим ε -окрестность точки x_0 так: $R_\varepsilon(x_0)$. Как следует из определения окрестности и определения расстояния (абсолютной величины) на множестве R (на числовой прямой) - $R_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ или $R_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Геометрически $R_\varepsilon(x_0)$. - это отрезок длины 2ε с серединой в точке x_0, без включения в него концевых точек (рис. 4.2а).

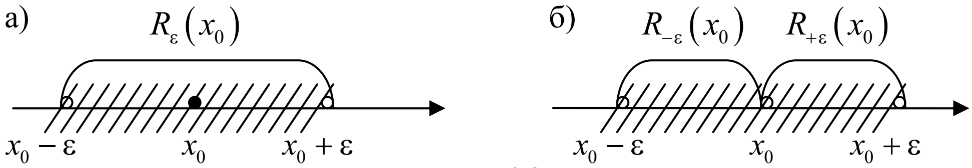


Рис 4.2.

Любую точку числовой оси, соответствующую некоторому вещественному числу, принято называть **конечной точкой**.

Пусть x_0 - конечная точка. Введем в рассмотрение левую $R_{-\varepsilon}(x_0)$ ε-окрестность точки x_0 и правую $R_{+\varepsilon}(x_0)$ ε-окрестность точки x_0. По определению, $R_{-\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $R_{+\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ (рис.4.2б). Наряду с ε-окрестностью точки используют и понятие окрестности точки.

Определение. Окрестностью X конечной точки x_0 называется любое подмножество $X \subset R$, содержащее некоторую ε - окрестность точки x_0.

Введем теперь на числовой оси три «**бесконечные**» точки: $+\infty, -\infty, \infty$. Сделаем это путем определения их ε-окрестностей $R_\varepsilon(+\infty), R_\varepsilon(-\infty), R_\varepsilon(\infty)$, ибо интересовать нас будут впоследствии не сами точки, а их окрестности. Итак, пусть $\varepsilon > 0$.

Определение.

$$R_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right); \quad R_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right); \quad R_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty),$$

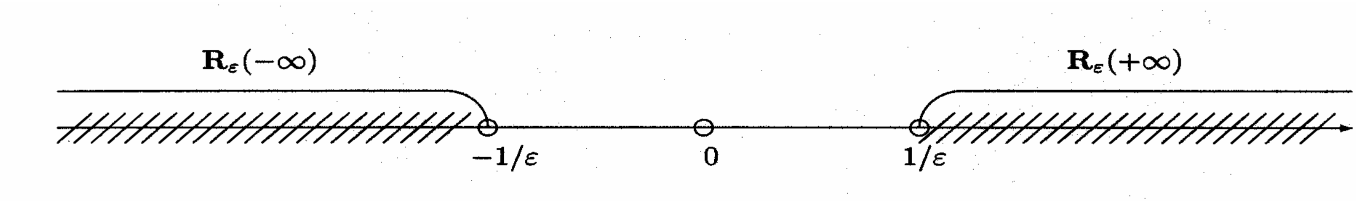


Рис 4.3.

Следовательно, если $x \in R_\varepsilon(+\infty)$, то это означает $x > \frac{1}{\varepsilon}$, если $x \in R_\varepsilon(-\infty)$, то это означает $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, если $x \in R_\varepsilon(\infty)$, то это означает $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ (рис.4.3).

Естественно считать бесконечные точки $+\infty$ и $-\infty$ частными случаями точки ∞.

II. Определение предела функции; простейшие свойства пределов

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности конечной или бесконечной точки a, причем если a - конечная точка (число), то в самой этой точке функция может быть и не определена. Часто бывает, что с приближением значений аргумента x к a соответствующие значения функции $y = f(x)$ приближаются к некоторому A (где A - конечная или бесконечная точка). Таким образом, ясно, что для точек x, принадлежащих достаточно малой окрестности a, соответствующие точки $y = f(x)$ принадлежат сколь угодно малой окрестности A.

Определение. Если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_\delta(a)$ ($x \neq a$, если a -число) следует $f(x) \in R_\varepsilon(A)$, то A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

В зависимости от того, конечны или бесконечны a и A, использование соответствующих определений окрестностей позволяет приведенное выше общее определение предела функции формулировать для различных случаев на языке неравенств.

Отметим следующие два очевидных равенства, непосредственно следующих из определения предела функции.

1) $\lim\limits_{x \to a} x = a$,

2) если $f(x) = C$, где $C - \text{const}$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} C = C.$

Сформулируем простейшие свойства пределов.

Теорема. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится к конечному пределу, то этот предел является единственным.

Теорема. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится к конечному пределу, то в некоторой окрестности X предельной точки a эта функция ограничена.

Теорема. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится к конечному пределу A и в некоторой окрестности X точки a эта функция положительна (отрицательна), то $A \geq 0$ ($A \leq 0$).

Односторонние пределы функции

I. Определение односторонних пределов.

Пусть a - конечная точка (число). Определение предела функции $y = f(x)$ в точке a (при $x \to a$) не накладывает никаких условий на характер приближения значений аргумента x к точке a. Введем теперь дополнительно такие условия: пусть значения x приближаются к a, оставаясь при этом строго меньше a, либо больше a, то есть, находясь либо в левой, либо в правой окрестности точки a, и сформулируем два определения.

Определение. Если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_{-\delta}(a)$ следует условие $f(x) \in R_{\varepsilon}(A)$, то A называется **левым пределом** функции $f(x)$ в точке a и обозначается одним из символов

$$f(a-0), \quad \lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x).$$

Определение. Если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_{+\delta}(a)$ следует условие $f(x) \in R_{\varepsilon}(A)$, то A называется **правым пределом** функции $f(x)$ в точке a и обозначается одним из символов

$$f(a+0), \quad \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x).$$

Левый и правый пределы функции в точке a называются **односторонними пределами** функции в этой точке. Из рис. 4.4 видно, что односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ могут быть не равны друг другу.

Очевидно, что из существования конечного предела функции $f(x)$ в точке a (иногда его называют **двусторонним пределом** функции в точке a) вытекает существование и равенство друг другу обоих односторонних пределов функции в этой точке.

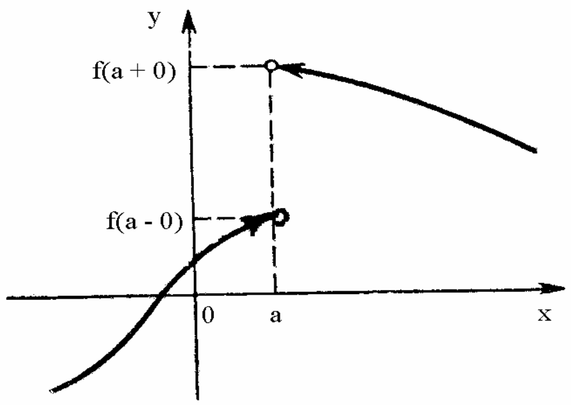


Рис. 4.4

И обратно, из существования и равенства друг другу обоих односторонних пределов следует существование конечного предела.

II. Признаки существования конечного предела функции

Теорема (о пределе промежуточной функции). Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ определены в некоторой окрестности точки a (исключая, может быть, саму эту точку, если a - число), причем в этой окрестности выполнены неравенства $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x).$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_3(x) = A,$

то имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A.$

Теорема (о пределе монотонной ограниченной функции). Пусть функция $f(x)$ монотонна и ограничена в окрестности точки a. Тогда существуют конечные левый и правый пределы $f(x)$ в точке a, если a - конечная точка, и конечный предел $f(x)$ при $x \to a$, если $a = +\infty$ или $a = -\infty.$

Используя эту теорему, можно доказать, что существует конечный $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Этот предел - число иррациональное, его обозначают буквой e и называют числом Непера*.

Таким образом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Это “второй замечательный предел”. “Первый замечательный предел” будет приведен позднее.

Приведем несколько первых знающих цифр этого числа: $e = 2{,}718281828459045....$

Логарифм числа a по основанию e называется **натуральным логарифмом** и обозначается символом $\ln a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty.$

Теорема (о связи бесконечно малой и бесконечно большой). Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая в точке a, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая в этой точке; если $f(x)$ - бесконечно большая в точке a, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

* Джон Непер (1550-1617) – шотландский математик.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

Решение. Так как $x\to 0$, то x- бесконечно малая, $\frac{1}{x}$- обратная бесконечно малой и, значит, бесконечно большая. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций есть также функция, бесконечно малая в этой точке.

2. Произведение функции $f(x)$, ограниченной в достаточно малой окрестности точки a, и функции $\alpha(x)$, бесконечно малой в этой точке, есть функция, бесконечно малая в точке a.

3. Произведение $C\alpha(x)$, т.е. постоянной C на бесконечно малую в точке a функцию $\alpha(x)$, есть функция, бесконечно малая в этой точке.

4. Произведение $\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)$ двух функций, бесконечно малых в точке a, есть функция, бесконечно малая в этой точке.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$.

Решение. Так как $x\to\infty$, то обратная функция $\frac{1}{x}$- бесконечно малая. Произведение двух бесконечно малых $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ - также бесконечно малая. Произведение постоянной 2 на бесконечно малую $\frac{1}{x^2}$ - бесконечно малая. Сумма бесконечно малых $\frac{1}{x}$ и $\frac{2}{x^2}$ - бесконечно малая. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{5}{x}$.

Решение. x^2- бесконечно малая (произведение двух бесконечно малых $x\cdot x$), $\sin\frac{5}{x}$ - функция ограниченная. Тогда, по свойству 2 бесконечно малых функций, $x^2\sin\frac{5}{x}$- бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{5}{x}=0$.

Свойства бесконечно больших функций

1. Если при $x\to a$ функция $g(x)$ стремится к отличному от нуля пределу, а $f(x)$ - бесконечно большая при $x\to a$, то произведение $g(x)\cdot f(x)$ является бесконечно большой функцией при $x\to a$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$.

3. Если $f(x)$ - бесконечно большая в точке a, а $g(x)$ - ограниченная в окрестности точки a, то $f(x)+g(x)$ - бесконечно большая в точке a.

Сумма бесконечно больших функций, имеющих разные знаки, может не быть бесконечно большой.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ функции x^2 и x^4 - бесконечно малые. Тогда $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x^4}$ - бесконечно большие. $\lim\limits_{x\to 0} 3=3\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} 2=2\neq 0$, значит, функции $\dfrac{3}{x^2}$ и $\dfrac{2}{x^4}$ - бесконечно большие (свойство 1), причем, обе они положительные. Тогда в силу свойства 2 их сумма стремится к $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)=+\infty$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль в математическом анализе, связанную, в частности, с тем, что понятие конечного предела может быть сведено к понятию бесконечно малой, как это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ при $x\to a$ стремилась к конечному пределу A, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)-A=\varphi(x)$ была бесконечно малой в точке a.

С помощью этой теоремы доказывается **теорема о конечных пределах функций**

Теорема. Если при $x\to a$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стремятся каждая к своему конечному пределу, то

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+5x-8\right)$.

Решение. Используя эту теорему и простейшие свойства пределов, получаем

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+5x-8\right)=3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+5\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}8=3\cdot 2^2+5\cdot 2-8=14.$$

Решение задач

Пример 1. Показать, что последовательность $\{x_n\}=\left\{\dfrac{\sin n}{n+2}\right\}$ ограничена.

Решение. Покажем, что $|x_n|$ при любом n не превосходит некоторого числа. Действительно, из тригонометрии известно, что синус угла по модулю не превосходит единицы. Значит, $|\sin n|\le 1$. А т.к. $n\ge 1$, то $n+2>1+2=3$. Тогда $\left|\dfrac{\sin n}{n+2}\right|\le\dfrac{1}{3}$ при всех n, что и означает ограниченность последовательности.

Пример 2. Показать, что последовательность $\{x_n\}=\{2+3n\}$ ограничена снизу.

Решение. Оценим x_n снизу. Так как $n\ge 1$, то $x_n=2+3n\ge 2+3\cdot 1=5$, что означает ограниченность снизу.

Пример 3. Показать, что последовательность $\{x_n\}=\{5-n\}$ ограничена сверху.

Решение. Оценим x_n сверху. Так как $n\ge 1$, то $x_n=5-n\le 5-1=4$. Это означает, что последовательность ограничена сверху.

Пример 4. Показать, что последовательность $\{x_n\}=\{(-1)^n n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

Решение. Заметим сначала, что $|x_n|=n$. Какое бы число $M>0$ мы ни взяли, всегда найдется целое число, большее этого M. Т.е. для любого $M>0$ найдется x_n такое, что $|x_n|>M$, и все члены последовательности $\{|x_n|\}$ с большими номерами будут также больше этого M. Т.к. знаки членов исходной последовательности чередуются, то найдется бесчисленное множество положительных x_n, больших M, и, соответственно, бесчисленное множество отрицательных x_n, меньших (-M). Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

Пример 5. Показать, что последовательность $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{3^n}-n\right\}$ - убывающая.

Решение. Покажем, что каждый следующий член последовательности меньше предыдущего. Рассмотрим разность

$$x_{n+1}-x_n=\left(\frac{1}{3^{n+1}}-(n+1)\right)-\left(\frac{1}{3^n}-n\right)=\frac{1}{3^{n+1}}-n-1-\frac{1}{3^n}+n=\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}-1\right)-1=-\frac{2}{3^{n+1}}-1<0,$$

т.е. $x_{n+1} < x_n$, значит, последовательность убывает.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} x\cos(2x-8)$.

Решение. Т.к. $x \to 0$, то x - бесконечно малая. А $\cos(2x-8)$ - функция ограниченная, значит, произведение этих функций – бесконечно малая. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0} x\cos(2x-8) = 0$.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}\left(5 + \frac{1}{3+x^2}\right)$.

Решение. Функция $\frac{1}{x^2}$, обратная бесконечно большой, - бесконечно малая. Покажем, что функция $\left(5 + \frac{1}{3+x^2}\right)$ - ограниченная. Действительно, так как $x^2 \geq 0$, то $\frac{1}{3+x^2} \geq 0$, и, значит, $5 + \frac{1}{3+x^2} \geq 5$. С другой стороны, $3 + x^2 \geq 3$, и, следовательно, $\frac{1}{3+x^2} \leq \frac{1}{3}$. Тогда $5 + \frac{1}{3+x^2} \leq 5 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$. Таким образом, мы получили, что функция $5 + \frac{1}{3+x^2}$ ограничена сверху и снизу, и, следовательно, она ограниченная. Произведение бесконечно малой на ограниченную – бесконечно малая. Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(5 + \frac{1}{3+x^2}\right) = 0$.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x^2 + \sin 2x\right)$.

Решение. При $x \to \infty$ x^2 - бесконечно большая, как произведение двух бесконечно больших, а $\sin 2x$ - функция ограниченная, тогда сумма – бесконечно большая. Соответственно, $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x^2 + \sin 2x\right) = \infty$.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1}\left(5x^2 - 7x + \frac{2}{x}\right)$.

Решение. Для решения этого примера воспользуемся теоремой о конечных пределах, а также тем, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$

$$\lim_{x \to 1}\left(5x^2 - 7x + \frac{2}{x}\right) = 5\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2 - 7\lim_{x \to 1} x + \frac{2}{\lim\limits_{x \to 1} x} = 5 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + \frac{2}{1} = 0.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{x-2}$.

Решение. Рассмотрим $\lim\limits_{x \to 2}\left(x-2\right)$ и воспользуемся теоремой о конечных пределах. Тогда $\lim\limits_{x \to 2}\left(x-2\right) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2 - 2 = 0$. Таким образом, функция $\frac{1}{x-2}$ обратная бесконечно малой, - бесконечно большая. Значит, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{x-2} = \infty.$

Вопросы для самопроверки по теме 4.2

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Какая последовательность называется монотонной?
3. Какая последовательность называется ограниченной?
4. Дайте определение конечного предела числовой последовательности.
5. Перечислите свойства последовательностей, имеющих конечный предел.
6. Дайте определение бесконечного предела числовой последовательности.
7. Дайте определение предела функции в точке.
8. Сформулируйте признаки существования конечного предела.
9. Дайте определение односторонних пределов функции.
10. Дайте определение числа e.
11. Дайте определение бесконечно малых функций и перечислите их свойства.
12. Дайте определение бесконечно больших функций и перечислите их свойства.
13. Сформулируйте теорему о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций.
14. Сформулируйте теорему о конечных пределах.

4.3. Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.**
- **Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$.**
- **Сравнение бесконечно малых функций.**
- **Вычисление пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 2, с. 48-52 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить задачу из контрольной работы № 2 в соответствии со своим вариантом под № 51-60.

Непосредственное вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Можно показать, что, если конечная точка a принадлежит области определения элементарной функции $f(x)$, то для отыскания предела этой функции при $x \to a$ достаточно вычислить значение функции при $x = a$; это значение и будет искомым пределом.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \sin \frac{\pi x}{2} \sqrt{x^2 + 3x}$.

Решение. Точка $x = 1$ принадлежит области определения рассматриваемой функции, значит,

$$\lim_{x \to 1} \sin \frac{\pi x}{2} \sqrt{x^2 + 3x} = \sin \frac{\pi \cdot 1}{2} \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} = 1 \cdot 2 = 2.$$

Если при формальной подстановке предельного значения получаются выражения вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$, то для нахождения предела функции в этих случаях необходимо проводить преобразования данных выражений. Вычисление таких пределов называется **раскрытием неопределенностей**. Рассмотрим, стандартные приемы раскрытия некоторых неопределенностей.

I. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$; случай рациональной дроби

При нахождении $\lim\limits_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены степени n и m соответственно) в случае, если $P_n(x) \underset{x \to a}{\to} 0$ и $Q_m(x) \underset{x \to a}{\to} 0$, нужно разложить числитель и знаменатель на множители, выделить множитель $(x - a)^k$, где k - кратность корня $x = a$, и сократить на него дробь. Затем подставить предельное значение $x = a$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Непосредственная подстановка значения $x = 1$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Разложим на множители числитель дроби, используя формулу разности кубов. Для разложения на множители знаменателя найдем его корни: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ и воспользуемся формулой: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Тогда

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = -3.$$

II. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$; случай отношения иррациональных функций

Чтобы найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции и хотя бы одна из этих функций иррациональная, нужно и числитель, и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряженное имеющемуся иррациональному. После преобразований сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Непосредственно подставляя $x=0$, проверяем, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножаем и числитель, и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-2x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}.$$

В числителе получили разность квадратов. Тогда исходный предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}+1}=-1.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Решение. Здесь также имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножаем и числитель, и знаменатель на произведение соответствующих сопряженных выражений:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3+x}-2\right)\left(\sqrt{3+x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(3+x-4)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(2-x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{-\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$;

I. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; случай алгебраических функций

Для нахождения $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены степени m и n соответственно, нужно вынести за скобки в числителе x^m, а в знаменателе x^n (наивысшую степень каждого многочлена), сократить дробь, а затем использовать теоремы о конечных пределах и свойства, бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{7x^2+3x-8}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{7x^2+3x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}.$$

При $x\to\infty$ функции $\frac{2}{x},\frac{5}{x^2},\frac{3}{x}$ и $\frac{8}{x^2}$ - бесконечно малые.

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+7}{3x^2-8}$.

Решение. Аналогично тому, как мы действовали в предыдущем примере, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+7}{3x^2-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(5-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(3-\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x}}{3-\frac{8}{x^2}}\right].$$

Дробь в квадратных скобках стремится к $\frac{5}{3}$, т.е. к не равному нулю пределу, а x - бесконечно большая. Значит, произведение – бесконечно большая, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+7}{3x^2-8}=\infty$.

Аналогичный прием используется для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ в случае иррациональных функций.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Решение. Вынесем за скобки в числителе x. В знаменателе сначала вынесем под знаком корня за скобки x^2. Потом преобразуем выражение, учитывая, что $\sqrt{x^2}=|x|$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}.$$

Т.к. $x\to+\infty$, то $x>0$ и $|x|=x$.

Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+\frac{8}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\dfrac{5+0}{\sqrt{4-0}}=\dfrac{5}{2}$.

При решении этого примера мы существенно использовали знак бесконечности $(+\infty)$. Аналогичный предел при $x\to-\infty$ равен $-\dfrac{5}{2}$, так как при $x<0$ $|x|=-x$.

II. Неопределенность вида $\infty-\infty$; случай алгебраических функций

При отыскании предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$, где $f(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$ и $g(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$ (или $f(x)\underset{x\to a}{\to}-\infty$ и $g(x)\underset{x\to a}{\to}-\infty$) нужно преобразовать разность $f(x)-g(x)$ так, чтобы перейти к неопределенности видов $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. При этом нужно учесть, что если $f(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$ и $g(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$ (или обе функции стремятся к $-\infty$), то $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим все выражение на сопряженное

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}.$$

Получили неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее стандартным способом.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем выражения в скобках к общему знаменателю, учитывая, что $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$. Получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которую раскроем стандартным способом:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

Сравнение бесконечно малых функций; эквивалентные бесконечно малые

Пусть при $x\to a$ функции $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ - бесконечно малые. Вычисление предела

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

называется **сравнением** этих двух бесконечно малых друг с другом. Здесь обычно пользуются следующей терминологией:

1. Если этот предел равен нулю, то говорят, что $\alpha(x)$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$; в этом случае пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$ (читается: "$\alpha(x)$ равно 0 - малое от $\beta(x)$").

2. Если этот предел равен ∞ (или, в частности, $+\infty$ или $-\infty$), то говорят, что $\beta(x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

3. Если этот предел равен любому числу $A\neq 0$, то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - одного порядка.

4. Если этот предел не существует, то говорят, что бесконечно малые не сравнимы.

Важным частным случаем бесконечно малых функций одного порядка являются эквивалентные бесконечно малые.

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые при $x\to a$, называются **эквивалентными бесконечно малыми***,* если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

В этом случае пишут: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Теорема (о сравнении произведения). Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждый из сомножителей.

Теорема (о замене бесконечно малых эквивалентными). Если функции $\alpha_1(x),\alpha(x),\beta_1(x),\beta(x)$ бесконечно малы при $x\to a$, причем $\alpha_1(x)\sim\alpha(x),\beta_1(x)\sim\beta(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Теорема (необходимое и достаточное условие эквивалентности). Для того, чтобы функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были при $x\to a$ эквивалентными бесконечно малыми, необходимо и достаточно, чтобы разность $\alpha(x)-\beta(x)$ была бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ или $\beta(x)$.

Пример. Сравнить функции $\alpha(x)=x-2$ и $\beta(x)=\sqrt{x^2-4}$ при $x\to 2+0$.

Решение. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2+0}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{2-2}}{\sqrt{2+2}}=0.$$

Это означает, что при $x\to 2+0$ $\alpha(x)=x-2$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Для вычисления некоторых пределов бывает удобно использовать теорему о замене одних бесконечно малых функций другими бесконечно малыми (более простыми), эквивалентными им.

Приведем список эквивалентных бесконечно малых:

Пусть $\alpha(x)\underset{x\to a}{\to}0$, тогда при $x\to a$:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$,
2. $\mathrm{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$,
3. $\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$,
4. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$,
5. $A^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln A$,
6. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$,
7. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\left[\alpha(x)\right]^2}{2}$,

8. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

9. $\mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)\mathrm{tg}2x}{\left(1-e^x\right)\left(1-\cos 4x\right)}$.

Решение. Так как при $x\to 0$ будем иметь $3x^2\to 0,\ 2x\to 0,\ 4x\to 0$, то можно заменить имеющиеся бесконечно малые им эквивалентными:

$$\ln\left(1+3x^2\right)\sim 3x^2, \qquad \mathrm{tg}2x\sim 2x,$$

$$1-e^x=-\left(e^x-1\right)\sim -x, \qquad 1-\cos 4x\sim\frac{\left(4x\right)^2}{2}=8x^2.$$

Тогда исходный предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2 2x}{\left(-x\right)\cdot 8x^2}=-\dfrac{3}{4}$.

Решение задач

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-2}{x^3-6x+1}$.

Решение. Подставим вместо x предельное значение $x=2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^x-2}{x^3-6x+1}=\frac{3^2-2}{2^3-6\cdot 2+1}=-\frac{7}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-x-3}$.

Решение. Непосредственно подставляя предельное значение $x=-1$, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители. Решая квадратное уравнение, находим корни числителя: $x_1=-1,\ x_2=2$. Значит, $x^2-x-2=\left(x+1\right)\left(x-2\right)$.

Корни знаменателя - $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{3}{2}$. Соответственно,

$$2x^2-x-3=2\left(x+1\right)\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{2\left(x+1\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{-1-2}{-2-3}=\dfrac{3}{5}$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-4x^2+4x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Так же, как в предыдущем примере, разложим на множители числитель и знаменатель.

$$2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right);$$

$$x^3-4x^2+4x=x\left(x^2-4x+4\right)=x(x-2)^2.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-4x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-2}.$

Первый множитель стремится к $\dfrac{3}{2}$ - к неравному нулю пределу, а второй множитель стремится к ∞ (функция, обратная бесконечно малой – бесконечно большая). Произведения таких функций – бесконечно большая. Значит,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-4x^2+4x}=\infty.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}\cdot$ Умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}\cdot$ Умножим и числитель и знаменатель на выражения сопряженные числителю и знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5}\right)}{\left(x^2+5-5\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5}\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{\sqrt{0+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{0+1}+1}=\sqrt{5}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-3}{2x^3-8x^2+x-27}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки в числителе x^2 (высшую степень), а в знаменателе x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x-3}{2x^3-8x^2+x-27}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{27}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{5+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{27}{x^3}}=0\cdot\frac{5}{2}=0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\to\infty$ функции $\frac{1}{x},\frac{7}{x},\frac{3}{x^2},\frac{8}{x},\frac{1}{x^2},\frac{27}{x^3}$ - бесконечно малые (обратные бесконечно большим).

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2-7x+8}+3x^2}{x^2-11x+3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2-7x+8}+3x^2}{x^2-11x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}+3x^2}{x^2-11x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}+3x^2}{x^2-11x+3}$$

.

Так как $x\to-\infty$, то $x<0$ и, значит, $|x|=-x.$ Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}+3x^2}{x^2-11x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}+3x^2}{x^2-11x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}+3\right)}{x^2\left(1-\frac{11}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}+3}{1-\frac{11}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{-\sqrt{1-0+0}+3}{1-0+0}=2.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)$.

Решение. Умножим и разделим данную функцию на выражение, сопряженное множителю, стоящему в скобках, и воспользуемся тем, что $x>0$, т.к. $x\to+\infty$, и, значит, $|x|=x.$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-5}\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+5-x^2+5\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}=\frac{10}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0}}=5.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)\sin 3x^2}{\arcsin^2(2x)\,\mathrm{tg}x}$.

Решение. Если $x\to 0$, то $2x\to 0$, $3x^2\to 0$, $2x\to 0$, и, значит, можно заменить имеющиеся бесконечно малые на эквивалентные:

$\ln(1-2x)\sim -2x$, $\sin 3x^2\sim 3x^2$, $\arcsin^2 2x\sim (2x)^2=4x^2$, $\mathrm{tg}x\sim x.$

Тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)\sin 3x^2}{\arcsin^2 2x\,\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot 3x^2}{4x^2\cdot x}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\mathrm{arctg}3x}{1-\cos^3 x}$.

Решение. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\mathrm{arctg}3x}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\mathrm{arctg}3x}{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}.$$

Заменим бесконечно малые на эквивалентные:

$\sqrt{1-\sin 2x}-1\sim -\dfrac{\sin 2x}{2}\sim -\dfrac{2x}{2}=-x$, $\mathrm{arctg}3x\sim 3x$, $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\mathrm{arctg}3x}{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot 3x}{\frac{x^2}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}=-\frac{6}{1+\cos 0+\cos^2 0}=-\frac{6}{1+1+1}=-2.$$

Пример 11. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=e^{2x}-1$ и $\beta(x)=\mathrm{arctg}x^2$ при $x\to 0$.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, заменяя бесконечно малые на эквивалентные:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\mathrm{arctg}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty.$$

Это означает, что $\mathrm{arctg}x^2$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $e^{2x}-1$.

Вопросы для самопроверки по теме 4.3

1. Чему равен $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)$ - элементарная функция, а точка a принадлежит области определения функции $f(x)$?

2. Что такое раскрытие неопределенности? Перечислите виды неопределенностей.

3. Что значит сравнить две бесконечно малые функции?

4. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?

5. Что такое «второй замечательный предел»?

6. Перечислите пары эквивалентных бесконечно малых.

4.4. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции, их классификация

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Непрерывность функции в точке и на промежутке.**
- **Свойства непрерывных функций.**
- **Точки разрыва функции**.

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 2, с. 53-56 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить задачу из контрольной работы № 2 в соответствии со своим вариантом под № 61-70.

Непрерывность функции в точке

Пусть a - конечная точка (число). Как мы видели, значение предела функции $f(x)$ при $x\to a$, как и самый факт существования этого предела, вовсе не зависит от того, чему равно значение $f(a)$ функции в точке a, и даже от того, определена ли вообще функция $f(x)$ в точке a.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a, если предел функции при $x\to a$ равен ее значению в точке a, т.е. если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Последнее равенство эквивалентно следующему

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a),$$

означающему, что в точке непрерывности левый и правый пределы функции $f(x)$ равны друг другу и совпадают со значением функции в точке a. Геометрически это означает, что график функции $f(x)$ при $x=a$ не претерпевает нарушения, не разрывается.

Примеры: 1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$

Проверить, будет ли функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел; фактически это иначе записанное приведенное выше первое правило в списке эквивалентных бесконечно малых при $a=0$ и $\alpha(x)=x$). В точке $x=0$ функция $f(x)$ определена и ее значение равно 1. Так как предел функции в точке $x=0$ равен ее значению в этой точке, то функция непрерывна.

2. $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$. Проверить, будет ли функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=2$.

Решение. Функция $f(x)$ не определена в точке $x=2$. Значит, она не будет непрерывна в этой точке.

Рассмотрим теперь основные **свойства функций непрерывных в точке**.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна и отлична от нуля в точке a, то существует окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ сохраняет тот же знак, который она имеет в точке a.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то

а) функция $Cf(x)$ непрерывна в точке a (здесь C - некоторая константа);

б) функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке a;

в) функция $f(x)\cdot g(x)$ непрерывна в точке a;

г) функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a, если $g(a)\neq 0$.

3. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $b=u(a)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке a.

Специально отметим, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке ее области определения.

Теперь рассмотрим вопрос о непрерывности функции на промежутке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на некотором открытом промежутке** X (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на замкнутом промежутке** $[a,b]$, если она непрерывна на промежутке (a,b) и $f(a+0)=f(a)$, $f(b-0)=f(b)$.

Графиком функции, непрерывной на промежутке, является сплошная линия без разрывов; ее можно вычертить одним движением карандаша, не отрывая его от бумаги.

Свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном промежутке

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Функция, непрерывная на замкнутом промежутке, ограничена на нем.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то среди ее значений имеется наименьшее и наибольшее.

Эту теорему можно иллюстрировать рисунком 4.5.

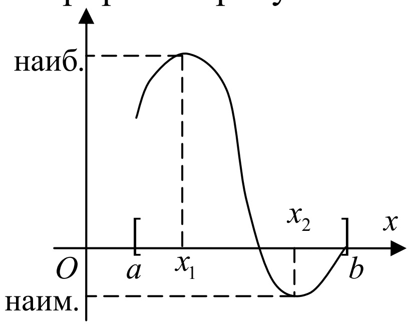


Рис. 4.5

Теорема (первая теорема Коши). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри промежутка найдется хотя бы одна точка c такая, что $f(c)=0$.

Проиллюстрируем эту теорему рисунком 4.6.

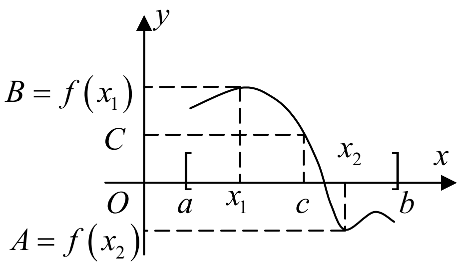


Рис. 4.6

Теорема (вторая теорема Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и в точках $x_1, x_2 \in [a,b]$ принимает значения $f(x_1) = A$ и $f(x_2) = B$, то каково бы ни было число C, заключённое между A и B, найдется хотя бы одна точка c из промежутка (a,b) такая, что $f(c) = C$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то на этом промежутке она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между её наименьшим и наибольшим значениями.

Точки разрыва функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a.

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не непрерывна. Это означает, что точка a будет точкой разрыва, если

1) в точке a функция не определена,

2) в точке a функция определена, но не выполнено хотя бы одно из равенств

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a)$$

(если оба равенства выполнены, функция $f(x)$ непрерывна в точке a).

Примеры: 1. $f(x) = \dfrac{5}{x(x^2+3)}$. Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$. Значит, $x = 0$ - точка разрыва.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } x \le 1, \\ 2x+1, \text{если } x > 1. \end{cases}$

Покажем, что точка $x = 1$ - точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} (2x+1) = 3.$$

Так как односторонние пределы не равны, то точка $x = 1$ - это точка разрыва.

Классификация точек разрыва.

Определение. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва 1-го рода**, если оба односторонних предела $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют и конечны. Разность $f(a+0) - f(a-0) = \Delta_a f$ называется **скачком** функции $f(x)$ в точке a.

При этом, если $f(a-0)=f(a+0)$, то точка a называется **точкой устранимого разрыва,** а если $f(a-0)\neq f(a+0)$, то точка a называется **точкой конечного разрыва**.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\geq 0,\\ x^2+3, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

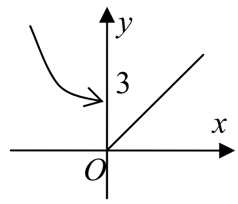


Рис. 4.7

Внутри каждого из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ совпадает с соответствующей элементарной функцией и, значит, непрерывна в каждой точке этих промежутков. Рассмотрим точку $x=0$, найдем односторонние пределы в этой точке.

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} x=0,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\left(x^2+3\right)=3.$$

Оба предела конечны, значит, точка $x=0$ - это точка разрыва 1-го рода. Так как пределы не равны, то это точка – точка конечного разрыва, при этом $\Delta_0 f=0-3=-3$.

График этой функции изображен на рис. 4.7.

2. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва 2-го рода** в том случае, если по крайней мере один из односторонних пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ бесконечен или не существует. В частности, если по крайней мере один из пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ бесконечен, то a - называется **точкой бесконечного разрыва.**

Пример. $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$. Функция $f(x)$ не определена в точке $x=2$, значит, это точка разрыва. Найдем односторонние пределы в этой точке. Сначала найдем односторонние пределы функции $u(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

$$u(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty,$$

$$u(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

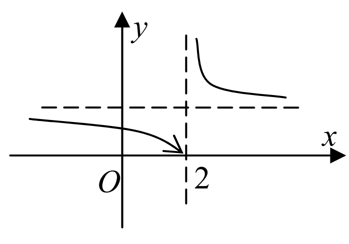


Рис. 4.8

Тогда

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}3^{u(x)}=\lim_{u\to-\infty}3^{u}=0,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}3^{u(x)}=\lim_{u\to+\infty}3^{u}=+\infty.$$

Один из односторонних пределов равен бесконечности, значит, точка $x=2$ - точка разрыва 2-го рода, точка бесконечного разрыва.

График этой функции изображен на рисунке 4.8.

Решение задач.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases}2x-1, \text{ если } x\le 1,\\ x^3, \text{ если } x>1.\end{cases}$ Определить, будет ли функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=1$.

Решение. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x=1$.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}(2x-1)=2\cdot 1-1=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}x^3=1^3=1.$$

В точке $x=1$ функция определена, ее значение вычисляется по верхней формуле: $f(1)=2\cdot 1-1=1$.

Таким образом, оба односторонних пределов равны и совпадают со значением функции в этой точке, значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=1$.

В следующих примерах нужно найти точки разрыва функции $f(x)$, вычислить односторонние пределы в этих точках и установить тип точек разрыва; для точек конечного разрыва вычислить скачок функции; сделать схематический чертеж графика функции.

Пример 2. $f(x)=\dfrac{2}{1-2^x}$.

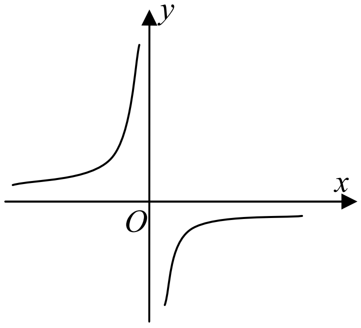


Рис. 4.9

Решение. Функция $f(x)$ не определена, если $1-2^x=0$, т.е. при $x=0$, и, значит, $x=0$ - точка разрыва.
Найдем односторонние пределы. Так как при $x\to 0-0$ $x<0$ и, соответственно $2^x<1$, то

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{2}{1-2^x}=+\infty.$ Аналогично

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{2}{1-2^x}=-\infty.$$

Значит, точка $x=0$ - точка разрыва 2-го рода, точка бесконечного разрыва (рис. 4.9).

Пример 3. $f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } x<0,\\ 2\sqrt{x}, \text{ если } 0\le x<1,\\ 4-2x, \text{ если } x>1.\end{cases}$.

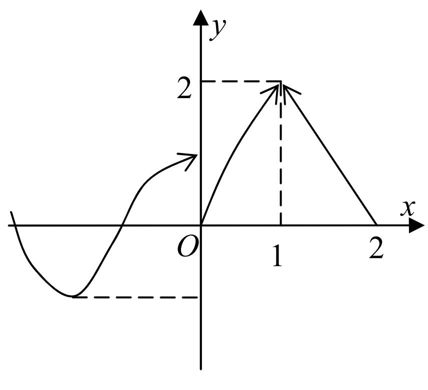


Рис. 4.10

Решение. На каждом из промежутков $(-\infty;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$, функция $f(x)$ совпадает с соответствующей элементарной функцией и, значит, на этих промежутках функция $f(x)$ непрерывна, и разрывы могут быть только на концах промежутков в точках $x=0$ и $x=1$.

Найдем односторонние пределы в этих точках.

1) $x=0$.

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\cos x=\cos 0=1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}2\sqrt{x}=2\cdot 0=0.$$

Оба предела конечны, но не равны между собой, значит, точка $x=0$ - точка разрыва 1-го рода, точка конечного разрыва.

Скачок функции $\Delta_0 f=f(0+0)-f(0-0)=-1$

2) $x=1$.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}2\sqrt{x}=2,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(4-2x)=4-2\cdot 1=2.$$

В точке $x=1$ функция $f(x)$ не определена, значит, это точка разрыва функции, а так как оба предела конечны и равны между собой, то это точка устранимого разрыва (рис. 4.10).

Пример 4. $f(x)=3^{\frac{|x+1|}{x+1}}$.

Решение. На промежутках $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$ данная функция совпадает с соответствующей элементарной функцией. В точке $x=-1$ функция не определена. Значит $x=-1$ - точка разрыва. Так как $|x+1|=\begin{cases}-(x+1), \text{ если } x<-1,\\ x+1, \text{ если } x>-1,\end{cases}$ то

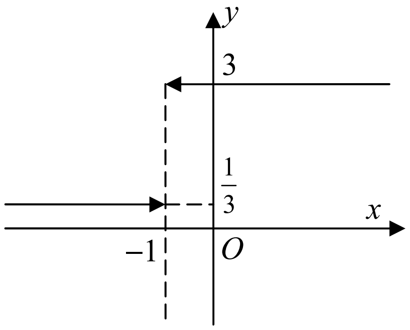


Рис. 4.11

$$\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}3^{\frac{-(x+1)}{x+1}}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}3^{\frac{x+1}{x+1}}=3.$$

Оба предела конечны, следовательно, $x=-1$ - точка конечного разрыва (рис 4.11).

$$\Delta_{-1}f=3-\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Пример 5. $f(x)=\dfrac{8|x-3|}{x^2-2x-3}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители. Тогда

$$f(x)=\frac{8|x-3|}{(x-3)(x+1)}.$$

Легко видеть, что $x=3$ и $x=-1$ - точки разрыва, а в остальных точках функция $f(x)$ - непрерывна. Найдем односторонние пределы в этих точках.

1) $x=-1$.

В окрестности точки $x=-1$ разность $x-3<0$, и, значит, $|x-3|=-(x-3)$. Тогда

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}\frac{-8(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\(x<-1)}}\frac{-8}{x+1}=+\infty,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}\frac{-8(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\(x>-1)}}\frac{-8}{x+1}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x=-1$ - точка бесконечного разрыва.

2) $x=3$.

Учитывая, что

$$|x-3|=\begin{cases}-(x-3), \text{ если } x<3,\\ x-3, \text{ если } x>3,\end{cases}$$ получаем

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\frac{-8(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3-0}\frac{-8}{x+1}=\frac{-8}{3+1}=-2,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}\frac{8(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3+0}\frac{8}{x+1}=\frac{8}{3+1}=2.$$

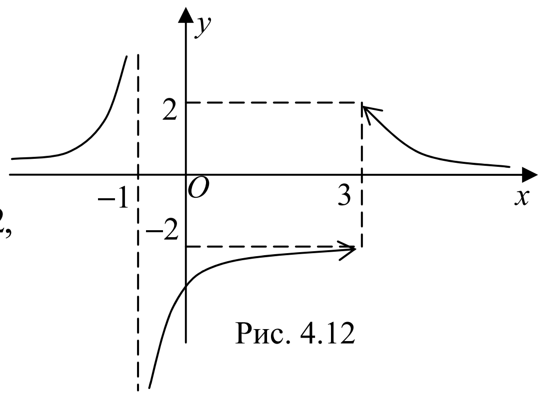


Рис. 4.12

Точка $x=3$ - точка конечного разрыва. Скачок $\Delta_3 f=2-(-2)=4$. График функции имеет вид, представленный на рис.4.12.

Пример 6. $f(x)=\begin{cases}2^x, \text{ если } x\le 0,\\ (x-1)^2, \text{ если } 0<x\le 2,\\ \ln(x-2), \text{ если } x>2.\end{cases}$.

Решение. Легко видеть, что функция может иметь разрыв только лишь в точках $x=0$ и $x=2$. Исследуем эти точки

1) $x=0$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}2^x=2^0=1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)^2=(0-1)^2=1,$$

$$f(0)=2^0=1.$$

Так как оба односторонних предела равны и совпадают со значением функции, то точка $x=0$ - точка непрерывности.

2) $x=2$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=(2-1)^2=1,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\ln(x-2)=-\infty.$$

Так как один из пределов бесконечный, то точка $x=2$ - точка бесконечного разрыва.

Вопросы для самопроверки по теме 4.4

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Перечислите свойства функций, непрерывных в точке.
3. Что вы можете сказать о непрерывности элементарных функций?
4. Дайте определение функций, непрерывной на открытом и замкнутом промежутке.
5. Перечислите свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном промежутке.
6. Дайте определение точки устранимого разрыва. Приведите пример.
7. Дайте определение точек конечного и бесконечного разрывов. Приведите пример.

4.5. Понятие производной функции. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Производная функции.**
- **Дифференцируемость функции.**
- **Дифференциал функции.**
- **Производная суммы, произведения и частного функции.**
- **Производные основных элементарных функций.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 3, с. 58-65 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором промежутке X. Возьмем какую-нибудь конечную точку $x_0 \in \mathrm{X}$ и зададим к ней произвольное приращение $\Delta x \neq 0$, такое, что и $x_0 + \Delta x \in \mathrm{X}$. Приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, будет

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right).$$

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение. Если при $\Delta x \to 0$ отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к конечному или бесконечному пределу, то этот предел называется **производной**

функции $y = f(x)$ **по переменной** x **в точке** x_0 и обозначается символами y', y'_x или $f'(x_0)$. Итак, по определению

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Определение. Производная $f'(x_0)$ называется **конечной** или **бесконечной** в зависимости от того, конечен или бесконечен предел (4.1).

Таким образом, конечная производная в данной точке представляет собой число.

Если конечная производная от функции $y = f(x)$ существует в каждой точке промежутка X, то на множестве X оказывается заданной функция, которая ставит в соответствие каждой точке $x \in X$ значение производной в этой точке. Назовем эту функцию **производной** от функции f и обозначим f'.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x$ в произвольной точке x.

По определению имеем:

$$f'(x) = x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, $x' = 1$. Можно также показать, что

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in N.$$

(Подробнее смотрите [3]).

Рассмотрим **геометрическое** содержание понятия производной.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана кривая l, являющаяся графиком функции $y = f(x)$ (рис.4.13). Требуется найти уравнение касательной к этой кривой в некоторой ее точке $M_0(x_0, y_0)$.

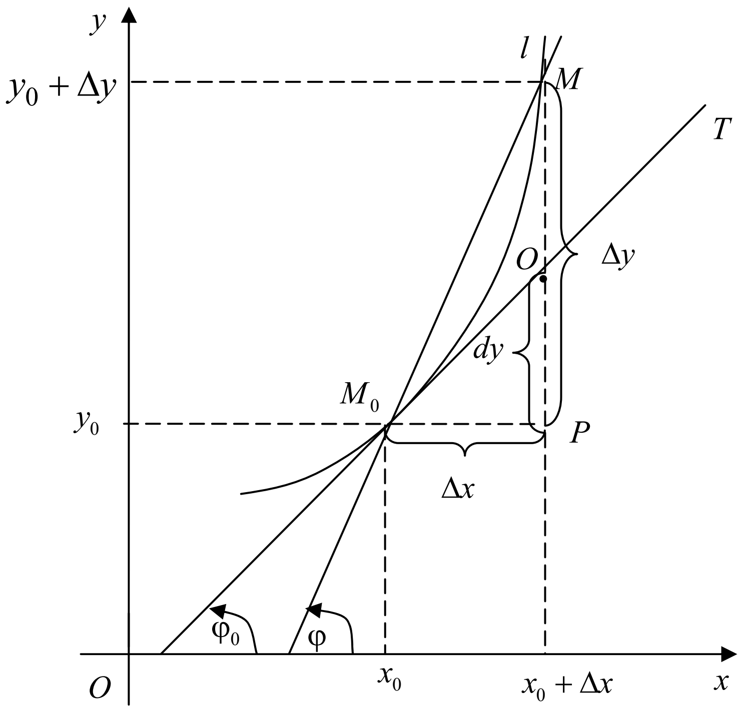


Рис 4.13.

На кривой l возьмем какую-нибудь другую точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и проведем секущую M_0M, образующую с осью Ox ориентированный угол φ.

Дадим определение касательной к кривой l в точке M_0.

Пусть точка M приближается к точке M_0 так, что расстояние между ними $\rho(M_0, M) \to 0$. Если при этом секущая M_0M будет приближаться к некоторому предельному положению M_0T так, что угол между прямыми M_0M и M_0T стремится к нулю, то прямая M_0T называется **касательной** к кривой l в точке M_0.

В силу этого определения наличие в точке M_0 касательной M_0T, образующей с осью Ox ориентированный угол φ_0, эквивалентно равенству $\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi$, а значит и равенству

$$tg\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi. \tag{4.2}$$

На рис.4.13 видно, что

$$tg\varphi = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

в силу чего, для углового коэффициента k_0 искомой касательной M_0T получаем

$$k_0 = tg\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{4.3}$$

Зная угловой коэффициент $k_0 = f'(x_0)$ касательной M_0T и точку $M_0(x_0, y_0)$, через которую она проходит, пишем уравнение этой касательной в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.4}$$

Итак, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

Замечание. Условие существования производной $f'(x)$ в точке x эквивалентно условию существования и единственности касательной к кривой $y = f(x)$ в этой точке (в точке с абсциссой x). При этом случаю конечной производной отвечает касательная, не параллельная оси Oy, а случаю бесконечной производной – касательная, параллельная оси Oy.

Дифференцируемость функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности X точки x_0. Зададим в этой точке произвольное приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ так, чтобы $x_0 + \Delta x \in X$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0**,** если приращение функции в этой точке, соответствующее приращению Δx аргумента, можно представить в форме

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{4.5}$$

где A - число, а $\alpha(\Delta x)$ - функция Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то есть $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Заметим, что число A ставится в соответствие фиксированной точке x_0 и не зависит от Δx. При изменении точки x_0 число A, вообще говоря, изменится.

Условия дифференцируемости функции в точке определяются следующими теоремами.

Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция обладала в этой точке конечной производной.

Можно показать, [3], что величина A, входящая в условие (4.5), совпадает со значением $f'(x_0)$ производной $f'(x)$ в точке x_0. Поэтому данное условие можно записать в форме

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{ где } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{4.6}$$

Замечание. В некоторых учебниках в качестве определения дифференцируемости функции в точке дается именно существование конечной производной в данной точке.

Важно выяснить связь между дифференцируемостью и непрерывностью.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение не имеет места, так как из непрерывности функции в некоторой точке, вообще говоря, не следует дифференцируемость функции в этой точке. Рассмотрим, например, две функции, графики которых представлены на рис. 4.14. Обе эти функции непрерывны в точке x_0, но они не будут дифференцируемы в этой точке. Касательная к графику первой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ параллельна оси Oy,

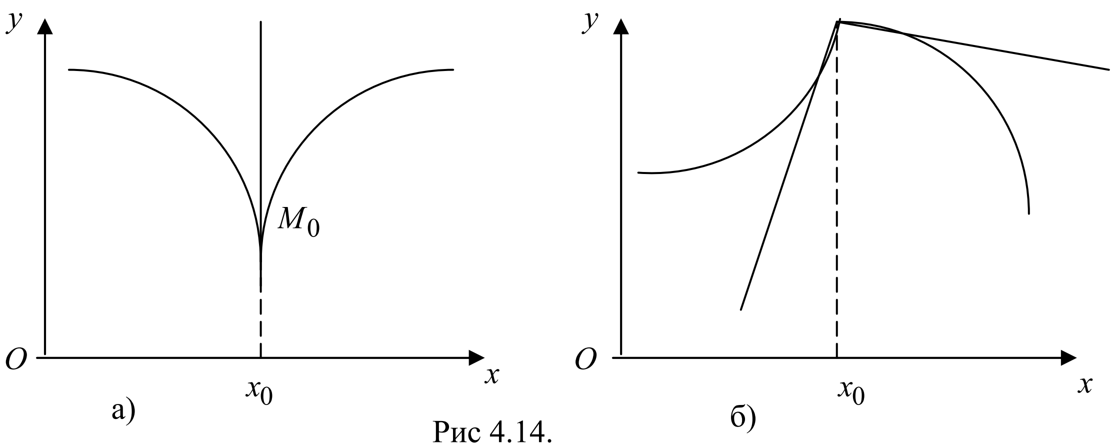


Рис 4.14.

то есть, первая функция обладает в точке x_0 бесконечной производной. График второй функции в точке x_0 вообще не имеет единственной касательной, поэтому функция в точке x_0 не может иметь конечной производной .

Определение. Точки, подобные x_0 на рис. 4.14а, называются **точками возврата** функции, а подобные точкам x_0 на рис. 4.14 б **– угловыми точками.**

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой на некотором промежутке** (a,b) (конечном или бесконечном), если эта функция дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

Отметим при этом, что в принадлежащих X граничных точках должна иметь место односторонняя дифференцируемость (правосторонняя или левосторонняя). В частности, если $X = [a,b]$ - замкнутый интервал, то в его граничных точках a и b $(a < b)$ должны существовать, соответственно, односторонние конечные пределы

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Графиком функции, дифференцируемой на некотором промежутке, служит сплошная линия без точек возврата и угловых точек. Такую линию будем называть **гладкой**.

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда в точке x_0 для любого $\Delta x \neq 0$ имеет место соотношение (4.6):

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \text{где } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

которое представляет собой сумму двух слагаемых. Первое из этих слагаемых $f'(x_0)\Delta x$ является линейной функцией приращения Δx, а второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ - нелинейной функцией Δx.

Определение. Произведение $f'(x_0)\Delta x$, представляющее собой линейную относительно Δx часть приращения функции в точке x_0, называется **дифференциалом функции** $y = f(x)$ в этой точке и обозначается одним из символов dy или $df(x_0)$.

Итак,

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{4.7}$$

Заметим, что приращение Δx аргумента x, который здесь выступает как независимая переменная, обычно обозначают символом dx и называют **дифференциалом независимой переменной.** Это непосредственно следует из определения дифференциала, если положить $f(x) = x$ ([3]). Таким образом, формулу (4.7) для дифференциала функции пишут еще в виде

$$dy = f'(x_0)dx, \tag{4.8}$$

то есть дифференциал функции в данной точке равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал (приращение) независимой переменной.

Из формулы (4.8) находим, что $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$. Таким образом, производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Символ $\dfrac{dy}{dx}$ часто применяют для обозначения производной функции y по переменной x.

Вернемся к графику функции $y=f(x)$, представленному на рис.4.13. Как легко заметить, дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 геометрически представляет собой приращение ординаты касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ на интервале $[x_0,x_0+\Delta x]$[3].

Операции нахождения производной и дифференциала функции называются **дифференцированием** этой функции. Общее название обеих операций объясняется их очевидной зависимостью. В силу формулы (4.8) дифференциал функции получается простым умножением ее производной на величину $\Delta x \equiv dx$.

Пример 2. Найти приращение и дифференциал функции $y=3x^2+x$ в точке $x=1$, если $\Delta x=0{,}1$.

Найдём приращение и дифференциал функции по определению:

$$\Delta y=3\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)-3x^2-x=6x\Delta x+3\left(\Delta x\right)^2+\Delta x=\left(6x+1\right)\Delta x+3\left(\Delta x\right)^2.$$

Тогда $dy=\left(6x+1\right)\Delta x$. Вычислим Δy и dy в точке $x=1$, если $\Delta x=0{,}1$

$$\Delta y=7\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}01=0{,}73;\; dy=7\cdot 0{,}1=0{,}7.$$

Производная суммы, произведения и частного функций

Напомним известные из курса средней школы правила дифференцирования, которые позволяют в некоторых случаях находить производные функций, не прибегая непосредственно к определению. Вывод смотрите также в [3].

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке

$$(u\pm v)'=u'\pm v', \tag{4.9}$$

$$(uv)'=u'v+v'u, \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \text{ при } v=v(x)\neq 0. \tag{4.11}$$

Умножив эти равенства почленно на dx, получим те же правила, записанные в терминах дифференциалов

$$d(u\pm v)=du\pm dv, \tag{4.12}$$

$$d(uv) = vdu + udv, \tag{4.13}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \tag{4.14}$$

Производная и дифференциал постоянной функции $y = C$ (здесь C - постоянная величина при всех $x \in X$) равны нулю.

Таким образом, при всех $x \in X$

$$C' = 0; \quad dC = C'dx = 0. \tag{4.15}$$

Действительно, в любых точках множества X такая функция имеет одно и то же значение, в силу чего для нее $\Delta y \equiv 0$ при любых x и Δx таких, что $x,\ x + \Delta x \in X$. Отсюда, в силу определения производной и дифференциала, следуют формулы (4.15).

Формула (4.9) обобщается на случай любого конечного числа слагаемых функций.

При $u = C$, где $C - \text{const}$, формулы (4.10) и (4.13), в силу (4.15), дают равенства: $(Cv)' = Cv'$, $d(Cv) = Cdv.$ То есть, постоянный множитель можно выносить за знаки производной и дифференциала.

Производные основных элементарных функций

Имеют место формулы (вывод можно посмотреть в [3]).

1. $(\sin x)' = \cos x,$
2. $(\cos x)' = -\sin x,$
3. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$
4. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a},$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

Решение задач.

Задача 1. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ в точке $x = 3$.

Найдем производную функции $f(x)$, используя правило дифференцирования суммы

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)' + x' + 2'.$$

Вынося постоянный множитель за знак производной:

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + x' + 2' = \frac{1}{4}\left(x^4\right)' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + x' + 2',$$

применяя формулу дифференцирования степенной функции и учитывая равенство нулю производной постоянной функции, получим

$$\frac{1}{4}\left(x^4\right)' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + x' + 2' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x + 1 + 0 = x^3 - x + 1.$$

Итак, $f'(x) = x^3 - x + 1$.

Найдем теперь значение производной в точке $x = 3$, для чего в данное выражение вместо x надо подставить число 3:

$$f'(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25.$$

Задача 2. Найти производную функции $f(x) = \left(2x^2 + 1\right)\cdot \cos x$.

Производную этой функции найдем, применяя правило дифференцирования произведения двух функций:

$$f'(x) = \left[\left(2x^2 + 1\right)\cos x\right]' = \left(2x^2 + 1\right)'\cos x + \left(2x^2 + 1\right)\left(\cos x\right)'.$$

Производную первого сомножителя найдем так же, как в примере 1, а для второго сомножителя воспользуемся тем, что $\left(\cos x\right)' = -\sin x$:

$$\left(2x^2+1\right)'\cos x + \left(2x^2+1\right)\left(\cos x\right)' = \left(2\cdot 2x + 0\right)\cos x + \left(2x^2+1\right)\cdot\left(-\sin x\right) = 4x\cos x - \left(2x^2+1\right)\sin x.$$

Таким образом, $f'(x) = 4x\cos x - \left(2x^2 + 1\right)\sin x$.

Задача 3. Найти дифференциал $df(x)$ функции $f(x) = \mathrm{tg}x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Найдем дифференциал функции, используя формулу $df(x) = f'(x)dx$.

Так как $\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то

$$df(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Подставим вместо x число $\frac{\pi}{4}$, учитывая, что $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$df\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{dx}{\frac{1}{2}} = 2dx.$$

Задача 4. Составить уравнение касательной к синусоиде $f\left(x\right) = \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

Уравнение касательной к графику функции в точке $\left(x_0, f(x_0)\right)$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем входящие в него величины:

$$f(x_0) = \sin\pi = 0$$

$$f'(x) = \cos x,\ \ f'(x_0) = \cos\pi = -1.$$

Тогда имеем $y=(-1)(x-\pi)$, или $y=\pi-x$ - уравнение искомой касательной.

Вопросы для самопроверки по теме 4.5

1. Что называется производной функции в точке?
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. Как выглядит уравнение касательной к графику функции в данной точке?
4. Какая функция называется дифференцируемой: а) в точке; б) на промежутке?
5. Что называется дифференциалом функции?
6. Каков геометрический смысл дифференциала?
7. Чему равна производная а) суммы; б) произведения; в) частного двух функций?
8. Докажите формулу нахождения производной произведения двух функций.

4.6. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков

При изучении данной темы Вам предстоит ознакомиться со следующими вопросами:

- **Дифференцирование сложной функции.**
- **Производные от степенной и показательной функций.**
- **Дифференцирование обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.**
- **Таблица производных.**
- **Производные и дифференциалы высших порядков.**
- **Дифференцирование функций, заданных параметрически.**

После изучения данных материалов Вам следует ответить на вопросы для самопроверки и решить тест. Если Вы будете испытывать затруднения в ответах, обратитесь к [3], глава 3, с. 67-73 или к глоссарию – краткому словарю основных терминов и положений.

Студентам очно-заочной и заочной форм обучения надо решить три задачи из контрольной работы № 2 в соответствии со своим вариантом под № 71-80, 81-90, 91-100.

Дифференцирование сложной функции. Производные от степенной и показательной функций

Пусть сложная функция y аргумента x задана формулами $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$.

Теорема (о производной сложной функции). Если функции

$y = f(u),\ u = \varphi(x)$ дифференцируемы в соответствующих друг другу точках u и x, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ тоже дифференцируема в точке x, причем

$$y' = f'(u)u' \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (4.16)$$

Умножив равенство (4.16) почленно на dx, получим выражение для дифференциала сложной функции $dy = f'(u)du$.

Замечание. Дифференциал функции $y = f(u)$ имел бы точно такой же вид и в том случае, если бы аргумент u был не функцией, а независимой переменной. В этом состоит так называемое **свойство инвариантности** (независимости) формы дифференциала по отношению к аргументу. Следует иметь в виду, что если u - независимая переменная, то $du = \Delta u$ есть ее произвольное приращение, если же u - промежуточный аргумент (то есть функция), то du - дифференциал этой функции, то есть величина, не совпадающая с ее приращением Δu.

С помощью последней теоремы легко получить формулы дифференцирования степенной и показательной функции [3]:

$$1)\,(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1};\ 2)\ (a^x)' = a^x \ln a;\ \ 3)\,(e^x)' = e^x.$$

Первое равенство справедливо и при $x < 0$, если только в этом случае x^{α} имеет смысл.

Замечание. Прием предварительного логарифмирования имеет самостоятельное значение и называется в совокупности с последующим нахождением производной логарифма функции **логарифмическим дифференцированием**.

Покажем его применение для дифференцирования функций вида

$$y = u(x)^{v(x)}.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Так как функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ являются взаимно обратными, то для любого положительного числа A верно тождество

$$A = e^{\ln A}.$$

Поэтому

$$y = x^{\sin x} = e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} = e^{\sin x \cdot \ln x}.$$

Тогда

$$y' = \left(e^{\sin x \cdot \ln x}\right)' = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \left(\sin x \cdot \ln x\right)' =$$

$$= x^{\sin x}\left(\left(\sin x\right)' \ln x + \sin x \cdot \left(\ln x\right)'\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Здесь были использованы правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения.

Дифференцирование обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций

Пусть даны две взаимно обратные функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Теорема (о производной обратной функции). Если функции $y = f(x),\ x = \varphi(y)$ возрастают (убывают), и в точке x функция $f(x)$ дифференцируема, причем $f'(x) \neq 0,$ то в соответствующей точке y функция $\varphi(y)$ тоже дифференцируема (по y), причем

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad (4.17)$$

С помощью этой теоремы выводятся формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций,[3]:

1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ 2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

3) $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$ 4) $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Таблица производных

Для удобства нахождения производных различных функций сведем формулы дифференцирования в одну таблицу.

1. $(C)' = 0,$ если C - постоянная,
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},$
3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x},$
4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a,\ a>0,\ a\neq 1,$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1,$
7. $(\sin x)' = \cos x,$
8. $(\cos x)' = -\sin x,$
9. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$
10. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
13. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$
14. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Тогда производная $f'(x)$ этой функции, называемая еще **производной первого порядка,** будет новой функцией x, заданной на этом промежутке, и может, в свою очередь, иметь производную. Эту производную называют **производной второго порядка** функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'', y_{xx}'', f''(x), y^{(2)}, f^{(2)}(x).$$

Производную производной 2-го порядка называют **производной третьего порядка** функции $y = f(x)$ и обозначают

$$y''', y_{xxx}''', f'''(x), y^{(3)} f^{(3)}(x).$$

Аналогично определяются производные 4-го, 5-го и старших порядков.

Определение. **Производной n-го порядка** от функции $y = f(x)$ на некотором промежутке называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции на этом промежутке. Производная n-го порядка обозначается одним из символов: $y^{(n)}, f^{(n)}(x)$.

Пример.

$$y = 5x^3 + 6x - 1,\ \ y' = 15x^2 + 6,\quad y'' = 30x,\ \ y''' = 30,\ \ y^{(4)} = \cdots = y^{(n)} = 0.$$

Очевидно, что для алгебраического многочлена n-й степени все производные, начиная с $(n+1)$-го порядка, равны нулю.

Пример 3.

$$y = e^{ax},\ y' = ae^{ax},\quad y'' = a^2 e^{ax},\quad \cdots\quad , y^{(k)} = a^k e^{ax}.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой k раз** в некоторой точке (на некотором промежутке), если в этой точке (на этом промежутке) дифференцируемы функции $f(x), f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$.

Дифференциал функции $y = f(x)$, где x - независимая переменная, называемый еще **дифференциалом 1-го порядка**, определяется формулой

$$dy = f'(x)dx,$$

где $dx = \Delta x$ - произвольное допустимое малое приращение аргумента x. Зафиксируем dx; тогда dy будет функцией от x. Дифференциал этой функции называется **дифференциалом 2-го порядка** функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$. Поскольку dx зафиксирован (постоянен), то

$$d^2 y = d(dy) = d[f(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx^2.$$

Дифференциал функции $d^2 y$ называется **дифференциалом 3-го порядка** функции $y = f(x)$ и обозначается $d^3 y$ или $d^3 f(x)$.

$$d^3 y = d(d^2 y) = d[f''(x)dx^2] = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Определение. **Дифференциалом n-го порядка** функции $y = f(x)$ называется величина, которая обозначается и определяется в соответствии с равенством $d^{(n)}y = d(d^{n-1}y).$

Известно, что

$$d^n y = f^{(n)}(x) d^n x. \tag{4.18}$$

Таким образом, дифференциал n-го порядка функции равен произведению производной n-го порядка этой функции на n-ю степень дифференциала независимой переменной.

Если имеется сложная функция $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, то и тогда

$$dy = f'(u)du$$

с той разницей, что теперь уже и $f'(u)$ и $du = \varphi'(x)dx$ являются функциями от x. Поэтому при отыскании дифференциалов старших порядков нельзя выносить du за знак производной, а следует дифференцировать формулу (4.5) как произведение. Поэтому формулы для дифференциалов высших порядков сложной функции отличаются от полученных выше формул. Отметим, что дифференциалы высших порядков сложной функции по отношению к аргументу свойством инвариантности формы не обладают.

Из формулы (4.18) следует: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, то есть, что производную n-го порядка функции можно истолковать как отношение дифференциала n-го порядка функции к n-й степени дифференциала независимой переменной. Поэтому символ $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ часто применяют для обозначения производной n-го порядка функции y по переменной x.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in T\,, \tag{4.19}$$

где T - некоторый промежуток изменения параметра t, а функция $\varphi(t)$ возрастает (убывает) на промежутке T.

Производную y_x' функции y по переменной x можно вычислить, пользуясь только параметрическими уравнениями (4.19), минуя представление функции $y = f(x)$ в явной форме.

Теорема. Если на промежутке T функция $x = \varphi(t)$ возрастает (убывает) и в точке $t \in \mathrm{T}$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то в соответствующей точке x переменная y будет дифференцируемой функцией от x. При этом

$$y_x' = \frac{\psi_t'(t)}{\varphi_t'(t)} = \frac{y_t'}{x_t'}\,. \tag{4.20}$$

Производная второго порядка y_{xx}'' есть производная по x от y_x'. Применяя формулу (4.20) не к y, а к y_x', получим

$$y_{xx}'' = \frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}. \tag{4.21}$$

Продолжая эти действия, можно найти производную любого порядка функции y по переменной x.

Пример . Вычислить y_x' и y_{xx}'', если

$$x = a\left(t - \sin t\right), \quad y = a\left(1 - \cos t\right), \ a \text{ - постоянная.}$$

Имеем в согласии с формулой (4.20)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a\left(1-\cos t\right)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Воспользовавшись формулой (4.21), получим

$$y_{xx}'' = \frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'} = \frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{a\left(1-\cos t\right)} = -\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}\left(1-\cos t\right)} = -\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Решение задач

Задача 1. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - 5}$.

Для удобства дифференцирования представим $f(x)$ в виде $f(x) = \left(6x^2 - 5\right)^{\frac{1}{3}}$ и применим правило дифференцирования сложной функции и формулу дифференцирования степенной функции:

$$f'(x) = \left(\left(6x^2 - 5\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(6x^2 - 5\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(6x^2 - 5\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(6x^2 - 5\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 12x = \frac{4x}{\sqrt[3]{\left(6x^2 - 5\right)^2}}.$$

Задача 2. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + 1}$.

Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим:

$$f'(x)=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{1}{x^2+2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

Задача 3. Найти y'_x и y''_{xx} функции y как переменной x, заданной параметрически: $x=a\cos t,\ y=b\sin t,$ где a и b - постоянные, t - параметр.

Применим формулу (4.20) и получим:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t.$$

Используя формулу (4.21), найдем

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t\right)'_t}{-a\sin t}=\frac{-\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Вопросы для самопроверки по теме 4.6

1. Как найти производную сложной функции?
2. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
3. Перечислите формулы таблицы производных.
4. Что называется второй производной функции?
5. Что понимают под производной n-го порядка?
6. В каком случае функция называется дифференцируемой k раз?
7. Что называют дифференциалом второго и более высоких порядков?
8. В чем состоит и для какого вида функций применяется логарифмическое дифференцирование?
9. Выведите формулу для дифференцирования функции, заданной параметрически.

Заключение

Изложенный в опорном конспекте лекций учебный материал послужит основой для изучения не только последущих разделов математики, но и остальных технических дисциплин.

3.3. УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Полное изложение материала, представленного кратко в опорном конспекте, содержится в учебных пособиях [1], [2], [3].

3.4. ГЛОССАРИЙ

Абелева группа – это группа, в которой операция коммутативна.

Алгебраическая бинарная операция определена на множестве G, если любым двум элементам $a,b \in G$, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие третий элемент $c \in G$.

Алгебраическим дополнением A_{ik} **элемента** a_{ik} **матрицы** n**-го поряд**ка называется число, равное произведению минора D_{ik} этого элемента на $(-1)^{i+k}$, то есть $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некомпланарных векторов, отложенных от одной точки.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, отложенных от одной точки.

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом - точка B.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на неколлинеарный ему вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, такой что:

а) длина вектора $\vec{c}$ численно равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т.е.$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$,

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

в) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Вырожденная матрица. Если определитель $D(A) = 0$, то матрица A называется вырожденной или особенной.

Гиперболой называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b любые положительные числа.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$, где a и b - некоторые положительные числа.

Главной диагональю квадратной матрицы любого порядка называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла матрицы в правый нижний, а совокупность элементов, расположенных на второй диагонали, называется **побочной диагональю** матрицы.

Гладкой называется линия, являющаяся графиком дифференцируемой функции без точек возврата и угловых точек.

График функции - множество точек плоскости Oxy с координатами $\left(x, f(x)\right)$, $x \in X$.

Группой называется множество с определенной на нем ассоциативной алгебраической операцией, обладающее нейтральным элементом по отношению к ней, причем для любого элемента группы существует обратный к нему.

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, где a,b,c - некоторые положительные числа.

Декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$ относительно данной системы координат $Oxyz$ называется упорядоченная тройка чисел (x,y,z), где $x=\text{Пр}_{\vec{i}}\vec{a}$, $y=\text{Пр}_{\vec{j}}\vec{a}$, $z=\text{Пр}_{\vec{k}}\vec{a}$.

Декартовыми прямоугольными координатами точки M относительно данной системы координат Oxy называются два числа: x - проекция точки M на ось Ox и y- проекция точки M на ось Oy. Они совпадают с координатами ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Диагональной матрицей называют квадратную матрицу, все элементы которой, расположенные вне главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Дифференциалом 3-го порядка функции $y=f(x)$, обозначаемым d^3y или $d^3f(x)$, называется дифференциал функции $d^2y: d^3y=d\left(d^2y\right)=f''(x)dx^3$.

Дифференциалом n**-го порядка** функции $y=f(x)$ называется величина, которая обозначается и определяется в соответствии с равенством $d^{(n)}y=d\left(d^{(n-1)}y\right)$.

Дифференциалом независимой переменной, обозначаемым символом dx, называют приращение Δx аргумента x, то есть $dx\equiv\Delta x$.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0, обозначаемым символом dy или $df(x_0)$, называется произведение $f'(x_0)\Delta x$, представляющее собой линейную относительно Δx часть приращения функции, то есть $dy=f'(x_0)\Delta x$.

Дифференцированием функции называется операция нахождения производной или дифференциала этой функции.

Дифференцируемой в точке x_0 называется функция $y=f(x)$, если приращение функции в этой точке, соответствующее приращению Δx

аргумента, можно представить в форме: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемой на некотором промежутке (a,b) (конечном или бесконечном) называется функция $y = f(x)$, если эта функция дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Евклидовым пространством называют линейное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

Единичной матрицей E_n (или просто E) называется диагональная матрица n-го порядка, все диагональные элементы которой равны единице:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Касательной к кривой в точке M_0 называется прямая, к которой стремится секущая M_0M при стремлении точки M к точке M_0.

Квадратичной формой называют однородный многочлен второй степени от $x_1, x_2, ..., x_n$.

Квадратная матрица. Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов.

Коллинеарными называются векторы, параллельные одной и той же прямой.

Кольцом называется множество с двумя определенными на нем алгебраическими бинарными операциями, причем относительно сложения оно является абелевой группой, а умножение в нем дистрибутивно относительно сложения.

Компланарными называются векторы, параллельные одной и той же плоскости.

Конечной или бесконечной производная $f'(x_0)$ называется в зависимости от того, конечен или бесконечен предел в определении производной.

Конусом второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, где a,b,c - некоторые положительные числа.

Кривой второго порядка на плоскости называется множество точек, координаты которых в прямоугольной системе Oxy удовлетворяют уравнению второй степени: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где хотя бы один из параметров A,B,C отличен от нуля.

Линейным векторным пространством V называется множество, на котором определены сложение и умножение на число, относительно сложения являющееся абелевой группой, причем $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,\quad (\lambda+\beta)a=\lambda a+\beta a,$ $\lambda(\beta a)=(\lambda\beta)a,\quad 1a=a$ для всех чисел λ,β и $a,b\in V$.

Линейным оператором A, отображающим линейное векторное пространство V в такое же пространство U, называется закон, ставящий в соответствие каждому вектору $x\in V$ единственный элемент $A(x)\in U$, причем $A(\lambda x+\beta y)=\lambda A(x)+\beta A(y)$ для всех $x,y\in V$ и любых чисел λ,β.

Логарифмическим дифференцированием называется прием предварительного логарифмирования в совокупности с последующим нахождением производной.

Матрицей размером $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел $a_{ik}(i=1,2,...,m;k=1,2,...,n)$, состоящая из m строк и n столбцов, обозначаемая символом:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } \|a_{ik}\| \quad (i=1,2,...,m;\ \ k=1,2,...,n).$$

Матрицей системы n линейных уравнений с n неизвестными называется квадратная матрица порядка n, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Минором D_{ik} **элемента** a_{ik} **матрицы** n**-го порядка** называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся из данной матрицы вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов α,β и γ, которые этот вектор образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Натуральный логарифм - логарифм по основанию e.

Невырожденной (или неособенной) называется квадратная матрица A, определитель которой $D(A)$ отличен от нуля.

Неопределенной системой линейных уравнений называется совместная система, имеющая более чем одно решение.

Несовместной системой линейных уравнений называется система, не имеющая ни одного решения.

Нормальным вектором прямой называется вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярный этой прямой.

Обратная матрица A^{-1} существует одна и только одна у всякой неособенной матрицы A порядка n и может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{D(A)} & \frac{A_{21}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D(A)} \\ \frac{A_{12}}{D(A)} & \frac{A_{22}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D(A)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D(A)} & \frac{A_{2n}}{D(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D(A)} \end{Vmatrix}.$$

Общим уравнением плоскости в пространстве называется уравнение первого порядка $Ax + By + Cz + D = 0$, где (x, y, z)- координаты текущей точки плоскости, а A, B и C одновременно не обращаются в ноль.

Общим уравнением прямой на плоскости в прямоугольной системе Oxy называется уравнение первой степени с двумя переменными x и y: $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не обращаются в ноль.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, где a, b, c - некоторые положительные числа.

Однородное линейное уравнение. Линейное уравнение называется **однородным,** если свободный член в этом уравнении равен нулю.

Односторонняя дифференцируемость имеет место в граничных точках, принадлежащих промежутку $[a, b]$, и равносильна существованию конечных односторонних пределов $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$.

Окрестность точки: ε**-окрестностью** конечной точки x_0 называется множество точек x, расстояние $\rho(x, x_0)$ от которых до точки x_0 меньше ε. Окрестностью конечной точки x_0 называется любое подмножество, содержащее некоторую ε - окрестность точки x_0.

Определенной системой линейных уравнений называется совместная система, имеющая только одно решение.

Определителем матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, по определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем матрицы n**-го порядка** называется число, равное сумме произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Особенная матрица. Если определитель $D(A) = 0$, то матрица A называется вырожденной или особенной.

Параболой называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид: $y^2 = 2px$, где p - любое число, отличное от 0.

Побочная диагональ. Совокупность элементов $a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{n1}$, расположенных на второй диагонали, называется побочной диагональю матрицы.

Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Полярными координатами точки M называются два числа: расстояние r от точки M до полюса и угол поворота φ от полярной оси l до луча OM, отсчитываемый против часовой стрелки.

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк, равное числу ее столбцов.

Последовательность - функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Последовательность бесконечно большая: последовательность, которая стремится к ∞, $+\infty$ или $-\infty$, называется бесконечно большой последовательностью.

Последовательность бесконечно малая – последовательность, стремящаяся к нулю.

Последовательность возрастающая: последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} > x_n$, означающее, что последующий член последовательности больше предыдущего.

Последовательность монотонная – возрастающая или убывающая.

Последовательность неограниченная: последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной,** если для любого числа $M > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство $|x_{n_0}| > M$.

Последовательность ограниченная: последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной,** если существует число $M > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

Последовательность убывающая: последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей,** если для любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $x_{n+1} < x_n$, означающее, что последующий член последовательности меньше предыдущего.

Предел последовательности бесконечный: предел последовательности x_n равен бесконечности, если для любого положительного числа M найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n| > M$.

Предел последовательности конечный: число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$,если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Предел функции: если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_\delta(a)$ ($x \neq a$, если a -число) следует $f(x) \in R_\varepsilon(A)$, то A называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a (или при x, стремящемся к a).

Предел функции левый: если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_{-\delta}(a)$ следует условие $f(x) \in R_\varepsilon(A)$, то A называется **левым пределом функции** $f(x)$ **в точке** a.

Предел функции правый: если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, что из условия $x \in R_{+\delta}(a)$ следует условие $f(x) \in R_\varepsilon(A)$, то A называется **правым пределом функции** $f(x)$ **в точке** a.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$, обозначаемой одним из символов $y'', y''_{xx}, f''(x), y^{(2)}, f^{(2)}(x)$, называют производную производной первого полрядка этой функции.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ на некотором промежутке называется производная производной $(n-1)$-го порядка этой функции, обозначаемая символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

Производной первого порядка функции $y = f(x)$ называют производную $f'(x)$ этой функции.

Производной третьего порядка функции $y = f(x)$ называют производную производной второго порядка этой функции.

Производной функции $y = f(x)$ по переменной x в точке x_0, обозначаемой символами y' или $f'(x_0)$, называется конечный или бесконечный предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, то есть:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Разложением вектора $\vec{a}$ **по базису** векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется запись вектора $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, где x,y- **координаты вектора** $\vec{a}$.

Рангом квадратной матрицы n**-го порядка** называется число r такое, что среди миноров r-го порядка данной матрицы имеется, по крайней мере, один, отличный от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю.

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность n чисел $C_1, C_2, ..., C_n$, что при замене неизвестных x_1 на C_1, x_2 на $C_2, ..., x_n$ на C_n каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Свойство инвариантности (независимости) формы дифференциала по отношению к аргументу состоит в том, что дифференциал функции $y = f(u)$ имеет вид $dy = f'(u)du$ независимо от того, является ли аргумент u функцией или независимым аргументом.

Система m линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}.$$

С**истема** n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}.$$

Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}.$$

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$ и вычисляется так: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{\ } \vec{b})$.

Скачок функции: разность $f(a+0) - f(a-0) = \Delta_a f$ называется **скачком функции** $f(x)$ **в точке** a.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b} \times \vec{c}$.

Собственным вектором x, отвечающим **собственному числу** λ линейного оператора A, называется такой вектор, что $A(x) = \lambda x$.

Совместной системой линейных уравнений называется система, имеющая хотя бы одно решение.

Сферическими координатами точки M пространства называются три числа: r - расстояние до точки M от начала O, φ - полярный угол проекции точки M на плоскость Oxy, θ - угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$.

Теорема Крамера. Если определитель D системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. В этом решении каждое неизвестное $x_k (k = 1, 2, ..., n)$ равно дроби, знаменателем которой является определитель D системы, а числителем D_k - определитель матрицы, получающейся из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом из свободных членов.

Точка бесконечного разрыва: если по крайней мере один из пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ бесконечен, то a называется **точкой бесконечного разрыва**.

Точка конечного разрыва: если a- точка разрыва 1-го рода, и $f(a-0) \neq f(a+0)$, то точка a называется **точкой конечного разрыва.**

Точка разрыва функции: точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не непрерывна. Это означает, что точка a будет точкой разрыва в двух случаях:

1) в точке a функция не определена,

2) в точке a функция определена, но не выполнено хотя бы одно из равенств

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a).$$

Точка разрыва функции 1-го рода: точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва 1-го рода**, если оба односторонних предела $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют и конечны.

Точка разрыва функции 2-го рода: точка разрыва a функции $f(x)$ называется **точкой разрыва 2-го рода** в том случае, если, по крайней мере, один из односторонних пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ бесконечен или не существует.

Точка устранимого разрыва: если a- точка разрыва 1-го рода, и $f(a-0) = f(a+0)$, то точка a называется **точкой устранимого разрыва**.

Точкой возврата функции называется точка, в которой эта функция непрерывна, а ее производная бесконечна.

Транспонированием матрицы называется операция, состоящая в получении из данной матрицы A другой матрицы A^T перестановкой каждой строки на место столбца с тем же номером, то есть операция перехода от матрицы $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$ к матрице $A^T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$.

Угловой точкой функции называется точка, в которой эта функция непрерывна, а ее производная не определена.

Формулы Крамера: $x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$ (теорема Крамера).

Функция: пусть в силу некоторого закона каждому числу $x \in X$ (X - множество вещественных чисел), ставится в соответствие одно и только одно число $y \in Y$; тогда говорят, что на множестве X задана функция f и пишут $y = f(x), \ x \in X$.

Функция бесконечно большая: функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Функция бесконечно малая: функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Функция возрастающая: функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на некотором множестве X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция монотонная – возрастающая или убывающая.

Функция непрерывная в точке: пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если предел функции при $x \to a$ равен ее значению в точке a, т.е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Функция непрерывная на замкнутом промежутке: функция $f(x)$ называется непрерывной на замкнутом промежутке $[a,b]$, если она непрерывна на промежутке (a,b) и $f(a+0) = f(a)$, $f(b-0) = f(b)$.

Функция непрерывная на открытом промежутке: функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором открытом промежутке X (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Функция нечетная: функция $y = f(x)$ с областью определения X называется нечётной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Функция обратная: если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает на X, тогда каждому значению $y \in Y_0$ (Y_0- область значений функции) будет соответствовать одно-единственное значение $x \in X$, такое, что $f(x) = y$, т.е. на множестве Y_0 оказывается определенной функция $x = \varphi(y)$. Эта функция называется обратной к функции $y = f(x)$.

Функция ограниченная: функцию $y = f(x)$ называют ограниченной на множестве X, если существует такое $L > 0$, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $|f(x)| \le L$.

Функция периодическая: функция $y = f(x)$ с областью определения X называется периодической, если существует такое $T > 0$, что:

1) если $x \in X$, то $x - T \in X$ и $x + T \in X$;
2) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$;
3) среди всех таких чисел T есть наименьшее. Это наименьшее T называется периодом функции $y = f(x)$.

Функция сложная: если $y = f(u)$, $u \in U$, и $u = \varphi(x)$, $x \in X$, то функция $y(x) = f(u(x))$ называется сложной функцией.

Функция убывающая: функция $y = f(x)$ называется убывающей на X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция четная: функция $y = f(x)$ с областью определения X называется чётной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Цилиндрическими координатами точки M пространства называются три числа: r и φ - полярные координаты проекции данной точки на плоскость Oxy, а также z - проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Oz системы.

Цилиндром называется поверхность, образованная прямыми (образующими цилиндра), проведенными через всевозможные точки заданной линии (направляющей цилиндра) параллельно заданной прямой (оси цилиндра).

Эквивалентные бесконечно малые функции: Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые при $x \to a$, называются эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентные системы: Две системы называются эквивалентными (равносильными), если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот

Элементами матрицы называются числа, образующие матрицу.

Эллипсом называется линия второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b - любые положительные числа.

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, где a, b, c - некоторые положительные числа.

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$, где a и b - некоторые положительные числа.

3.5. Технические и программные средства обеспечения дисциплины

Видеолекции по курсу размещены на канале UTUBE.

3.6. Методические указания к проведению практических занятий

Практические занятия для студентов очной формы обучения проводятся в аудиторном виде. Для студентов очно-заочной и заочной форм обучения часть занятий проводится в аудиторной форме, часть – с помощью дистанционных образовательных технологий на учебном сайте СЗТУ. Тематика практических занятий и количество часов указаны в п. 2.5. Методика проведения занятий описана в [4].

4. Блок контроля освоения дисциплины

4.1. Методические указания к выполнению контрольных работ

На первом курсе студенты изучают разделы математики, содержащиеся в части I, и выполняют контрольные работы № 1 и № 2 в первом семестре.

Прежде чем выполнять контрольные работы, следует изучить теоретический материал по указанной литературе, разобрать решения типовых задач, приведенных в данном комплексе, выработать навыки решения примеров и задач по соответствующей теме, проверив себя по тренировочным тестам, приведенным в 4.4. При выполнении контрольных работ необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради в клетку, с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество студента, шифр (номер студенческого билета), курс, факультет и специальность, по которой студент обучается, номер контрольной работы, год издания методических указаний, из которых взято контрольное задание.

3.Условия задачи переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится подробное решение со ссылками на использованные при решении определения, теоремы, формулы; в конце решения записывается ответ; чертежи можно выполнять аккуратно от руки.

4.В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольные задания, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

5. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

6. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

Студенты, обучающиеся заочно с элементами дистанционных образовательных технологий, оформляют контрольные работы в соответствии с рекомендациями, изложенными на сайте СЗТУ.

` 4.1.1. Методические указания к выполнению контрольной работы №1

Определители и системы линейных уравнений

Теоретический материал по данному вопросу изложен в опорном конспекте (см. темы 1.1, 1.2 на с. 18-45).

Пример 1. 1) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1(1\cdot 2 - 0(-1)) + 0\cdot(-1)(4-0) + (-1)\cdot 1(-2-0) = 2+0+2 = 4.$$

2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первого столбца.

Решение.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1\cdot 1 + 4(-1)(-1) + 0 = -3 + 4 = 1.$$

При решении систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными следует знать, что система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда ее определитель не равен нулю. Решение системы уравнений в этом случае находят по формулам Крамера. Если же определитель системы равен нулю, система или несовместна, или имеет бесконечно много решений.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 5z = 19, \\ 2x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель системы – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, разложив его, например, по элементам второго столбца.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)(-6) + 0 + 1(-1)\cdot 14 = 12 + 0 - 14 = -2.$$

Так как D $\neq$ 0, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D},$$

где D – определитель системы, D_x, D_y, D_z - определители, получающиеся из определителя системы заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов. Вычисляем D_x, D_y, D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 19 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 19 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 19 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6.$$

Таким образом,

$$x = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{-4}{-2} = 2; \quad z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Проверим полученное решение, подставив значения $x = 1, y = 2,$ $z = 3$ в систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 3, \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 19, \\ 2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7. \end{cases}$$

Все уравнения системы обратились в тождества, значит, система решена верно.

Матрицы и операции над ними

Теоретический материал по данному вопросу изложен в опорном конспекте (см. тему 1.3 на с. 46-60).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 5z = 19, \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

с помощью обратной матрицы.

Решение. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

- матрица составлена из коэффициентов при неизвестных (матрица системы);

$X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ - матрица-столбец из неизвестных;

$B = \begin{Vmatrix} 3 \\ 19 \\ 7 \end{Vmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов. При этом исходная система может быть записана в матричной форме: $A \cdot X = B$. Решим это уравнение. Для этого умножим слева обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A (в предположении, что матрица A^{-1} существует): $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как по определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, где $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ - единичная матрица, то матричное уравнение примет вид:

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$ $(\text{так как } EX = X.)$.

Таким образом, матрица-столбец X находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Обратная матрица A^{-1} существует, если определитель исходной матрицы A отличен от нуля: D(A) $\neq$ 0, и вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения элементов a_{ik} матрицы $A(i,k = 1,2,3)$.

Определитель матрицы A равен

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ (пример 2).}$$

Таким образом, $D(A) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Следует обратить внимание, что при нахождении обратной матрицы алгебраические дополнения элементов **строк** располагаются в качестве **столбцов**. Отсюда

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{Vmatrix} -5 & -3 & 10 \\ 6 & 4 & -14 \\ 4 & 2 & -8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2,5 & 1,5 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица. Для этого убедимся, что $A^{-1} \cdot A = E$. Произведение матриц $A^{-1} \cdot A$ найдем по правилу умножения матриц, согласно которому каждый элемент c_{ik} произведения $C = A \cdot B$ равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-й строки матрицы В.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{Vmatrix} 2,5 & 1,5 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 5+6-10 & 5-5 & -2,5+7,5-5 \\ -6-8+14 & -6+7 & 3-10+7 \\ -4-4+8 & -4+4 & 2-5+4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно. Найдем теперь неизвестную матрицу X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{Vmatrix} 2,5 & 1,5 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 19 \\ 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7,5+28,5-35 \\ -9-38+49 \\ -6-19+28 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$A \cdot X = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2+4-3 \\ 4+15 \\ 2+2+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 19 \\ 7 \end{Vmatrix} = B.$$

Матрица X найдена верно. Таким образом,

$$X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix},$$

следовательно, решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Векторы, операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

Теоретический материал по данному вопросу изложен в опорном конспекте (см. раздел 2 на с. 61-76).

Пример 4. На векторах $\overrightarrow{AB} = -5\vec{m} + 11\vec{n}$ и $\overrightarrow{AC} = 2\vec{m} + 6\vec{n}$ построен треугольник ABC. Найти площадь треугольника ABC и его высоту, опущенную на сторону BC, если длины векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны соответственно 1 и $\sqrt{2}$, а угол, образованный векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, равен 135°.

Решение. 1) Найдем площадь S треугольника ABC. Площадь треугольника, построенного на векторах, равна половине модуля их векторного произведения, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$.

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого применим распределительное свойство векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-5\vec{m} + 11\vec{n}) \times (2\vec{m} + 6\vec{n}) = -10\vec{m} \times \vec{m} + 22\vec{n} \times \vec{m} - 30\vec{m} \times \vec{n} + 66\vec{n} \times \vec{n}.$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулевому вектору, следовательно $\vec{m} \times \vec{m} = \vec{0}$, $\vec{n} \times \vec{n} = \vec{0}$; при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный, значит $-30\vec{m} \times \vec{n} = 30\vec{n} \times \vec{m}$. Отсюда

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 22\vec{n} \times \vec{m} + 30\vec{n} \times \vec{m} = 52\vec{n} \times \vec{m}.$$

Находим модуль полученного вектора

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = 52\left| \vec{n} \times \vec{m} \right| = 52 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin 135^0 = 52 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 52.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} \cdot 52 = 26.$

2) Найдем сторону BC треугольника ABC, то есть длину вектора $\overrightarrow{BC}$. Согласно правилу треугольника сложения векторов,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, откуда

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2\vec{m} + 6\vec{n}) - (-5\vec{m} + 11\vec{n}) = 2\vec{m} + 6\vec{n} + 5\vec{m} - 11\vec{n} = 7\vec{m} - 5\vec{n}.$$

Найдем длину полученного вектора по формуле: $\left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}}.$

Под корнем стоит скалярное произведение вектора $\overrightarrow{BC}$ самого на себя. Найдем его

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (7\vec{m} - 5\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 5\vec{n}) = 49\vec{m} \cdot \vec{m} - 35\vec{n} \cdot \vec{m} - 35\vec{m} \cdot \vec{n} + 25\vec{n} \cdot \vec{n}.$$

С учетом того, что $\vec{m} \cdot \vec{m} = |\vec{m}|^2$, $\vec{n} \cdot \vec{n} = |\vec{n}|^2$, $\vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{n}$, получаем

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=49|\vec{m}|^2-70\vec{m}\cdot\vec{n}+25|\vec{n}|^2=49\cdot 1^2-70\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135^0+25\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=49-70\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+25\cdot 2=49+70+50=169.$$

Таким образом, $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{169}=13.$

3) Найдем высоту h треугольника ABC, опущенную на сторону BC. По формуле площади треугольника имеем $S=\frac{1}{2}h\cdot BC$, откуда $h=\frac{2S}{BC}$.

Площадь треугольника S и сторона BC найдены ранее:

$S=26$, $BC=13$. Следовательно, $h=\frac{2\cdot 26}{13}=\frac{52}{13}=4.$

Уравнения прямых и плоскостей в пространстве

Теоретический материал по данному вопросу изложен в опорном конспекте (см. тему 3.3. на с. 89-97).

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-2,3)$, $M_2(2,-1,0)$ и точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{1}$ с плоскостью Oxy.

Решение. Найдем координаты точки $M_3\left(x,y,z\right)$ - точки пересечения заданной прямой с плоскостью Oxy. Для этого от канонических уравнений прямой перейдем к параметрическим и, добавив уравнение плоскости Oxy $z=0$, получим систему для определения координат искомой точки:

$$\begin{cases} x=1+3t, \\ y=-2+2t, \\ z=-2+t, \\ z=0. \end{cases}$$

Из третьего и четвертого уравнений получим $t=2$, тогда $x=7, y=2, z=0$. Таким образом, $M_3\left(7,2,0\right)$ - точка пересечения заданной прямой с плоскостью Oxy.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки M_1,M_2,M_3. Если точка $M\left(x,y,z\right)$ - текущая точка плоскости, то векторы

$\overrightarrow{M_1M} = (x-1,\ \ y+2,\ \ z-3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (2-1,\ -1-(-2),\ 0-3) = (1,\ 1,\ -3)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (6{,}4{,}-3)$ - компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_1M_3} \cdot \left(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв этот определитель по элементам первой строки, получим уравнение искомой плоскости:

$$9(x-1) - 15(y+2) - 2(z-3) = 0 \ \text{ или } \ 9x - 15y - 2z - 33 = 0.$$

Пример 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;1)$ и прямую $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ 3x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$.

Решение. Приведем общие уравнения прямой к каноническому виду $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$, ãäå $\vec{s} = (m;n;p)$ - направляющий вектор прямой, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, лежащая на этой прямой. Так как прямая лежит в обеих данных плоскостях, в плоскости $x - y + 2z + 1 = 0$ и в плоскости $3x - y - z + 1 = 0$, то ее направляющий вектор $\vec{s}$ перпендикулярен нормальным векторам этих плоскостей $\overrightarrow{N_1} = (1;-1;2)$ и $\overrightarrow{N_2} = (3;-1;-1)$, поэтому можно выбрать

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}.$$

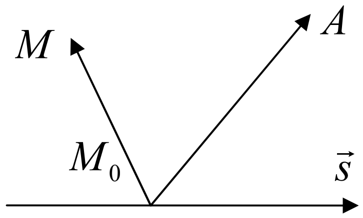


Рис. 4.1.1

Координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ найдем из системы уравнений, задающих прямую $\begin{cases} x_0 - y_0 + 2z_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 - y_0 - z_0 + 1 = 0 \end{cases}$. Выбирая одну из координат произвольно, например, положим $z_0 = 0$, получим $\begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0, \\ 3x_0 - y_0 + 1 = 0, \end{cases}$ откуда $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Значит, $M_0(0;1;0)$, $\vec{s} = (3;7;2)$ и канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{7}=\frac{z}{2}$. Теперь найдем уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку A. Выберем произвольную точку искомой плоскости $M(x,y,z)$, тогда три вектора $\overrightarrow{M_0M}=(x;y-1;z)$, $\overrightarrow{M_0A}=(2;-2;1)$, $\vec{s}=(3;7;2)$ компланарны, (рис. 4.1.1), значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\overrightarrow{M_0A}\times\vec{s}\right)=0$.

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\overrightarrow{M_0A}\times\vec{s}\right)=\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=x\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-11x-y+1+20z.$$

Т.о. уравнение искомой плоскости $11x+y-20z-1=0$.

Уравнения кривых и поверхностей второго порядка

Теоретический материал по данному вопросу изложен в опорном конспекте (см. темы 3.4, 3.5 на с. 97-114).

Пример 7. Найти координаты точек пересечения кривых $x^2+y^2-6x+1=0$ и $x+y^2=5$. Указать вид кривых. Сделать чертеж.

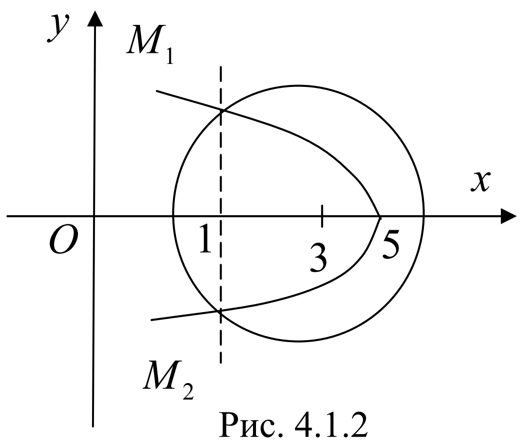


Рис. 4.1.2

Решение. Определим вид кривых. Уравнение $x^2+y^2-6x+1=0$; $x^2-6x+9+y^2+1=9$; $(x-3)^2+y^2=8$ определяет окружность с центром в точке (3; 0) и радиусом $R=2\sqrt{2}$.

Уравнению $x+y^2=5$ или $y^2=-(x-5)$ соответствует парабола, симметричная относительно оси Ox, ветви которой направлены влево, а вершина находится в точке (5,0). Координаты точек пересечения двух заданных линий являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+1=0, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

Подставляя $y^2=5-x$ из второго уравнения в первое, получим $x^2-7x+6=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=6$. Тогда при $x_1=1$, $y^2=4$, $y=\pm 2$. При $x_2=6$ уравнение $y^2=5-x$ решения не имеет. Таким образом, заданные окружность и парабола пересекаются в двух точках $M_1(1;2)$ и $M_2(1;-2)$ (рис. 4.1.2).

В декартовой системе координат в пространстве всякому уравнению первой степени относительно текущих координат соответствует плоскость, а уравнению второй степени в общем случае соответствует поверхность второго порядка (за исключением вырожденных случаев).

Пример 8. Тело в пространстве задано системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-2)^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le z, \\ z \le 2. \end{cases}$$

Определить вид поверхностей, его ограничивающих, и изобразить это тело.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$ задает в пространстве конус с осью Oz, смещенный вдоль оси Oz на 2 (рис. 4.1.3). Он разбивает все пространство на три части. Объединение двух из них, содержащих точки оси

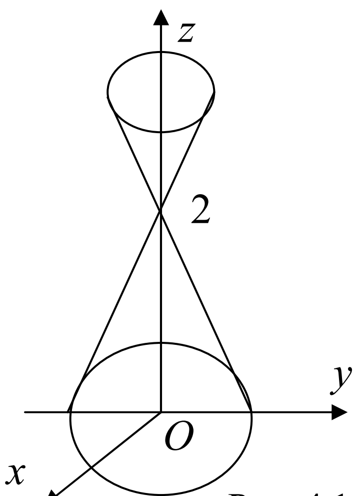


Рис. 4.1.3

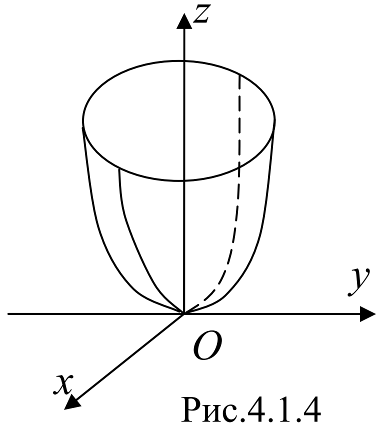


Рис.4.1.4

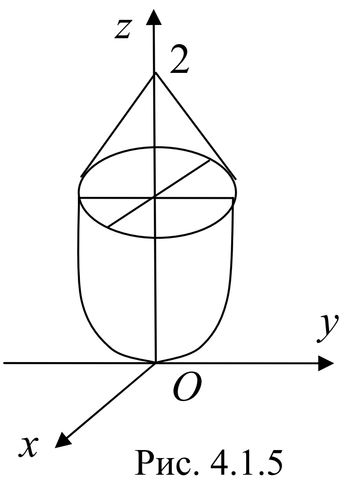


Рис. 4.1.5

Oz, задается неравенством $x^2 + y^2 - (z-2)^2 \le 0$. Параболоид, задаваемый уравнением $x^2 + y^2 = z$ (рис. 4.1.4), разбивает пространство на две части, одна из которых и задается неравенством $x^2 + y^2 \le z$. Так как координаты точки А(0; 0; 2) удовлетворяют этому неравенству, то речь, очевидно, идет о части пространства, лежащей внутри параболоида.

Наконец, $z \le 2$ задает то полупространство, которое лежит ниже плоскости $z = 2$. Поверхности $x^2 + y^2 = z$ и $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$ пересекаются в плоскости $z = 1$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Объединяя эти результаты, мы получим, что исследуемое тело имеет вид, указанный на рис. 4.1.5.

Пример 9. Сделать схематический рисунок тела, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ x^2 + y^2 - z^2 \ge 12. \end{cases}$$

Указать вид поверхностей, ограничивающих тело. Определить, по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются эти поверхности.

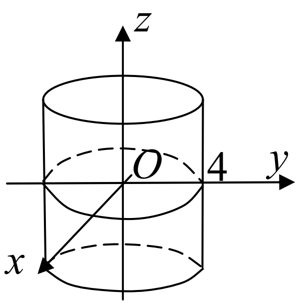


Рис. 4.1.6

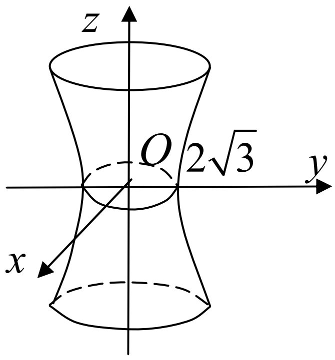


Рис. 4.1.7

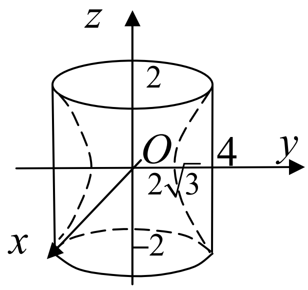


Рис. 4.1.8

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ задает цилиндр с осью Oz, направляющей которого является окружность радиуса 4 с центром в начале координат (рис. 4.1.6). Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 12$ задает однополостный гиперболоид (ось вращения - ось Oz), радиус "горла" (сечение плоскостью $z = 0$) равен $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (рис. 4.1.7). Очевидно, что линиями пересечения поверхностей будут окружности того же радиуса, что и направляющая цилиндра. Определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности. Для этого из уравнений системы исключим x и y: $x^2 + y^2$ подставим в уравнение гиперболоида. Получим $16 - z^2 = 12$ или $z^2 = 4$, откуда $z = \pm 2$.

На рис. 4.1.8 изображено тело, ограниченное снаружи цилиндром, а изнутри однополостным гиперболоидом, которые пересекаются по двум окружностям с центрами на оси Oz, с одинаковыми радиусами $R = 4$, расположенными в плоскостях $z = 2$ и $z = -2$.

4.1.2. Методические указания к выполнению контрольной работы №2

Вычисление пределов с использованием теорем о конечных пределах

Справедливы следующие теоремы:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, (С - постоянная);
2. $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет при $x \to a$ конечный предел, то

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\cdot g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{ если } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Для нахождения предела элементарной функции $f(x)$ при $x \to a$ в случае, если a - конечная точка, принадлежащая области определения $f(x)$, нужно вычислить значение этой функции при $x = a$. Это значение и будет искомым пределом, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Пример 10. Найти пределы функций при $x \to a$:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5;\ \ a = -1;$

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1};\ \ a = 2;$

в) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\cos 2x};\ \ a = \dfrac{\pi}{2}.$

Решение. Данные функции элементарные, поэтому можно применить сформулированное правило:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - 2x + 5) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 10;$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{2\cdot 2^2 + 1} = 3;$

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\sin x + \dfrac{1}{\cos 2x}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)} = 1 + (-1) = 0.$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Справедливы теоремы:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций - бесконечно малая функция.

2. Если $f(x)$ - функция, ограниченная в некоторой окрестности точки a, функция $g(x)$ - бесконечно малая в этой точке, то функция $f\left(x\right)\cdot g(x)$ - бесконечно малая.

3. Если при $x \to a$ функция $f\left(x\right)$ стремится к отличному от нуля пределу, а функция $g\left(x\right)$ - бесконечно большая при $x \to a$, то функция $f\left(x\right)\cdot g(x)$ - бесконечно большая при $x \to a$.

4. Если функция $f\left(x\right)$ - бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки не равна нулю, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая в точке a; если $f\left(x\right)$ - бесконечно большая в точке a, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

Пример 11. Найти а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+3}$.

Решение.

а) При $x \to 1$ функция $\left(x-1\right)$ - бесконечно малая, значит, $\dfrac{1}{x-1}$ - бесконечно большая, $\cos x \to \cos 1 \neq 0$, следовательно, $\cos x\dfrac{1}{x-1}$ - бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x}{x-1} = \infty$.

б) При $x \to \infty$ функция x^2+3 - бесконечно большая, поэтому $\dfrac{1}{x^2+3}$- бесконечно малая. Функция $\sin x$ - ограниченная, значит, произведение $\sin x\dfrac{1}{x^2+3}$ - бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+3} = 0$.

Раскрытие неопределенностей

Если при формальной подстановке предельного значения аргумента получается выражение вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0, 1^\infty,$$

то для нахождения пределов функций необходимо проводить преобразования данных выражений.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

Решение. Непосредственная подстановка значения $x=1$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, выделим общий множитель и сократим на него дробь. Для разложения числителя воспользуемся формулой:
$\left(a^3-b^3\right)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, т.е. $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$.
В знаменателе дроби стоит квадратный трехчлен. Если квадратный трехчлен имеет корни x_1, x_2, то он раскладывается на множители следующим образом: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Данный квадратный трехчлен имеет корни $x_1=1$, $x_2=2$, поэтому $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-3.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Непосредственно подставляя $x=0$, получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Умножим и разделим данную дробь на выражение, сопряженное числителю, то есть на $\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-2x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2\left(\sqrt{1-2x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}+1}=-1.$$

Здесь была использована формула $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Замечание. Если в примере иррациональность имеется в числителе и знаменателе дроби, то дробь следует умножить и разделить на выражение, сопряженное числителю, и на выражение, сопряженное знаменателю.

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}$.

Решение. В этом примере неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки в числителе x^3, а в знаменателе x^2 (наивысшую степень x для каждого многочлена):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}}\right).$$

Величины $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{x^3}$, обратные бесконечно большим, - бесконечно малые, и, значит, выражение в скобках стремится к $\dfrac{3}{7}$. x - бесконечно большая величина, следовательно, произведение $x\cdot\dfrac{3}{7}$ также величина бесконечно большая, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}=\infty.$$

Аналогичный прием вычисления пределов можно использовать для раскрытия неопределенностей в случае иррациональных функций.

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}.$$

Так как $x\to+\infty$, то $x>0$ и, значит, $|x|=x$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{|x|\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{8}{x}\right)}{x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{8}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}=\frac{5+0}{\sqrt{4-0}}=\frac{5}{2}.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида ($\infty-\infty$). Умножим и разделим данное выражение на сопряженное:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее стандартным способом:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}.$$

Так как $x\to-\infty$, то $x<0$ и, значит, $|x|=-x$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right)=-1.$$

Вычисление пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых величин

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые при $x\to a$, называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность бесконечно малых обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. При раскрытии неопределенностей можно пользоваться правилом: предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если эти бесконечно малые под знаком предела заменить им эквивалентными. Если при $x\to a$ $\alpha(x)$ - бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad \ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x);\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);$$

$$\mathrm{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x);\qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a;\quad \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n};$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad 1-\cos\alpha x\sim\frac{[\alpha(x)]^2}{2};\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x).$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x^2}-1\right)\sin 2x}{\ln(1-3x)(1-\cos 2x)}$.

Решение. Так как при $x\to 0$ $3x^2\to 0,$ $2x\to 0,$ $(-3x)\to 0,$ то имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Заменим исходные бесконечно малые эквивалентными

$$e^{3x^2}-1\sim 3x^2;\quad \sin(2x)\sim 2x;\quad \ln(1-3x)\sim(-3x);\quad 1-\cos 2x\sim\frac{4x^2}{2}.$$

Тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x^2}-1\right)\sin 2x}{\ln(1-3x)(1-\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot 2x}{(-3x)\cdot 2x^2}=-1.$$

Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции

Если функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности конечной точки a, то точка a называется точкой разрыва функции в двух случаях:

1) в точке $x=a$ функция $f(x)$ не определена;

2) в точке $x=a$ функция $f(x)$ определена, но не выполняется хотя бы одно из равенств:

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a),$$

где $f(a-0)$ и $f(a+0)$ - левосторонний и правосторонний пределы функции f в точке a.

Если при этом $f(a-0)$ и $f(a+0)$ конечны, то точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода. Причем, если $f(a-0)\neq f(a+0)$, то разрыв называется конечным, а если $f(a-0)=f(a+0)$, то разрыв называется устранимым.

Если хотя бы один из пределов в указанном равенстве не существует или бесконечный, то точка a называется точкой разрыва второго рода (точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из соответствующих пределов - бесконечный).

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

Пример 18. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$, определить тип разрыва. Для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции. Построить график.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \ x \le 0, \\ 3^x, \ 0 < x \le 1, \\ -2x+5, \ x > 1. \end{cases}$$

Решение. Внутри каждого из промежутков $(-\infty;0)$, $(0;\ 1)$ и $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ совпадает с соответствующей элементарной функцией. Следовательно, внутри каждого из этих промежутков функция $f(x)$ будет непрерывной, и разрывы могут быть только на концах этих промежутков, то есть в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Найдем односторонние пределы в этих точках:

1. Для точки $x = 0$ имеем:

$$f(0-o) = \lim_{x \to 0-o} f(x) = \lim_{x \to 0-o} x^3 = 0;$$

$$f(0+o) = \lim_{x \to 0+o} f(x) = \lim_{x \to 0+o} 3^x = 3^0 = 1.$$

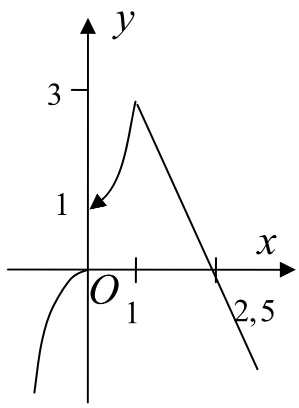


Рис. 4.1.9

Оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, значит, точка $x = 0$ есть точка разрыва I рода. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет скачок $\Delta_0 = f(0+o) - f(0-o) = 1 - 0 = 1$.

2. Рассмотрим точку $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1-o} f(x) = \lim_{x \to 1-o} 3^x = 3^1 = 3;$$

$$\lim_{x \to 1+o} f(x) = \lim_{x \to 1+o} (-2x+5) = -2 \cdot 1 + 5 = 3;$$

$$f(1) = 3^1 = 3.$$

Односторонние пределы равны и совпадают со значением функции в рассматриваемой точке, значит, в этой точке функция $f(x)$ непрерывна. График функции изображен на рис. 4.1.9.

Пример 19. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{8|x+1|}{x^2 - 2x - 3}$, установить тип разрыва, для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции, построить график в окрестности точек разрыва.

Решение. Преобразуем дробь:

$$f(x) = \frac{8|x+1|}{x^2 - 2x - 3} = \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}.$$

Функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 3$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Найдем соответствующие односторонние пределы:

1. Для точки $x=-1$ при $x\to -1-o$ $x+1<0$ и, значит, $|x+1|=-(x+1)$. Следовательно,

$$f(-1-o)=\lim_{x\to -1-o}\frac{-(x+1)8}{(x+1)(x-3)}=-\lim_{x\to -1-o}\frac{8}{x-3}=2.$$

Аналогично вычислим

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+o}\frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -1+o}\frac{8(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1+o}\frac{8}{x-3}=-2.$$

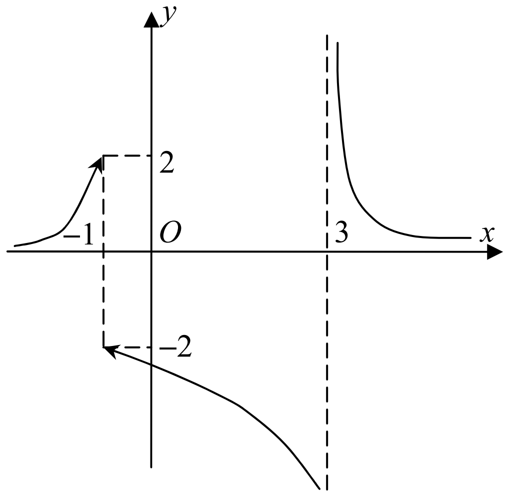


Рис. 4.1.10

Так как оба предела конечны, то точка $x=-1$ - точка разрыва первого рода. Поскольку пределы не равны, то это - конечный разрыв I рода. $\Delta_{-1}=f(-1+o)-f(-1-o)=-2-2=-4$ - скачок функции. В окрестности точки $x=3$ $x+1>0$, поэтому $|x+1|=x+1$ и, значит

$$f(3-o)=\lim_{x\to 3-o}\frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3-o}\frac{8(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3-o}\frac{8}{x-3}=-\infty.$$

$$f(3+o)=\lim_{x\to 3+o}\frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3+o}\frac{8}{x-3}=+\infty.$$

Таким образом, точка $x=3$ - точка бесконечного разрыва второго рода. График функции представлен на рис. 10.

Пример 20. Найти точки разрыва функции $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$, определить тип разрыва, начертить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва.

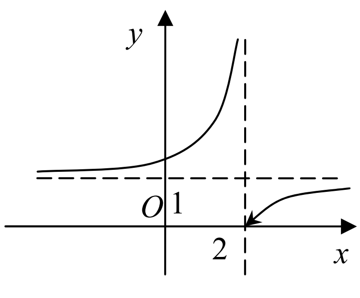


Рис. 4.1.11

Решение. Данная элементарная функция не определена в точке $x=2$, следовательно, имеет в этой точке разрыв. Найдем односторонние пределы, учитывая, что $a^t\to +\infty$ при $t\to +\infty$ и $a^t\to 0$ при $t\to -\infty$, если $a>1$. При $x\to 2-o$ $2-x>0$ и $\frac{1}{2-x}\to +\infty$, следовательно, $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}3^{\frac{1}{2-x}}=+\infty$.

Таким образом, в точке $x=2$ функция имеет бесконечный разрыв второго рода.

При $x \to 2+o$ $2-x<0$ и $\dfrac{1}{2-x} \to -\infty$, следовательно, $f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 0$. Заметим, что при $x \to \pm\infty$ $\dfrac{1}{2-x} \to 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} 3^{\frac{1}{2-x}} = 1$, т.е. прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой кривой. Эскиз графика функции изображен на рис. 4.1.11.

Производная и дифференциал

Основные правила дифференцирования:

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке:

$$1.\ (u+v)' = u' + v';\quad 2.\ (cu)' = cu'\,(c = \text{const});$$

$$3.\ (uv)' = u'v + uv';\quad 4.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таблица производных:

1. $(c)' = 0;$
2. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$
3. $(\sin x)' = \cos x;$
4. $(\cos x)' = -\sin x;$
5. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$
6. $(\text{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
9. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$
10. $(\text{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2};$
11. $\left(e^x\right)' = e^x;$
12. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a;$ $(a>0,\ a\neq 1)$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$
14. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$ $(a>0,\ a\neq 1)$

Пример 21. Найти производную функции $y = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{x^2}{2} + 3$.

Решение. Используем первое и второе правила дифференцирования

$$y' = \left(2\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\frac{5}{x^2}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + (3)' = 2\left(x^{1/3}\right)' - 5\left(x^{-2}\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + (3)'.$$

Далее используем формулу для нахождения производной степенной функции (табличная формула N 2):

$$y' = 2\frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1} - 5(-2)x^{-2-1} + \frac{1}{2}2x^{2-1} + 0 = \frac{2}{3}x^{-2/3} + 10x^{-3} + x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{10}{x^3} + x.$$

Пример 22. Найти производную функции $y = (\cos x + 5)e^x$.

Решение. Используем правило дифференцирования произведения и табличные формулы N 4 и N 11:

$$y' = (\cos x + 5)' e^x + (\cos x + 5)\left(e^x\right)' =$$

$$= (-\sin x + 0)e^x + (\cos x + 5)e^x = e^x(\cos x - \sin x + 5).$$

Пример 23. Найти производную функции $y = \dfrac{\operatorname{arctg}x}{\ln x}$.

Решение. Используем правило дифференцирования частного и табличные формулы N 9 и N 13:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg}x)' \ln x - \operatorname{arctg}x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\ln x - \operatorname{arctg}x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x\ln x - \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}{x\left(1+x^2\right)\ln^2 x}.$$

Дифференцирование сложной функции

Производная сложной функции $y = f(u(x))$ вычисляется по формуле

$$y'_x = f'_u(u)u'_x.$$

То есть, чтобы найти производную сложной функции, нужно сначала продифференцировать "внешнюю" функцию по промежуточному аргументу u так, как если бы аргумент u был независимой переменной, после чего умножить полученный результат на производную от функции u по переменной x.

Это правило распространяется на сложную функцию, состоящую из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пример 24. Найти производную функции $y = \ln(1 + 2\cos x)$.

Решение. Данная функция - сложная, промежуточный аргумент $u = (1 + 2\cos x)$. Согласно приведенному правилу имеем

$$y' = (\ln u)'_u u'_x = \frac{1}{u}(1+2\cos x)' = \frac{1}{1+2\cos x}(-2\sin x).$$

Пример 25. Найти производную функции $y = \sqrt{8+\sin^2 x}$.

Решение. Данная сложная функция составлена из трех функций $y = f(u(v(x)))$, где $f(u) = \sqrt{u}$, $u(v) = 8 + v^2$, $v = \sin x$. Применяем правило дифференцирования сложной функции (начиная дифференцировать с "внешней" функции f):

$$f'_u u'_x = f'_u u'_v v'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(8+\sin^2 x\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{8+\sin^2 x}} 2vv'_x =$$

$$= \frac{2\sin x}{2\sqrt{8+\sin^2 x}}(\sin x)' = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{8+\sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{8+\sin^2 x}}.$$

Геометрический смысл производной и дифференциала функции

Пример 26. Найти координаты точки пересечения с осью Oy и осью Ox касательной к кривой $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$, проведенной к ней в точке $M_0(-1;4)$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем сначала производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4} = \frac{2(x-1)x - 2(x-1)^2}{x^3} = \frac{2x-2}{x^3} = \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

Вычислим $f'(-1) = \frac{2(-1-1)}{(-1)^3} = 4,$ тогда уравнение касательной к заданной кривой в точке Мо(-1,4) запишется в виде:

$$y - 4 = 4(x+1) \text{ или } y = 4x + 8.$$

Теперь находим координаты точки пересечения полученной прямой с осью Oy.
Для всех точек, лежащих на оси Oy, $x = 0$. Подставим в уравнение касательной $x = 0$, получим $y = 8$. Значит, касательная $y = 4x + 8$ пересекает ось Oy в точке (0,8).
Для всех точек на оси Ox $y = 0$. Подставим в уравнение касательной $y = 0$, получим $x = -2$. Таким образом, касательная пересекает ось Ox в точке $(-2, 0)$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производная функции $y = y(x)$, заданной в параметрической форме: $y = y(t),\ x = x(t)$, находится по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 27. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функции $y = y(x)$, заданной в параметрической форме $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin 2t} \\ y = \ln \operatorname{tg} t \end{cases}$.

Решение. Вычислим x'_t и y'_t:

$$x'_t = \left[\left(\sin 2t\right)^{-1}\right]' = -\left(\sin 2t\right)^{-2}\left(\sin 2t\right)' = -\frac{\cos 2t\left(2t\right)'}{\sin^2 2t} = \frac{-2\cos 2t}{\sin^2 2t};$$

$$y'_t = \left[\ln \operatorname{tg} t\right]' = \frac{1}{\operatorname{tg} t}\left(\operatorname{tg} t\right)' = \frac{\operatorname{ctg} t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sin t \cos t} = \frac{2}{\sin 2t}.$$

Используя формулу $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$, получим

$$y'_x = \frac{2}{\sin 2t} : \left(-\frac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}\right) = -\frac{\sin^2 2t}{\sin 2t \cos 2t} = -\operatorname{tg} 2t.$$

Итак, $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} 2t.$ Так как $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, то для нахождения $\frac{d^2 y}{dx^2}$ можно использовать ту же формулу дифференцирования функции, заданной параметрически, применив ее к функции $\frac{dy}{dx}$, то есть:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}$$

Вычислим $\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = \left(-\operatorname{tg} 2t\right)' = -\frac{1}{\cos^2 2t}\left(2t\right)' = -\frac{2}{\cos^2 2t}.$$

Далее, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{2}{\cos^2 2t}\right):\left(-\frac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}\right)=\frac{2\sin^2 2t}{\cos^2 2t\cdot 2\cos 2t}=\frac{\mathrm{tg}^2 2t}{\cos 2t}.$$

4.2. Задания на контрольные работы № 1-2

В контрольных работах студент должен решить задачи, выбрав их номера из таблицы по двум последним цифрам своего шифра и первой букве фамилии.

Например, шифр 17-0025, студент Захаров выполняет в контрольной работе №1 задачи 5,12,25,35,45; в контрольной №2 - 55,62,75,85,92.

Последняя цифра шифра		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номер контрольной работы	**1**	1 41	2 42	3 43	4 44	5 45	6 46	7 47	8 48	9 49	10 50
	2	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Предпоследняя цифра шифра		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номер контрольной работы	**1**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	61 91	62 92	63 93	64 94	65 95	66 96	67 97	68 98	69 99	70 100
Первая буква фамилии		**А,И Т**	**Б,О Ц**	**В,Н Х**	**Г,Ф Я**	**Д,З Л**	**Е,М Р**	**Ж,С Ч**	**К Э**	**П Щ**	**У, Ш Ю**
Номер контрольной работы	**1**	21 31	22 32	23 33	24 34	25 35	26 36	27 37	28 38	29 39	30 40
	2	71 81	72 82	73 83	74 84	75 85	76 86	77 87	78 88	79 89	80 90

Задание на контрольную работу № 1

В задачах 1-5 решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} x + \quad 2z = 5, \\ 3x - 5y + 2z = 7, \\ 4x + 5y - z = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - 2y \quad = 5, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 3y - z = -1, \\ x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + \quad 3z = 8, \\ 2x + y + 4z = 10, \\ 5x + 6y + z = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x + 5y \quad = -3, \\ 3x - y + 2z = -5, \\ 5x - y + 2z = -9. \end{cases}$

В задачах 6-10 решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

6. $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 3y - z = -1, \\ -2y + z = 1. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} y + z = 4, \\ 2x + 2y - 7z = -8, \\ 4x + y - 5z = -4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2, \\ 3x - 2y + z = -6, \\ 2y - z = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2, \\ x - \quad 2z = -6, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ 3x + y \quad = -2. \end{cases}$

Задачи 11-20 решить средствами векторной алгебры.

11. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(7;3;4), B(1;0;6), C(4;5;-2)$

12. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$ и $D(2;3;8)$.

13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.

14. С помощью скалярного произведения найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, а затем проверить ответ с помощью векторного произведения, используя основное тригонометрическое тождество.

15. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Вычислить длину вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

17. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если эти векторы лежат в координатных плоскостях, направлены там по

биссектрисам координатных углов и длина каждого из этих векторов равна 2.

18. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет 60°. Определить угол между медианой $\overrightarrow{OM}$ треугольника AOB и стороной $\overrightarrow{OA}$.

19. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}, \vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120°.

20. Даны точки $A(3;3;-2), B(0;-3;4), C(0,-3,0)$ и $D(0;2;-4)$. Найти векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и найти проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$.

Задачи 21-30 решить методами аналитической геометрии.

21. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2)$ и $M_3(1;1;4)$.

22. Через ось Oz проведена плоскость, составляющая с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол 60°. Найти уравнение этой плоскости.

23. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

24. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2;-1;1)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x + 2y - z + 4 = 0$ и $x + y + z - 3 = 0$.

25. Найти угол между прямой $\begin{cases} y = \ \ 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

26. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

27. Дана плоскость $x + y - z = 0$ и прямая, проходящая через точки $A(0;0;4)$ и $B(2;2;0)$. Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

28. Найти проекцию точки $A(3;1;-1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

29. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;-3)$ и перпендикулярной к прямой $\begin{cases} x = z, \\ y - z = 1. \end{cases}$

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;-5;0)$ и $M_2(0;0;2)$ перпендикулярно к плоскости $x + 5y + 2z - 10 = 0$.

В задачах 31-40 найти координаты точек пересечения кривых. Указать вид кривых. Сделать рисунок.

31. $y=(x+2)^2$ и $18-y=(x-4)^2$
32. $x^2-y^2=16$ и $y=x+1$
33. $x^2+y^2=1$ и $y=x-1$
34. $y^2=x$ и $y=-2x+1$
35. $x^2+(y-2)^2=7$ и $3y^2=x^2-3$
36. $y^2-x=2$ и $y^2-3x=0$
37. $(x-1)^2+y^2=9$ и $y^2=4x$
38. $(y-2)^2=x+2$ и $x+y=2$
39. $(x-2)^2-y=2$ и $(x-1)^2+y=3$
40. $4x^2+y^2=9$ и $2x-3y+3=0$

В задачах 41-50 сделать схематический рисунок тела, заданного системой неравенств. Указать вид поверхностей, ограничивающих это тело. Определить, по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются эти поверхности.

41. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 16 \\ x^2+y^2\le 9 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\ge 0 \\ x^2+y^2\le 9 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2+y^2\le z^2 \\ x^2+y^2-z-2\le 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 16 \\ x^2+y^2-z^2\ge 8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2+y^2-4z^2\le -6 \\ x^2+y^2-z^2\le 6 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2\le 4 \\ x^2+y^2\ge 3-z \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2+y^2\le 5-z \\ x^2+y^2\le 4z \end{cases}$

48. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\ge -2 \\ x^2+y^2\le 7 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2+y^2\le 2z \\ x^2+y^2+z^2\le 3 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 4 \\ x^2+y^2-z^2\ge 0 \end{cases}$

Задание на контрольную работу № 2

В задачах 51-60 найти пределы функций, используя эквивалентные бесконечно малые величины и тождественные преобразования.

51. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3x^4\right)\ln\left(1-4x^2\right)}{1\text{-}\cos\left(2x^3\right)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{5+x^2}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

52. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}^2(x-2)(\sqrt{3-x}-1)}{\sin^3(x-2)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15-x^2-2x}{4x^2-36}$.

53. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\mathrm{arctg}^2(3x)\cdot\mathrm{ctg}(6x)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{24+x}-5}{x^2-1}$.

54. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{arctg}\left(x^2-6x+9\right)}{\sin(x-3)\ln(x-2)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10-6x^3+5x}{4x^2-2+3x^3}$.

55. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(5^x-1\right)\cdot\mathrm{tg}(3x^2)}{\sqrt{1-6x^3}-1}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{16+2x^3}{3x^2-3x-18}$.

56. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 0+o}\dfrac{\cos(6x^2)-1}{\arcsin\left(\sqrt{x^5}\right)\ln\left(1+3\sqrt{x^3}\right)}$ $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{12x-3x^2}{4x^2-12x-16}$.

57. $\grave{a})$ $\lim\limits_{x\to 0+o}\dfrac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sin(4\sqrt{x})}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{5+9x^4}}{x^2-3}$.

58. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0+o}\dfrac{\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\ln(1+4x^3)}{\mathrm{arctg}^2(4x^2)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^5-2x^2+1}{3x^3+2x^5-5}$.

59. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0+o}\dfrac{(2^x-1)\cdot\mathrm{ctg}\sqrt{x}}{\arcsin\sqrt{x}}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{3}{9-x^2}\right)$.

60. $a)$ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\sqrt[3]{2+x}-1)\cdot\arcsin(x+1)}{1-\cos(x+1)}$, $\acute{a})$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-2x^2}{\sqrt{7+x}-3}$.

В задачах 61-70 а) найти точки разрыва функций, если они существуют; б) найти односторонние пределы в точках разрыва и установить тип точек разрыва; в) сделать схематический рисунок графика функции в окрестности точек разрыва.

61. $f(x)=\dfrac{|5-x|}{5-x}.$ 62. $f(x)=2^{\frac{x}{3+x}}.$

63. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \text{ ï ðè } x\le 0,\\ \cos x \text{ ï ðè } x>0.\end{cases}$ 64. $f(x)=\begin{cases}\arcsin x \text{ ï ðè } -1\le x<0,\\ 5x \text{ ï ðè } x>0.\end{cases}$

65. $f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}.$ 66. $f(x)=\dfrac{x}{(x+4)^3}.$

67. $f(x)=\begin{cases}2e^x \text{ ï ðè } x<0,\\ 2-4x \text{ ï ðè } x>0.\end{cases}$ 68. $f(x)=\begin{cases}7-4x \text{ ï ðè } x\le 1,\\ 3\ln x \text{ ï ðè } x>1.\end{cases}$

69. $f(x)=\dfrac{x^2}{64-x^3}.$ 70. $f(x)=5^{\frac{x}{x+1}}.$

В задачах 71-80 найти первую производную функции

71. $y=\sqrt{1-x^4}+x^2\arcsin(x^2)-21.$

72. $y=2\sqrt{x}\,\mathrm{arcctg}\sqrt{x}+\ln(3x+3)+5.$

73. $y=\ln\left(1+x^3\right)-2\sqrt{x^3}\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x^3}-7.$

74. $y=x^3\arccos(x^3)-\sqrt{1-x^6}+9.$

75. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}-2\ln\left(x^3-1\right)-8.$

76. $y=x\cdot\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x-16.$

77. $y=\cos^2(5x)+5x\cdot\sin(10x)+6.$

78. $y=\sqrt{1-4^x}-2^x\cdot\arccos\left(2^x\right)-3.$

79. $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x)+\dfrac{x}{1+4x^2}+20.$

80. $y=\mathrm{tg}^2(3x)+2\ln\left(\cos(3x)\right)-11.$

В задачах 81-85 найти координаты точки пересечения с осью Ox касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке. Сделать рисунок.

81. $y = e^{3x}$, $A\left(\dfrac{1}{3}; e\right)$. 82. $y = x^2 - 5x + 6$, $A(4;2)$.

83. $y = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $A(\dfrac{\pi}{2};1)$. 84. $y = \operatorname{arctg} x$, $A\left(1; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

85. $y = x^3 + x$, $A(1;2)$.

В задачах 86-90 найти координаты точки пересечения с осью Oy касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в заданной точке. Сделать рисунок.

86. $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$, $A\left(\dfrac{\pi^2}{4}; 0\right)$. 87. $y = 16 - x^2$, $A(3;7)$.

88. $y = \arcsin x$, $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\pi}{3}\right)$. 89. $y = \ln(x^3)$, $A(e;3)$.

90. $y = \operatorname{tg}(5x)$, $A\left(\dfrac{\pi}{20}; 1\right)$.

В задачах 91-100 найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически

91. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sin t}, \\ y(t) = \operatorname{ctg} t \end{cases}$ 92. $\begin{cases} x(t) = 2^t, \\ y(t) = \dfrac{2^t}{2^t + 1}. \end{cases}$

93. $\begin{cases} x(t) = \operatorname{tg}(2t), \\ y(t) = 4t. \end{cases}$ 94. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t}, \\ y(t) = \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$

95. $\begin{cases} x(t) = \ln(1+t^2), \\ y(t) = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$ 96. $\begin{cases} x(t) = \arccos\sqrt{1-t}, \\ y(t) = \sqrt{t}. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = 3\ln(\cos t). \end{cases}$ 98. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t}, \\ y(t) = \operatorname{arcctg} t. \end{cases}$

99. $\begin{cases} x(t) = \operatorname{arctg}\left(t^3\right), \\ y(t) = t^3. \end{cases}$ 100. $\begin{cases} x(t) = \sin(3t), \\ y(t) = \ln\left(\sin(3t)\right). \end{cases}$

4.3. Текущий контроль
Тренировочные тесты

Тест 1

1. Алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} матрицы $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$ равно A) 2; B) 1; C) -3; D) -2.

2. Какое из утверждений верно для системы $\begin{cases} 5x + 4y - z = 2, \\ x - y + 2z = -1, \\ 3x + 2y + z = 3. \end{cases}$

   A) система имеет единственное решение,
   B) система несовместна,
   C) система имеет бесконечное множество решений?

3. При каком значении m система $\begin{cases} 2x - y + mz = 5, \\ -2x + 3y + 2z = -1, \\ 2y + 5z = 0 \end{cases}$ несовместна?

   A) $m = 1$; B) $m = -1$; C) $m = 3$; D) $m = 0$.

4. При каком значении m система $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$ имеет ненулевые решения?

   A) $m = -1$; B) $m = 0$; C) $m = -2$; D) $m = 1$.

5. В системе $\begin{cases} 3x - 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -2, \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$ найти значение неизвестного x по формулам Крамера.

   A) $x = 2$; B) $x = -1$; C) $x = 1$; D) $x = -2$.

6. Найти решение системы $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + 7y + 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. Ответ выразить через параметр.

   A) $x = t, \ y = -2t, \ z = t$; B) $x = 2t, \ y = -t, \ z = t$;
   C) $x = 2t, \ y = t, \ z = -t$; D) $x = -t, \ y = t, \ z = -2t$.

Тест 2

1. Минор элемента a_{32} матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ равен

A) -7; B) 9; C) 7; D) -9.

2. Найти матрицу $C = B - 2A$, если $B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $A = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

A) $C = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$; B) $C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$; C) $C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$; D) $C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

3. Если $B = 3A$, где A - матрица третьего порядка, то ее определитель $D(B)$:

A) $D(B) = D(A)$; B) $D(B) = 3D(D)$;

C) $D(B) = 9D(A)$; D) $D(B) = 27D(A)$.

4. Найти произведение матрицы $A = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}$ и матрицы $B = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

A) $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{Vmatrix}$; B) $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 6 & 6 & -1 \end{Vmatrix}$;

C) $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 11 \end{Vmatrix}$; D) $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 6 & -4 & -2 & 0 \\ -9 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

5. Найти $C = B \cdot A^{-1}$, если $A = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

A) $C = \begin{Vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{Vmatrix}$; B) $C = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{Vmatrix}$;

C) $C = \begin{Vmatrix} -8 & 0 \\ 9 & 1 \end{Vmatrix}$; D) $C = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \\ -2 & -5 \end{Vmatrix}$.

6. Даны три квадратных матрицы одного порядка A, B, C. Найти матрицу X из матричного уравнения $\frac{1}{2}A \cdot X + B = C$.

A) $X=\dfrac{2(C-B)}{A}$; B) $X=\dfrac{2(B+C)}{A}$;

C) $X=2A^{-1}(C-B)$; D) $X=-2A^{-1}(C+B)$.

Тест 3

1. Вычислите длину вектора $\vec{a}=\vec{b}+3\vec{c}$, если $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

   A) 6; B) 25; C) 3; D) $5\sqrt{2}$.

2. Укажите, какому из предложенных векторов коллинеарен вектор $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$:

   A) $2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; B) $-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$; C) $\vec{i}-2\vec{j}$; D) $\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$.

3. Укажите, какому из предложенных векторов перпендикулярен вектор $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$:

   A) $-2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$; B) $2\vec{j}+3\vec{k}$; C) $2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$; D) $\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

4. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(0,1,-3)$, $\vec{b}=(-1,1,4)$ и $\vec{c}=(2,-3,1)$.

   A) 6; B) 25; C) 3; D) 2.

5. Определите проекцию вектора $\vec{a}=(2,1,3)$ на направление вектора $\vec{b}=(-3,0,4)$.

   A) $\frac{4}{5}$; B) $-\frac{3}{8}$; C) 3; D) $\frac{6}{5}$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$ и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 30^o.

   A) 6; B) 2; C) 3; D) $5\sqrt{2}$.

Тест 4

1. Найти площадь треугольника, образованного прямой $2x+3y-6=0$ и осями координат.

   A) 1; B) 2; C) 4; D) 3.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,0,4)$ и перпендикулярной плоскости $3x-y+z+5=0$.

   A) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{5}$; B) $3(x-2)-y+5(z-4)=0$;

   C) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$; D) $2x+4z=5$.

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M(3,-1,4) и параллельной плоскости $2x+5y-3z-1=0$.

A) $2x+5y-3z+11=0$; B) $3x-y+4z-1=0$;

C) $-2x-5y+3z+8=0$; D) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

4. Найти угол между прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{\sqrt{3}}$ и плоскостью $2x-3y+2\sqrt{3}z-11=0$.

A) $\beta=\arcsin 0.5$; B) $\beta=\arcsin(-0.5)$;

C) $\beta=\arcsin 0.3$; D) $\beta=\frac{\pi}{3}$.

5. Определить длину перпендикуляра, опущенного из точки A(-1,4,3) на плоскость $4x-3y+5z-2=0$

A) 16; B) 25; C) $\frac{13}{2}$; D) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

6. Какие из предложенных уравнений I) $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{5}$,

II) $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-t, \\ z=4+5t \end{cases}$ и III) $\begin{cases} -2x+y+-4z+1=0, \\ 3x-y+5z-22=0 \end{cases}$

описывают одну и ту же прямую?

A) I) и III); B) I) и II); C) II) и III); D) все прямые разные.

Тест 5

1. Уравнение $x^2-5y^2-3x+2y-2=0$ определяет на плоскости

A) параболу; B) гиперболу; C) эллипс; D) прямую.

2. Уравнение $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$ определяет на плоскости

A) параболу; B) гиперболу; C) эллипс; D) окружность.

3. Уравнение $25x^2-50x+12y+37=0$ определяет на плоскости

A) параболу; B) гиперболу; C) эллипс; D) окружность.

4. Найти координаты фокуса параболы $x^2=4y$.

A) (1,0); B) (-1,0); C) (0,-1); D) (0,1).

5. Определить эксцентриситет гиперболы $y^2-\frac{x^2}{4}-4=0$.

A) $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{5}}$; B) $\varepsilon=\sqrt{5}$; C) $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$; D) $\varepsilon=\sqrt{17}$.

6. Какая из перечисленных точек принадлежит окружности с центром в точке O(-3,2) и радиусом равным 5?

A) (-2,0); B) (0,6); C) (2,-3); D) (3,-2).

Тест 6

1. Определить вид поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 5$:

A) эллиптический параболоид; B) гиперболический цилиндр;
C) однополостный гиперболоид; D) гиперболический параболоид.

2. Указать вид кривой, полученной в пересечении гиперболического параболоида $y^2 - x^2 = z$ с плоскостью $z = 7$:

A) парабола; B) эллипс; C) прямая; D) гипербола.

3. Указать каноническое уравнение эллиптического цилиндра с осью Oy:

A) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; B) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$; C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Поверхности $x = y^2 + z^2$ и $2 - x = y^2 + z^2$ пересекаются по:

A) гиперболе; B) параболе; C) эллипсу; D) окружности.

5. Записать уравнение $9x^2 + z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$ в каноническом виде и определить вид поверхности:

A) $\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{3\sqrt{2}}\right)^2 = y + 1$ - эллиптический параболоид;

B) $\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z+3}{3\sqrt{2}}\right)^2 = y - 1$ - гиперболический параболоид;

C) $\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{3\sqrt{2}}\right)^2 = (y+1)^2$ - конус;

D) $\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{3\sqrt{2}}\right)^2 - (y+1)^2 = 1$ - однополостный гиперболоид.

6. Записать уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в сферической системе координат.

A) $r = 4$; B) $r = -4$; C) $r = 4\cos\varphi$; D) $r = 2$.

Тест 7

1. Вычислите $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\frac{3}{x}$

A) ∞, B) 0, C) 3, D) 1.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

A) -1, B) 0, C) $\dfrac{1}{2}$, D) $-\dfrac{1}{4}$.

3. Вычислите $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$

A) $-\dfrac{1}{18}$, B) 0, C) ∞, D) $-\dfrac{1}{48}$.

4. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+2x-7}{x^2\sqrt{x}+3x-8}$

A) 5, B) $\dfrac{7}{8}$, C) 0, D) ∞.

5. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3+1}-x^2}{x}$

A) -1, B) 0, C) ∞, D) -2.

6. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)\mathrm{tg}2x}{1-\cos 2x}$

A) 3, B) 6, C) 0, D) ∞.

Тест 8

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

A) $(2;+\infty)$; B) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; C) $[2;+\infty)$; D) $(-\infty;+\infty)$.

2. Определите, будет ли точка $x=2$ точкой разрыва функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-2}, & \text{если } x\neq 2\\ 4, & \text{если } x=2\end{cases}$, и если будет, то установите тип точки разрыва

A) точка непрерывности, B) точка конечного разрыва,
C) точка бесконечного разрыва, D) точка устранимого разрыва.

3. Определите, будет ли точка $x=2$ точкой разрыва функции $f(x)=\dfrac{4(x-2)}{x^2-4}$, и если будет, то установите тип точки разрыва

A) точка непрерывности, B) точка конечного разрыва,
C) точка бесконечного разрыва, D) точка устранимого разрыва.

4. Определите, будет ли точка $x=2$ точкой разрыва функции $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4(x-2)}{x^2-4}, \text{ если } x\neq 2 \text{ и } x\neq -2 \\ 1, \text{ если } x=2 \end{cases}$, и если будет, то установите тип точки разрыва

A) точка непрерывности, B) точка конечного разрыва,
C) точка бесконечного разрыва, D) точка устранимого разрыва.

5. Определите, будет ли точка $x=3$ точкой разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}$, и если будет, то установите тип точки разрыва

A) точка непрерывности, B) точка конечного разрыва,
C) точка бесконечного разрыва, D) точка устранимого разрыва.

6. Определите, будет ли точка $x=\dfrac{\pi}{2}$ точкой разрыва функции

$f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}x, \text{ åñëè } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x, \text{ åñëè } x\geq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, и если будет, то установите тип точки разрыва

A) точка непрерывности, B) точка конечного разрыва,
C) точка бесконечного разрыва, D) точка устранимого разрыва.

Тест 9

1. Производная $f'(x)$ функции $f(x)=x+3x^3$ в точке $x_0=1$ равна:

A) 9; B) 1; C) 10; D) 9.

2. Производная $f'(x)$ функции $f(x)=x^3\operatorname{tg}x$ равна:

A) $\dfrac{3x^2}{\cos^2 x}$; B) $x^3\operatorname{ctg}x+3x^2\operatorname{tg}x$; C) $3x^2\operatorname{tg}x+\dfrac{x^3}{\cos^2 x}$; D) $3x^2\operatorname{tg}x$.

3. Производная $f'(x)$ функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+5}$ равна:

A) $\dfrac{10x}{\left(x^2+5\right)^2}$; B) 1; C) $\dfrac{2x}{\left(x^2+5\right)^2}$; D) $\dfrac{2x-x^2}{\left(x^2+5\right)^2}$.

4. Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)=\sin x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ равен:

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}dx$; B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx$; C) dx; D) $\dfrac{1}{2}dx$.

5. Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $x_0=1$ равен:

A) $\frac{3}{4}dx$; B) $\frac{1}{2}dx$; C) $-\frac{1}{4}dx$; D) $\frac{3}{2}dx$.

6. Уравнение касательной к графику функции $y=\mathrm{ctg}x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{4}$ имеет вид:

A) $y=x-\frac{\pi}{4}$; B) $y=-2x+\frac{\pi}{2}+1$; C) $y=2x+1-\frac{\pi}{2}$; D) $y=-x+\frac{\pi}{2}-1$.

Тест 10

1. Производная второго порядка функции $f(x)=\frac{2}{x-4}$ равна:

A) $\frac{-2}{(x-4)^2}$; B) $\frac{4}{(x-4)^2}$; C) $\frac{4}{(x-4)^3}$;; D) $\frac{-2}{(x-4)^3}$.

2. Дифференциал второго порядка функции $f(x)=(2x+5)^3$ равен:

A) $6(2x+5)^2\,dx^2$; B) $24(2x+5)dx^2$;

C) $6(2x+5)dx^2$; D) $30(2x+5)^2\,dx$.

3. Производная $f'''(x)$ функции $f(x)=\ln(3x+1)$ равна:

A) $\frac{3}{3x+1}$; B) $\ln^3(3x+1)$; C) $\frac{\ln(3x+1)}{(3x+1)^2}$; D) $\frac{2}{x^3}$

4. Производная $f^{(n)}(x)$ функции $f(x)=3^x$ равна:

A) $3^x\ln^n 3$; B) 3^{nx}; C) $3^{nx}\ln 3$; D) $3^{nx}\ln^n 3$.

5. Уравнению $y''+4y=4x$ удовлетворяет функция:

A) $4x-e^{2x}$; B) $x+\cos 2x$; C) $x\cdot\sin 2x$; D) $4x+\sin 2x$.

6. Производная y''_{xx} функции, заданной параметрически $x=\mathrm{arctg}t,\ y=\ln(t^2+1)$, равна:

A) $\frac{2t}{t^2+1}$; B) 0; C) $\frac{2}{t^2+1}$; D) $2t^2+2$.

ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ НА ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

№ теста	№ темы	Номера вопросов/номера правильных ответов					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**1.2**	*D*	*A*	*C*	*B*	*A*	*B*
2	**1.3**	*B*	*B*	*D*	*D*	*B*	*C*
3	**2.2**	*D*	*B*	*B*	*A*	*D*	*B*
4	**3.3**	*D*	*C*	*A*	*C*	*D*	*B*
5	**3.4**	*B*	*D*	*A*	*D*	*B*	*B*
6	**3.5**	*C*	*D*	*C*	*D*	*A*	*D*
7	**4.3**	*B*	*C*	*D*	*D*	*A*	*A*
8	**4.4**	*B*	*C*	*D*	*A*	*B*	*C*
9	**4.5**	*C*	*C*	*A*	*D*	*D*	*B*
10	**4.6**	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*	*D*

4.4. Итоговый контроль

4.4.1 Вопросы для подготовки к экзамену

1. Определения определителей второго и третьего порядков. Свойства определителей. Определители n-го порядка.
2. Системы n линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Крамера. Формулы Крамера.
3. Системы линейных однородных уравнений. Необходимое и достаточное условие ненулевого решения.
4. Матрицы. Линейные операции с матрицами. Правило умножения матриц.
5. Обратная матрица. Определение и условие существования.
6. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
7. Определение вектора. Линейные операции с векторами. Ортогональные, коллинеарные и компланарные векторы. Проекция вектора на ось.
8. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Определение базиса. Разложение вектора по базису. Прямоугольная декартова система координат. Действия с векторами в координатной форме. Условие коллинеарности.
9. Скалярное произведение двух векторов, его свойства. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
10. Выражение скалярного произведения векторов через их координаты. Длина (модуль) вектора. Направляющие косинусы.
11. Векторное произведение векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл векторного произведения.
12. Выражение векторного произведения векторов через их координаты.
13. Смешанное произведение трех векторов, его свойства. Условие компланарности трех векторов.

14. Выражение смешанного произведения векторов через их координаты. Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов.
15. Общее уравнение плоскости в пространстве. Теорема: уравнение первой степени от трех переменных задает в пространстве плоскость.
16. Различные виды уравнений плоскости в пространстве, угол между плоскостями.
17. Различные виды уравнений прямой на плоскости, угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
18. Уравнение прямой в пространстве. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
19. Кривые второго порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола). Канонические уравнения кривых и изображение их на плоскости.
20. Цилиндрические поверхности. Цилиндры второго порядка.
21. Эллипсоид, конус, гиперболоиды, параболоиды. Геометрические свойства этих поверхностей. Исследование их форм методом сечений.
22. Полярные координаты на плоскости. Спираль Архимеда.
23. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Различные способы задания линий и поверхностей в пространстве.
24. Определение функции. Область определения. Значение функции в точке. Монотонная функция. Четная и нечетная функции. Обратная функция. Сложная функция. Элементарные функции.
25. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
26. Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Односторонние пределы функции в точке. Непрерывность элементарных функций.
27. Замечательные пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
28. Свойства функций, стремящихся к конечному пределу (ограниченность функции, имеющей конечный предел, теорема о сжатой функции).
29. Бесконечно малая функция, ее свойства (сумма бесконечно малых, произведение бесконечно малой на ограниченную, частное от деления бесконечно малой на функцию, предел которой не равен нулю).
30. Бесконечно большая функция, ее неограниченность. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.
31. Необходимое и достаточное условие стремления функции к конечному пределу. Теорема о единственности предела.
32. Разложение функции, имеющей конечный предел, на сумму постоянной и бесконечно малой. Предел суммы, произведения и частного функций, стремящихся к конечным пределам.
33. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Примеры эквивалентных бесконечно малых. Замена бесконечно малой на эквивалентную при вычислении пределов.

34. Непрерывность функции в точке. Необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.
35. Классификация точек разрыва функции: устранимый, конечный, бесконечный.
36. Определение производной. Примеры нахождения производной с помощью определения.
37. Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной.
38. Дифференцируемость функции в точке. Непрерывность дифференцируемой функции.
39. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.
40. Производная и дифференциал суммы, произведения и частного двух функций.
41. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Производная обратной функции.
42. Правило логарифмического дифференцирования. Его применение к нахождению производной функций $f(x)=\left(u\left(x\right)\right)^{v(x)}$.
43. Дифференцирование функции, заданных параметрически (первая и вторая производные).
44. Производные и дифференциалы высших порядков.
45. Таблица производных.

4.4.2. Типовые задачи для подготовки к экзамену

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. Найти A_{32}

2. Решить систему по формулам Крамера $\begin{cases} 3x-6y+z=21 \\ x+5y+3z=0 \\ 2x-y+4z=11 \end{cases}$

3. Найти все решения системы

$$a)\begin{cases} x+6y-10z=0 \\ 2x-3y+6z=0 \\ 3x+2y-4z=0 \end{cases} \quad б)\begin{cases} x-7y+z=0 \\ 2x-5y+z=0 \end{cases}$$

4. Найти единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}=(3,6,-1)$.

5. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(3,6,-1)$.

6. При каких m и n векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{b} = n\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

7. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b} = (3, -1, -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = -22$.

8. Найти площадь треугольника ABC, если $A(-1,3,4)$, $B(1,0,1)$ и $C(-1,2,0)$.

9. Найти единичный вектор, ортогональный двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

10. При каком m точки A(m, 2, 3), B(-1, 0, 4), C(1, -1, 0), D(0, 3, 4) лежат в одной плоскости?

11. Определить, правую или левую тройку составляют векторы
$\vec{a} = \vec{i}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

12. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если $A(-1,0,2)$, $B(3,4,-1)$, $C(-1,2,0)$, $D(2,-3,2)$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ перпендикулярно прямой, проведенной через точки $M_2(3,-1,3)$ и $M_3(2,1,3)$.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,3,4)$, $M_2(3,-4,7)$, $M_3(-1,3,4)$.

15. Имеются ли среди плоскостей $x - 4y + 3z + 1 = 0$; $3y - 5z + 3 = 0$; $2x - 8y + 5z + 5 = 0$ параллельные или перпендикулярные?

16. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2,0,-4)$ и
а) параллельной вектору $\vec{s} = (3, -1, 0)$,
б) параллельной оси Ox,
в) перпендикулярной плоскости $3x - y + 5 = 0$.

18. Привести к каноническим уравнениям уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 9y + 3z - 42 = 0 \\ 7x - 3y + 6z - 9 = 0. \end{cases}$$

19. Провести прямую через две точки $M_1(1,-1,3)$ и $M_2(4,-1,5)$.

20. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-8}{1} = \frac{y+1}{2} = z$ и плоскости $x + 2y + 5z - 3 = 0$.

21. Даны декартовы координаты точки $M\left(1, \sqrt{3}\right)$. Найти полярные координаты.

22. Даны полярные координаты точек $M_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ и $M_2\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$. Найти декартовы координаты.

23. Выполнить действия $A+C$ для матриц $\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

24. Выполнить действия $a)\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ $\acute{a})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

25. Найти обратную матрицу для каждой из матриц а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

26. а) Записать в матричной форме систему уравнений и решить ее с помощью обратной матрицы $\begin{cases}3x-6y+z=15\\ x+5y+3z=-9\\ 2x-y+4z=4\end{cases}$.

б) Решить систему по формулам Крамера.

27. Показать, что векторы $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(4,-1,-2)$ образуют базис в декартовой прямоугольной системе координат. Найти координаты вектора $\vec{d}(-1,5,-2)$ в этом базисе.

28. Определить, какие геометрические образы определяют уравнения (в пространстве)

$$а)x^2=16y;\quad б)\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1;\quad в)\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{49}=1;\quad г)9z^2-3x^2-5y^2=0;$$

$$д)4x^2+4y^2+4z^2-8x+23y-242z-487=0;$$

$$е)x^2+y^2-12x-2y+4+91=0;\quad ж)x^2-2y^2+z^2=0.$$

29. Изобразить тело, заданное системой неравенств

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le 4\\ z\ge x^2+y^2\end{cases}.$$

30. Проверить для функций x^3-x, $e^{1/x}$, $\left(e^x+e^{-x}\right)\cos x$: четные они, нечетные или общего вида.

31. Указать область определения функций

$a) y=\sqrt{x+3};\quad б) y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}};\quad в) y=\arcsin(x-2);\quad г) y=\dfrac{3}{4-x}+\lg(x+1).$

32. Дана функция $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$. Вычислить $f(0)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

33. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

$a)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x+1)}{x^2+1};\qquad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1};\qquad в)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right);$

$г)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20};\quad д)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$

$е)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2};\qquad ж)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{2x+1}.$

34. Сравнить бесконечно малые а) $\arcsin(1-2x)$ и $4x^2-1$ при $x\to\dfrac{1}{2}$ и б) $\sin\dfrac{x}{2}$ и x^2 при $x\to 0$.

35. Применить эквивалентные бесконечно малые при нахождении пределов

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x};\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin x}.$

36.Найти точки разрыва функции, если они имеются, и указать типы разрыва у функций

а) $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$; б) $y=5^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y=\begin{cases}1-x & \text{ï ðè} \quad x\le 0\\ 1 & \text{ï ðè} \quad 0<x\le 2\\ (x-3)^2+4 & \text{ï ðè} \quad x>2\end{cases}.$

37. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ для функций:

а) $\sin\sqrt{1-2^{3x}}$; б) $y=\mathrm{tg}2x\cdot\sin(1-x)$; в) $y=\cos^3 4x+\sqrt{x^2+1}$;

г) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$; д) $y=\dfrac{\cos 2x}{x^4+1}$.

38. Найти y', если а) $y=x^{\mathrm{tg}x}$; б) $y=\left(x^3+1\right)x^{\sqrt{x^2+1}}$.

39. $y=\cos^4(5x+2)$. Найти $y''(0)$.

40. $\begin{cases} y = \sin t - t\cos t \\ x = \cos t - t\sin t \end{cases}$. Найти y''_{xx}.

41. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ и вычислить его в точке $x = 4$.

42. Написать уравнения касательной и нормали к кривой а) $y = x^2$ в точке $x = 3$; б) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ в точке $t = 0$.

Содержание

1.	**Информация о дисциплине**	**3**
1.1.	Предисловие	3
1.2.	Содержание дисциплины и виды учебной работы	4
2.	**Рабочие учебные материалы**	**5**
2.1.	Рабочая программа	5
2.2.	Тематический план дисциплины	9
2.3.	Структурно-логическая схема дисциплины	14
2.4.	Временной график изучения дисциплины	15
2.5.	Практический блок	15
2.6.	Балльно-рейтинговая система оценки знаний	16
3.	**Информационные ресурсы дисциплины**	**17**
3.1.	Библиографический список	17
3.2.	Опорный конспект лекций по дисциплине	18
	1. Основы линейной алгебры	18
	1.1. Основные понятия линейной алгебры	18
	1.2. Решение систем линейных уравнений	33
	1.3. Матрицы и их применение к решению систем линейных уравнений	46
	1.4. Основы общей алгебры	60
	2. Основы векторной алгебры	61
	2.1. Основные понятия и определения	61
	2.2. Перемножение векторов	68
	3. Аналитическая геометрия	77
	3.1. Системы координат	77
	3.2. Уравнения прямой на плоскости	83
	3.3. Уравнения плоскости и прямой в пространстве	89
	3.4. Кривые второго порядка	97
	3.5. Поверхности второго порядка	104
	3.6. Линейное векторное и евклидово пространства. Квадратичные формы	114
	4. Введение в математический анализ	116
	4.1. Функция	116
	4.2. Предел последовательности. Предел функции	124
	4.3. Способы вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых функций	136
	4.4. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции, их классификация	147
	4.5. Понятие производной функции Дифференцируемость функции. Правила нахождения производной и дифференциала	155
	4.6. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы	

	высших порядков	163
3.3.	Учебное пособие	169
3.4.	Глоссарий	170
3.5.	Технические и программные средства обеспечения дисциплины	181
3.6.	Методические указания к проведению практических занятий	181
4.	**Блок контроля освоения дисциплины**	**181**
4.1.	Методические указания к выполнению контрольных работ	181
	4.1.1. Методические указания по выполнению к.р.№1	182
	4.1.2. Методические указания по выполнению к.р.№2	192
4.2.	Задания на контрольные работы	205
4.3.	Текущий контроль (тренировочные тесты)	212
4.4.	Итоговый контроль (вопросы и типовые задачи для подготовки к экзаменам)	220