

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет»
Факультет «Математика и естественные науки»
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

А.А.Айзикович
Т.С.Быкова

СБОРНИК ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
по алгебре и геометрии
(линии и поверхности первого порядка)

Ижевск 2011

УДК 514.12 (075.8)
А 37

Рецензент: А.Л. Тептин, канд. физ.-мат. наук, профессор

Айзикович А.А., Быкова Т.С. Сборник типовых расчетов по алгебре и геометрии (линии и поверхности первого порядка). — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2011. — с.

Сборник содержит типовые задания по основным разделам дисциплин «Алгебра и аналитическая геометрия» и «Дифференциальная геометрия». В их полном объеме типовые расчеты предназначены для студентов первого и второго курсов, обучающихся по специальности 230401 — прикладная математика. Отдельные части расчетов будут также полезны студентам любых инженерно-технических специальностей.

Типовые расчеты могут быть использованы преподавателями математики как для организации самостоятельной работы студентов, так и для проведения контрольных мероприятий (контрольных и самостоятельных работ, коллоквиумов, зачетов, экзаменов, проверки остаточных знаний и т.п.) по аналитической геометрии, линейной алгебре, общей алгебре и дифференциальной геометрии.

Настоящий выпуск содержит задачи по аналитической геометрии (раздел «Линии и поверхности первого порядка») и включает такие темы ...

© А.А.Айзикович, Т.С.Быкова, 2011
© Ижевский государственный
технический университет, 2011

Оглавление

Аналитическая геометрия	4
Линии и поверхности первого порядка	4
Теоретические вопросы	4
Расчетные задания	5
Рекомендуемая литература	17
Использованная литература	18

Аналитическая геометрия

Типовой расчет

«Линии и поверхности первого порядка»

Теоретические вопросы

1. Алгебраические линии и поверхности первого порядка.
2. Параметрические уравнения прямой и плоскости.
3. Каноническое уравнение прямой, уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.
4. Векторные уравнения плоскости и прямой (нормальные уравнения плоскости и прямой на плоскости, смысл коэффициентов уравнения, векторное уравнение прямой в пространстве).
5. Признаки параллельности плоскостей и прямых на плоскости. Параллельность прямых в пространстве. Признаки параллельности прямой и плоскости.
6. Общее уравнение прямой в пространстве, сведение его к каноническому уравнению.
7. Уравнения плоскости и прямой на плоскости в «отрезках». Неполные уравнения плоскости и прямой.
8. Полупространства и полуплоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой в плоскости. Отклонение точки от плоскости и от прямой на плоскости.
9. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

10. Вычисление углов между плоскостями, между прямыми и между прямой и плоскостью.

11. Задачи на построение: перпендикуляр из точки на плоскость, проекция точки на плоскость, перпендикуляр из точки на прямую.

12. Задачи на построение: проекция прямой на плоскость, общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

Расчетные задания

Задача 1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Составить уравнения:

- а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ;
- в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

- е) угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
- ж) угол между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

- | | | | | |
|-----|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 1. | $A_1(1, 8, 2),$ | $A_2(5, 2, 6),$ | $A_3(5, 7, 4),$ | $A_4(4, 10, 9).$ |
| 2. | $A_1(6, 6, 5),$ | $A_2(4, 9, 5),$ | $A_3(4, 6, 11),$ | $A_4(6, 9, 3).$ |
| 3. | $A_1(7, 7, 2),$ | $A_2(-5, 7, -7),$ | $A_3(5, -3, 1),$ | $A_4(2, 3, 7).$ |
| 4. | $A_1(8, -6, 4),$ | $A_2(10, 5, -5),$ | $A_3(5, 6, -8),$ | $A_4(8, 10, 7).$ |
| 5. | $A_1(1, -1, 3),$ | $A_2(6, 5, 8),$ | $A_3(3, 5, 8),$ | $A_4(8, 4, 1).$ |
| 6. | $A_1(1, -2, 7),$ | $A_2(4, 2, 10),$ | $A_3(2, 3, 5),$ | $A_4(5, 3, 7).$ |
| 7. | $A_1(4, 2, 10),$ | $A_2(1, 2, 0),$ | $A_3(3, 5, 7),$ | $A_4(2, -3, 5).$ |
| 8. | $A_1(2, 3, 5),$ | $A_2(5, 3, -7),$ | $A_3(1, 2, 7),$ | $A_4(4, 2, 0).$ |
| 9. | $A_1(5, 3, 7),$ | $A_2(-2, 3, 5),$ | $A_3(4, 2, 10),$ | $A_4(1, 2, 7).$ |
| 10. | $A_1(4, 3, 5),$ | $A_2(1, 9, 7),$ | $A_3(0, 2, 0),$ | $A_4(5, 3, 10).$ |
| 11. | $A_1(3, 2, 7),$ | $A_2(4, 0, 6),$ | $A_3(2, 6, 5),$ | $A_4(6, 4, -1).$ |
| 12. | $A_1(2, 1, 6),$ | $A_2(1, 4, 9),$ | $A_3(2, -5, 8),$ | $A_4(5, 4, 2).$ |
| 13. | $A_1(2, 1, 7),$ | $A_2(3, 3, 6),$ | $A_3(2, -3, 9),$ | $A_4(1, 2, 5).$ |
| 14. | $A_1(2, -1, 7),$ | $A_2(6, 3, 1),$ | $A_3(3, 2, 8),$ | $A_4(2, -3, 7).$ |
| 15. | $A_1(0, 4, 5),$ | $A_2(3, -2, 1),$ | $A_3(4, 5, 6),$ | $A_4(3, 3, 2).$ |
| 16. | $A_1(3, 1, 4),$ | $A_2(-1, 6, 1),$ | $A_3(-1, 1, 6),$ | $A_4(0, -4, 1).$ |

- | | | | | |
|-----|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| 17. | $A_1(3, -1, 2),$ | $A_2(-1, 0, 1),$ | $A_3(1, 7, 3),$ | $A_4(8, 5, 8).$ |
| 18. | $A_1(3, 5, 4),$ | $A_2(5, 8, 3),$ | $A_3(1, 2, -2),$ | $A_4(-1, 0, 2).$ |
| 19. | $A_1(2, 4, 3),$ | $A_2(1, 1, 5),$ | $A_3(4, 9, 3),$ | $A_4(3, 6, 7).$ |
| 20. | $A_1(9, 5, 5),$ | $A_2(-3, 7, 1),$ | $A_3(5, 7, 8),$ | $A_4(6, 9, 2).$ |
| 21. | $A_1(0, 7, 1),$ | $A_2(2, -1, 5),$ | $A_3(1, 6, 3),$ | $A_4(3, -9, 8).$ |
| 22. | $A_1(5, 5, 4),$ | $A_2(1, -1, 4),$ | $A_3(3, 5, 1),$ | $A_4(5, 8, -1).$ |
| 23. | $A_1(6, 1, 1),$ | $A_2(4, 6, 6),$ | $A_3(4, 2, 0),$ | $A_4(1, 2, 6).$ |
| 24. | $A_1(7, 5, 3),$ | $A_2(9, 4, 4),$ | $A_3(4, 5, 7),$ | $A_4(7, 9, 6).$ |
| 25. | $A_1(6, 8, 2),$ | $A_2(5, 4, 7),$ | $A_3(2, 4, 7),$ | $A_4(7, 3, 7).$ |
| 26. | $A_1(4, 2, 5),$ | $A_2(0, 7, 1),$ | $A_3(0, 2, 7),$ | $A_4(1, 5, 0).$ |
| 27. | $A_1(4, 4, 10),$ | $A_2(7, 10, 2),$ | $A_3(2, 8, 4),$ | $A_4(9, 6, 9).$ |
| 28. | $A_1(4, 6, 5),$ | $A_2(6, 9, 4),$ | $A_3(2, 10, 10),$ | $A_4(7, 5, 9).$ |
| 29. | $A_1(3, 5, 4),$ | $A_2(8, 7, 4),$ | $A_3(5, 10, 4),$ | $A_4(4, 7, 8).$ |
| 30. | $A_1(10, 9, 6),$ | $A_2(2, 8, 2),$ | $A_3(9, 8, 9),$ | $A_4(7, 10, 3).$ |

Задача 2. Написать каноническое уравнение прямой.

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$ |
| 7. $\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} x + 5y - z + 11 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$ |
| 11. $\begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - 5y - z + 5 = 0. \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ x + 3y + 2z + 14 = 0. \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - 4y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$ |

$$\begin{array}{ll}
15. \begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases} & 16. \begin{cases} 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0. \end{cases} \\
17. \begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases} & 18. \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases} \\
19. \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases} & 20. \begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases} \\
21. \begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases} & 22. \begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases} \\
23. \begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases} & 24. \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases} & 26. \begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases} \\
27. \begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases} & 28. \begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases} \\
29. \begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases} & 30. \begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

Задача 3. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой.

$$\begin{array}{l}
1. M(1, -4, -1), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+4,5}{-1} = \frac{z}{1}. \\
2. M(4, -2, 3), \quad \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}. \\
3. M(2, -1, 2), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}. \\
4. M(1, 1, 4), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}. \\
5. M(3, 2, -1), \quad \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.
\end{array}$$

6. $M(2, 0, 1), \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$
7. $M(-1, -3, 1), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$
8. $M(-2, 0, 0), \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$
9. $M(2, 1, 2), \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$
10. $M(8, 1, -1), \frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$
11. $M(2, 3, 4), \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$
12. $M(4, 1, 10), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$
13. $M(1, -2, -3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$
14. $M(-1, 0, 3), \frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$
15. $M(0, -4, -1), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$
16. $M(0, -3, -2), \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$
17. $M(2, -1, 1), \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$
18. $M(1, 1, 1), \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$
19. $M(1, 2, 3), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$
20. $M(1, 0, -1), \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$
21. $M(2, 1, 0), \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$
22. $M(-2, -3, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$
23. $M(-1, 0, -1), \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$
24. $M(0, 2, 1), \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$

25. $M(3, -3, -1), \frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$
26. $M(3, 3, 3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$
27. $M(-1, 2, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$
28. $M(2, -2, -3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$
29. $M(-1, 0, 1), \frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$
30. $M(0, -3, -2), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$

Задача 4. Найти точку M' , симметричную точке M относительно плоскости.

1. $M(-1, -3, -1), 4x + 6y + 4z - 25 = 0.$
2. $M(0, 3, -2), 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$
3. $M(1, 4, 1), 2x + 4y - 3 = 0.$
4. $M(2, 2, 1), y + z + 2 = 0.$
5. $M(3, -3, -1), 4x - 5y - z - 7 = 0.$
6. $M(3, -2, 3), x - y + 2z - 2 = 0.$
7. $M(2, 5, 4), x + 4y + 3z + 5 = 0.$
8. $M(2, 7, 8), 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$
9. $M(-1, -8, -7), 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$
10. $M(1, -1, -3), 2y + 4z - 1 = 0.$
11. $M(1, 1, 3), 2x - 4y - 4z - 13 = 0.$
12. $M(-1, 2, 0), x + 5y + 4 = 0.$
13. $M(2, -1, -2), y + z + 2 = 0.$
14. $M(0, 2, 1), 2x + 4y - 3 = 0.$
15. $M(-5, -3, -5), 8x + 6y + 8z - 25 = 0.$
16. $M(1, 0, 1), 4x + 6y + 4z - 25 = 0.$
17. $M(-1, 0, -1), 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$
18. $M(0, 2, 1), 2x + 4y - 3 = 0.$
19. $M(2, 1, 0), y + z + 2 = 0.$
20. $M(-1, 2, 0), 4x - 5y - z - 7 = 0.$
21. $M(2, -1, 1), x - y + 2z - 2 = 0.$
22. $M(1, 1, 1), x + 4y + 3z + 5 = 0.$
23. $M(1, 2, 3), 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$

24. $M(0, -3, -2)$, $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.

25. $M(1, 0, -1)$, $2y + 4z - 1 = 0$.

26. $M(3, -3, -1)$, $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.

27. $M(-2, -3, 0)$, $x + 5y + 4 = 0$.

28. $M(2, -2, -3)$, $y + z + 2 = 0$.

29. $M(-1, 0, 1)$, $2x + 4y - 3 = 0$.

30. $M(3, 3, 3)$, $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

Задача 5. Решить следующие задачи.

1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2, -3, 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2 , если $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$.

3. Показать что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

4. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -4, 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz .

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3, -5, 2)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz .

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

8. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость

$$x - 2y - z - 15 = 0.$$

9. Определить, при каком значении B плоскости $x - 4 + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

10. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины

11. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $a = (4, 4, 3)$.

15. Определить, при каком значении C плоскости

$$3x - 5y + Cz - 3 = 0 \text{ и } x - 3y + 2z + 5 = 0$$

будут перпендикулярны.

16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$.

18. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0, 5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy .

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy .

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

23. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$.

25. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(-6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz – отрезок $c = 2$.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $a = (4, 1, -1)$ и $b = (2, -1, 2)$.

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 0)$, $B(2, -1, -1)$ перпендикулярно к плоскости

$$5x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $a = (5, -2, -1)$.

30. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору \overline{AB} , если $A(5, -2, 3)$, $B(1, -3, 5)$.

Задача 6. Решить следующие задачи.

1. При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

2. Показать что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3, 1, -2)$.

4. Показать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и

$$\begin{cases} 3x + y + 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y + 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярны.

5. При каком значении D прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oz ?

6. При каком значении p прямые

$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = pt - 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

параллельны?

7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz .

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$.

10. При каких значениях B и D прямая $x - 2y + z - 9 = 0$, $3x + By + z + D = 0$ лежит в плоскости Oxy ?

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\bar{a} = (-1, -3, 1)$ и $\bar{b} = (4, 1, 6)$.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox .

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

14. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и $x = 3t + 1$, $y = -t - 5$, $z = 2t + 3$

15. Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

16. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ и

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0, \\ x + 6z - 6 = 0. \end{cases}$$

17. Доказать что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -3, -3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° и 120° .

19. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{=}\frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна

прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

20. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 1, -4)$, $C(0, 2, 3)$, проведенной из вершины C .

21. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

23. Найти проекцию точки $P(3, 1, -1)$ на плоскость

$$x + 2y + 3z - 30 = 0.$$

24. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны?

25. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

26. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

27. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$.

28. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0, 0, 2)$, $B(4, 2, 5)$, $C(12, 6, 11)$.

29. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -3, 4)$ перпендикулярно к прямым

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}.$$

Задача 7. Даны вершины треугольника ABC : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CH ;
- в) уравнение медианы AM ;
- г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- е) расстояние от точки C до прямой AB .

1. $A(6, -9)$, $B(10, -1)$, $C(-4, 1)$,
2. $A(4, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(7, -3)$,
3. $A(-4, 2)$, $B(6, -4)$, $C(4, 10)$,
4. $A(3, -1)$, $B(6, -4)$, $C(4, 10)$,
5. $A(-7, -2)$, $B(-7, 4)$, $C(5, -5)$,
6. $A(-1, -4)$, $B(9, 6)$, $C(-5, 4)$,
7. $A(10, -2)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 1)$,
8. $A(-3, -1)$, $B(-4, -5)$, $C(8, 1)$,
9. $A(-2, -6)$, $B(-3, 5)$, $C(4, 0)$,
10. $A(-7, -2)$, $B(3, -8)$, $C(-4, 6)$,
11. $A(0, 2)$, $B(-7, -4)$, $C(3, 2)$,
12. $A(7, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-8, -4)$,
13. $A(-5, 1)$, $B(8, -2)$, $C(1, 4)$,
14. $A(2, 5)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 4)$,
15. $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$,
16. $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$,
17. $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(1, -3)$,
18. $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$,
19. $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$,
20. $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$, $C(6, 1)$,
21. $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$,
22. $A(4, -3)$, $B(7, 3)$, $C(1, 10)$,
23. $A(4, -4)$, $B(8, 2)$, $C(3, 8)$,
24. $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$,
25. $A(1, -6)$, $B(3, 4)$, $C(-3, 3)$,
26. $A(-4, 2)$, $B(8, -6)$, $C(2, 6)$,
27. $A(-5, 2)$, $B(0, -4)$, $C(5, 7)$,
28. $A(4, -4)$, $B(6, 2)$, $C(-1, 8)$,
29. $A(-3, 8)$, $B(-6, 2)$, $C(0, -5)$,

Задача 8. Решить следующие задачи.

1. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC , зная уравнения его сторон AB : $2x - y - 3 = 0$, AC : $x + 5y - 7 = 0$, BC : $3x - 2y + 13 = 0$.

2. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C .

3. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

4. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данно прямой с осями координат.

5. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.

6. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC , если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$.

7. Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox ; в) параллельную оси Oy .

8. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 90° , в) 0° .

9. Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6, -6)$ и $B(-3, -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3?

10. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4, -3)$ и $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.

11. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали.

12. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$, $C(5, -3)$.

13. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.

14. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AC и BC треугольника.

15. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$,

$x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон.

16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

17. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$.

18. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C .

19. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.

20. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$.

21. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

22. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC , если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN , если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$.

24. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

25. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

26. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую параллельную оси абсцисс.

27. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC : $4x + y = 12$, его высот BH : $5x - 4y = 12$ и AM : $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC .

28. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH .

29. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$.

30. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которых служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.

Рекомендуемая литература

- [1] *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1984. — 192 с.
- [2] *Виноградов И.М.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1986. — 176 с.
- [3] *Волков В.А.* Аналитическая геометрия и векторная алгебра. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1986. — 192 с.
- [4] *Дубротин Д.А.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1977. — 120 с.
- [5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1988. — 224 с.
- [6] *Рублев А.Н.* Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1972. — 224 с.
- [7] *Солодовников А.С., Торопова Г.А.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1987. — 254 с.

Использованная литература

- [1] *Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейман В.Б.* Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии, — Минск, Вышэйшая школа, 1990. — 288 с.
- [2] *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987. — 496 с.
- [3] *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1969. — 256 с.
- [4] *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — 2-е изд., доп. — М.: Высшая школа, 1994. — 206 с.
- [5] *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.
- [6] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384 с.
- [7] *Сборник* задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
- [8] *Сборник* индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч.1. / Под общ. ред. А.П.Рябушко. — Минск, Вышэйшая школа, 1990. — 270 с.

Учебное издание

*Александр Аркадьевич Айзикович
Татьяна Сергеевна Быкова*

**Сборник типовых расчетов
по алгебре и геометрии
(линии второго порядка)**

В авторской редакции

Компьютерная верстка *А.А.Айзикович, Т.С.Быкова*
Корректор *И.О.Фамилия*

Оригинал-макет подготовлен с помощью издательской системы
 $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$ (\MiKTeX) на оборудовании кафедры ПМИ ИжГТУ

Издательство ИжГТУ. Лицензия ЛР №020885 от 24.05.99.
Подписано в печать 00.00.2002. Бумага офсетная. Формат 60х84/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 00,00. Уч.-изд.л. 00,00.
Тираж 100 экз. Заказ №000.

Типография Издательства ИжГТУ.
Лицензия РФ ПД №00525 от 28.04.2000.
426069, г.Ижевск, ул.Студенческая,7.