Теория вероятностей и математическая статистика

1. Комбинаторика

Пусть имеется несколько множеств элементов:

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_t\}, \quad \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s\}, \quad \ldots \quad, \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k\}, \ldots .$$

Вопрос: сколькими способами можно составить новое множество $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots\}$, взяв из каждого исходного множества по одному элементу? Ответ на этот вопрос даёт

Основной комбинаторный принцип: *Если некоторый первый выбор можно сделать* $\boldsymbol{t}$ *способами, для каждого первого выбора некоторый второй можно сделать* $\boldsymbol{s}$ *способами, для каждой пары первых двух - третий выбор можно сделать* $\boldsymbol{k}$ *способами и т. д., то число способов для последовательности таких выборов равно*
$\boldsymbol{t \cdot s \cdot k \cdot \ldots}$.

Комбинаторные формулы в прикладных задачах теории вероятностей обычно связывают с выбором $\boldsymbol{r}$ элементов ("*выборкой объема* $\boldsymbol{r}$ ") из совокупности, состоящей из $\boldsymbol{n}$ элементов (элементов "*генеральной совокупности*"). Различают два способа выбора:

а) *повторный выбор*, при котором выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность и может быть выбран вновь;

б) *бесповторный выбор*, при котором выбранный элемент в совокупность не возвращается и выборка не содержит повторяющихся элементов.

При повторном выборе выборку объема $\boldsymbol{r}$ можно сделать $\boldsymbol{n^r}$ способами. Например, повторную выборку объема 2 из трех элементов $\{a,в,c\}$ можно сделать $3^2 = 9$ способами: *аа, ав, ва, вв, вс, св, ас, са, сс.*

При бесповторном выборе выборку объема r можно сделать $A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot \ldots \cdot(n-r+1)$ способами. Число A_n^r называют *числом размещений* из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{r}$. Размещения отличаются либо <u>составом</u> элементов, либо <u>порядком</u> их расположения. Например, размещений из трех элементов $\{a,в,c\}$ по два можно составить $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$: *ав, ва, ас, са, вс, св.*

Выборки объема $\boldsymbol{r}$, которые отличаются друг от друга только составом, можно сделать $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ способами. Число C_n^r называют *числом сочетаний* из $\boldsymbol{n}$ элементов по r. Например, сочетаний из трех элементов $\{a,в,c\}$ по два существует $C_3^2 = 3$: *ав, ас, вс.*

При повторном выборе из $\boldsymbol{n}$ элементов число выборок объема $\boldsymbol{r}$, которые отличаются только составом равно C_{n+r-1}^r. Еще раз подчеркнем, что речь идет о выборках, которые отличаются хотя бы одним элементом, а порядок выбора этих элементов во внимание не принимается. Число таких выборок можно подсчитать следующим образом. Между элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ поставим разграничительные знаки, например, нули: $a_1\ 0\ a_2\ 0\ \ldots\ 0\ a_n$. Таких знаков (нулей) понадобится $n-1$.На месте каждого элемента поставим столько единиц, сколько раз предполагается выбрать этот элемент. Например, комбинация 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 … 0 1 1 означает, что элемент a_1 выбран четыре раза, элемент a_2 выбран один раз, элемент a_3 не выбран, ... , элемент a_n выбран два раза. Заметим, что в такой записи число единиц равно объему выборки r. Для перебора всех возможных комбинаций нужно из $r + n - 1$ мест выбрать $n-1$ место и поставить на них нули, а на остальных местах разместить единицы. Это можно сделать

$$C_{n+r-1}^{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\ r!} = C_{n+r-1}^{r} \qquad \textbf{(1)}$$

способами.

Число *перестановок* из $\boldsymbol{n}$ элементов равно $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Совокупность из $\boldsymbol{n}$ элементов *разделить* на $\boldsymbol{m}$ групп по $k_1, k_2, \ldots k_m$ элементов соответственно $(k_1+ k_2 + \ldots +k_m = n)$

можно $\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ способами.

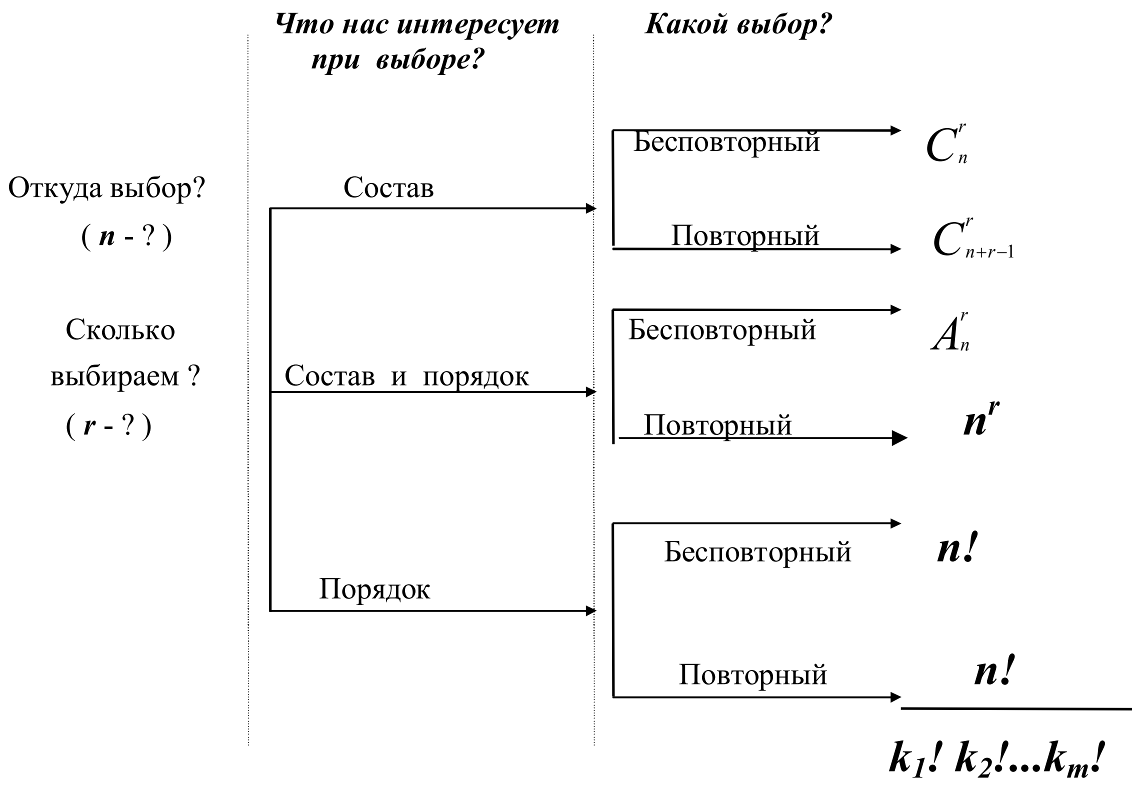
Порядок элементов внутри каждой из этих m групп не имеет значения.

Пусть $A_1, A_2, \ldots , A_k$ - множества, число элементов в каждом из которых равно соответственно $n_1, n_2, n_3, \ldots , n_k$. Составить множество B из $\boldsymbol{m_1}$ элементов множества A_1, $\boldsymbol{m_2}$ элементов множества $A_2, \ldots$, $\boldsymbol{m_k}$ элементов множества A_k, можно, согласно основному комбинаторному принципу,

$$C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot \ \cdots \ \cdot C_{n_k}^{m_k}$$

способами.

Для безошибочного выбора комбинаторной формулы достаточно последовательно ответить на вопросы в следующей схеме:



Пример 1(к задаче 1). Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат $O(0,0)$ в точку $B(6;4)$, если каждый шаг равен 1, но его можно совершать только вправо или вверх? Сколько таких путей проходит через точку $A(2;3)$?

◁ Весь путь занимает 10 шагов (4 вверх и 6 вправо). Для планирования пути следует решить, какие именно по счету 4 шага следует сделать вверх, а остальные шесть - вправо. Выбор бесповторный и нас интересует только состав выбора. Поэтому в описанных условиях всего путей из точки O в точку B будет $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!\,6!} = 210$.

Рассуждая подобным образом легко видеть, что путей из точки O в точку A существует $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$, а путь из точки A в точку B можно выбрать $C_5^1 = 5$ способами. По комбинаторному принципу всего путей через точку A существует $10 \cdot 5 = 50$. ▷

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат $O(0,0)$ в точку $B(\boldsymbol{n_1}; \boldsymbol{n_2})$, если каждый шаг равен 1, но его можно совершать только вправо или вверх? Сколько таких путей проходит через точку $A(k_1; k_2)$? (См. пример 1 и исходные данные.)

Пример 2 (к задаче 2). Сколькими способами можно $\boldsymbol{n}$ одинаковых предметов распределить между $\boldsymbol{k}$ лицами так, чтобы каждый получил не менее одного предмета?

◁ Поставим эти предметы в ряд. Между ними будет $\boldsymbol{n}-1$ промежуток. В любые $\boldsymbol{k}-1$ из этих промежутков поставим разделяющие перегородки. Тогда все предметы разделятся на $\boldsymbol{k}$ непустых частей. Первую часть передадит первому лицу, вторую – второму и т.д. Выбрать же $\boldsymbol{k}-1$ промежуток из $\boldsymbol{n}-1$ промежутка можно C_{n-1}^{k-1} способами. Заметим, что вообще $\boldsymbol{n}$ предметов распреденлить между $\boldsymbol{k}$ лицами можно $\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}}$ способами. ▷

Задача 2. Сколькими способами можно поставить $\boldsymbol{n}$ книг на $\boldsymbol{k}$ полок (на каждую полку могут поместиться все $\boldsymbol{n}$ книг и $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{k}$)? Сколькими способами можно поставить книги так, чтобы ни одна полка не осталась пустой? (См. пример 2 и исходные данные.)

Пример 3 (к задаче 3). Сколькими способами можно распределить 6 яблок, 8 груш и 10 слив между тремя детьми? Сколькими способами это можно сделать так, чтобы каждый ребенок получил по меньшей мере одно яблоко, одну сливу и одну грушу?

◁ Яблоки в соответствии с формулой (1) можно распределить $C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2 = 28$ способами, груши - $C_{10}^2 = 45$, а сливы $C_{12}^2 = 66$ способами. По комбинаторному принципу всего способов 28· 45· 66 = 83 160. Если необходимо, чтобы каждый ребенок получил по меньшей мере одно яблоко, одну грушу и одну сливу, то в соответствии с формулой предыдушего примера имеем $C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_9^2 = 10 \cdot 21 \cdot 36 = 7\,560$ способов. ▷

Задача 3. Имеется $\boldsymbol{n_1}$ красных, $\boldsymbol{n_2}$ синих, $\boldsymbol{n_3}$ белых и $\boldsymbol{n_4}$ черных шаров. Сколькими способами эти шары можно разложить в $\boldsymbol{k}$ ящиков? Сколькими способами это можно сделать, если в каждом ящике должны присутствовать шары всех цветов? (см. пример 3 и исходные данные)

Задача 4. В задаче 3 шары каждого цвета занумерованы. Сколькими способами можно выбрать по одному шару каждого цвета? Сколькими способами это можно сделать так, чтобы не было шаров с одинаковыми номерами? (См. исходные данные к задаче 3.).

Задача 5. Сколько чисел в первом миллионе содержат цифры Вашего варианта?

2. Классическое определение вероятности:

Классическое определение вероятности: Если исходы опыта *равновозможны,* то вероятностью события $\boldsymbol{A}$ называется отношение числа исходов, *благоприятствующих* данному событию к числу всех возможных исходов опыта, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $\boldsymbol{m}$ - число исходов опыта, благоприятствующих событию, а $\boldsymbol{n}$ – число всех возможных исходов.

Свойства вероятностей:

1. Вероятность любого события – есть число, заключенное между нулем и единицей, т.е. $0 \le \boldsymbol{P(A)} \le 1$. Вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1.

2. Если события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *несовместны*, то $\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B)}$.

3. Вероятность любого события A в сумме с вероятностью противоположного события $\overline{A}$ равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Если вероятность интересующего нас события A по каким - либо причинам вычислить трудно, то можно попытаться вычислить вероятность противоположного события, а затем с помощью свойства 3 вычислить искомую вероятность события A .

Пример 4 (к задачам 6 и 7). Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A - на обеих костях выпало одинаковое число очков;

B – сумма числа очков не меньше 11;

C - число очков на первой кости больше, чем на второй;

D - сумма очков четная;

E - сумма числа очков больше трех.

◁Число очков, благоприятствующих каждому из названных событий, легко подсчитать, если все возможные исходы опыта перечислить в виде таблицы.
В каждой клетке табл.1 первая цифра указывает число очков на первой кости, вторая - на второй кости.

Таблица 1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Если кости симметричны и однородны, то все перечисленные исходы опыта равновозможны. Тогда $P(A) = 6/36 = 1/6$ (благоприятствуют исходы: 11,22,33,44,55,66), $P(B) = 3/36 = 1/12$ (благоприятствуют три исхода: 56, 65, 66) Непосредственный подсчет числа благоприятствующих исходов дает $P(C) = 15/36 = 5/12$, $P(D) = 18/36 = 1/2$, $P(E) = 33/36 = 11/12$. ▷

Задача 6. Брошены две игральные кости.
Для вариантов 1 – 10 найти вероятности следующих событий:

A - сумма числа очков не превосходит N;

B - произведение числа очков превосходит N;

C - произведение числа очков делится на N.

(N – равно последней цифре номера варианта плюс 2).

Для вариантов 11 – 20 найти вероятности следующих событий:

A - сумма числа очков не меньше N;

B - произведение числа очков меньше N;

C - сумма числа очков делится на N;

(N – равно последней цифре номера варианта плюс 3).

Для вариантов 21 – 30 найти вероятности следующих событий:

A - сумма числа очков равна N;

B - произведение числа очков больше N;

C - сумма числа очков делится на N;

(N – равно последней цифре номера варианта плюс 3).
Для варианта 31 найти наиболее вероятное число очков.

Задача 7. Из чисел 1, 2, 3, … , n наугад взяли одно число, затем второе. Какова вероятность того, что первое число меньше второго? Какова вероятность того, что оба числа больше n / 2? Найдите вероятность того, что будут выбраны равные числа.
Какова вероятность того, что сумма этих чисел окажется меньше n?
Какова вероятность того, что первое число окажется на 2 больше второго?
Какова вероятность того, что первое число окажется меньше 3, а второе больше (n -3)?
Решите задачу в случае бесповторного и в случае повторного выбора.
(n = номеру варианта +3). (См. пример 4.)

Пример 5 (к задаче 8)**.** В урне содержится N шаров, из них R красного цвета. Наугад выбрано n шаров. Какова вероятность того, что r из них окажутся красного цвета? Какова вероятность того, что среди выбранных хотя бы один шар будет красным?

◁ Если шары тщательно перемешаны и выбираются наугад, то равновозможен выбор любых n шаров. Поэтому применимо классическое определение вероятности. Поскольку выбор бесповторный и нас интересует только состав, то выбрать любые n шаров можно C_N^n способами. Сформировать выборку требуемого состава можно, если из R красных шаров выбрать любые r шаров (это можно сделать C_R^r способами) и к ним добавить $n - r$ любых не красных шаров (это можно сделать C_{N-R}^{n-r} способами). По комбинаторному принципу число благоприятствующих исходов равно $C_R^r \cdot C_{N-R}^{n-r}$. Искомая вероятность равна

$$P_{n,r} = \frac{C_R^r \cdot C_{N-R}^{n-r}}{C_N^n}.$$

Пусть A_i - означает наличие в выборке i красных шаров. Выбор хотя бы одного красного шара равносилен появлению хотя бы одного из несовместных событий A_1 или A_2 или … или A_n. Поэтому вероятность выбора хотя бы одного красного шара равна

$$P_{n,1} + P_{n,2} + \ldots + P_{nn} = 1 - P_{n,0} = 1 - \frac{C_{N-R}^0}{C_N^n}. \triangleright$$

Пример 6 (к задаче 8)**.** Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наугад извлекаются три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

A - среди выбранных изделий ровно два бракованных;
B - выбраны только бракованные изделия;
C - среди выбранных изделий содержится хотя бы одно бракованное.

◁ Выбрать любых три изделия из десяти можно C_{10}^3 способами. Поэтому имеем $C_{10}^3 = 120$ равновозможных исходов.

Событию *A* благоприятствуют те исходы, при которых из 7 годных изделий выбирается одно (это можно сделать $C_7^1 = 7$ способами) и из трех бракованных - 2 (это можно сделать $C_3^2 = 3$ способами). По комбинаторному принципу число благоприятствующих событию A исходов равно $C_7^1 \cdot C_3^2 = 7 \cdot 3 = 21$. Поэтому $P(A) = 21/120 = 7/40 \approx 1/6$, т.е. примерно один шанс из шести.

Событию B благоприятствует всего один исход и его вероятность $P(B) =$
$= 1/120$.

Вероятность события C проще вычислить, определив сначала вероятность события $\overline{C}$, которое состоит в том, что выбраны все годные изделия. Выбрать три годных изделия из семи можно $C_7^3 = 35$ способами. Поэтому $P(\overline{C}) = 35/120$ и
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 35/120 = 17/24 \approx 2/3$. ▹

Задача 8. Из $\boldsymbol{N}$ изделий $\boldsymbol{M}$ имеют скрытый дефект. Наугад выбрано
$\boldsymbol{n}$ изделий. Найдите вероятности следующих событий:
$\boldsymbol{A}$ - среди выбранных $\boldsymbol{m}$ изделий имеют скрытый дефект;
$\boldsymbol{B}$ – среди выбранных есть хотя бы одно изделие со скрытым дефектом;
$\boldsymbol{C}$ - среди выбранных не более двух изделий со скрытым дефектом.
(См. примеры 5 и 6 и исходные данные.)

Пример 7 (к задаче 9)**.** При раздаче тщательно перемешанных карт (в колоде 36 карт) игрок получает шесть карт. Какова вероятность того, что игрок получит два туза, два короля и две дамы любой масти?

◃ Шесть карт данному игроку можно сдать C_{36}^6 способами, так как выбор бесповторный и нас интересует только состав выбора. Выбрать два туза, два короля и две дамы можно $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 6^3 = 216$ способами. Поэтому искомая вероятность равна $P = 216 / C_{36}^6 = 9/2618 \approx 0{,}003$. ▹

Задача 9. В урне смешаны N_1 шаров белого цвета, N_2 шаров черного цвета, N_3 – синего и N_4 - красного. Наугад выбрано $\boldsymbol{n}$ шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных ровно $\boldsymbol{n_1}$ белых, $\boldsymbol{n_2}$ черных, $\boldsymbol{n_3}$ синих и $\boldsymbol{n_4}$ красных шаров ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{n_3} + \boldsymbol{n_4}$)? (См. пример 7 и исходные данные.)

Задача 10. В урне содержится $2\boldsymbol{n}$ шаров, из которых 2 черных, а остальные белые.Наугад выбирается $\boldsymbol{n}$ шаров.

Найдите вероятности следующих событий:
A – в числе выбранных оказались оба черных шара;
B – ни один из черных шаров не выбран;
C – среди выбранных шаров только один черный шар.

Найдите значения этих вероятностей при $\boldsymbol{n} \to \infty$.
($n = k + 2$, где k - номер варианта.)

Задача 11. В урне содержится $\boldsymbol{n_1}$ белых и $\boldsymbol{n_2}$ черных шаров. Из урны наугад выбирают два шара. Что вероятнее – вынуть два белых шара или вынуть один белый и один черный шар?
(См. исходные данные.)

Задача 12. В урне $\boldsymbol{m_1}$ белых, $\boldsymbol{m_2}$ синих и $\boldsymbol{m_3}$ красных шаров. Наугад выбирают
 шаров. Найдите вероятности следующих событий: A – среди выбранных только белые

шары; B – среди выбранных нет красных шаров; C – среди выбранных поровну шаров всех цветов; D - среди выбранных только один красный шар.
(См. исходные данные)

Пример 8 (к задаче 13). В течение недели *независимо* друг от друга происходят четыре события.

Найдите вероятности следующих событий:
A – все четыре события произойдут в разные дни недели;
B – все четыре события произойдут в один день;
C – все эти события произойдут в последние три дня недели;
D – хотя бы в один день недели произойдут два или более из этих событий.

$\triangleleft$ Дни недели можно представить в виде ящиков, а события в виде шариков. Тогда распределение событий по дням недели можно считать раскладкой шариков по ящикам. Так как каждый из четырех шариков можно поместить в любой из 7 ящиков, то существует $7^4 = 2401$ равновоэможных способа разложить 4 шарика по 7 ящикам.
Из них событию A благоприятствуют $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способов, так как для каждого последующего шарика остается на один пустой ящик меньше. Поэтому
$P(A) = \dfrac{840}{2401} \approx 0{,}35.$ Событию B благоприятствует всего 7 способов. Поэтому
$P(B) = \dfrac{7}{7^4} = \dfrac{1}{343} \approx 0{,}003.$ Все четыре события могут произойти в последние три дня недели 3^4 способами. Поэтому $P(C) = \dfrac{3^4}{7^4} \approx 0{,}038.$ Событие D противоположно событию A. Это значит, что $P(D) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{840}{2401} \approx 1 - 0{,}35 = 9{,}65.$ $\triangleright$

Задача 13. В лифт ***k*** - этажного дома сели ***m*** пассажиров. Каждый пассажир независимо от других с равной вероятностью может выйти на любом этаже начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A - все пассажиры вышли на разных этажах;
B – все вышли выше четвертого этажа;
C – никто не вышел на пятом этаже;
D – хотя бы два вышли на одном этаже.

(См. пример 8 и исходные данные.)

Задача 14. Из N билетов с номерами от 1 до N один за другим (без возвращения) берут два билета. Найдите вероятности следующих событий:

A - оба номера билетов четные;
B – оба номера нечетные;
C – номер <u>первого</u> билета четный, а <u>второго</u> нечетный;
D – номер одного четный, а другого нечетный:
E – номер второго билета четный.

(N равно номеру варианта + 5.)

Задача 15. В урне содержатся шары с номерами 1, 2, 3, … , ***n***. Наугад без возвращения выбирают ***k*** шаров. Какова вероятность того, что будут выбраны только шары с номерами больше ***k***?

Какова вероятность того, что для каждого из первых ***k*** шаров номер шара совпадет с его номером по порядку извлечения?
(См. исходные данные)

Замечание. Пусть n одинаковых предметов необходимо распределить между k людьми. Это можно сделать $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$ способами. К такому выводу приводят следующие соображения. Добавим к этим n предметам $k-1$ черный шар, поставим предметы и шары в один ряд, и будем их переставлять между собой. Число *различимых* перестановок будет равно C_{n+k-1}^{k-1}, так как именно таким числом способов можно из $n+k-1$ места выбрать $k-1$ место и поставить на эти места черные шары, а на остальные места поставить предметы. Вместе с тем число C_{n+k-1}^{k-1} равно числу способов n одинаковых предметов распределить между k людьми: первому достанутся предметы до первого черного шара, второму – от первого до второго черного шара и т. д. Если (i –1) - й и i –й шары стоят рядом, то i –му человеку не достанется ничего.

Пример 9 (к задаче 17). Случайным образом 12 шаров размещаются в 6 ящиках. Какова вероятность того, что ровно 2 ящика останутся пустыми?

⊲ Согласно предыдущему замечанию распределить 12 шаров по 6 ящикам можно $C_{12+6-1}^{6-1} = C_{17}^{5} = 6188$ способами. Имеется $C_6^2 = 15$ вариантов выбрать два пустых ящика из шести. В остальных четырех ящиках должно быть хотя бы по одному шару. Для этого размещаем в каждый из них по одному шару, а остальные 12 – 4 = 8 шаров раскладываем произвольным образом в эти же 4 ящика. Это можно сделать $C_{8+3-1}^{3} = C_{11}^{3}$ способами. Всего получается $15 \cdot C_{11}^{3} = 15 \cdot 165 = 2475$ благоприятствующих способов. Вероятность того, что останутся два свободных ящика, равна 2475/6188 $\approx$ 0,4. ⊳

Задача 17. Случайным образом n шаров размещаются в m ящиках. Какова вероятность того, что ровно r ящиков останутся пустыми?
(См. пример 9 и исходные данные.)

Геометрическое определение вероятности: Пусть область g принадлежит области G. Если *равновозможно* попадание точки в любую точку области G, то вероятность попасть в область g равна отношению меры области g к мере области G:

$$\text{P(попасть в область g)} = \frac{\text{Мера области } g}{\text{Мера области } G},$$

где «мера» – означает:

1) длину, если область G часть прямой или кривой линии;
2) площадь, если G часть плоскости;
3) объем, если G часть пространства,

и т. д. в зависимости от характера области G.

Пример 10 (к задачам 18 – 19 – 20). Две радиостанции течение часа независимо друг от друга должны передать сообщения длительностью 10 мин и 20 мин соответственно. Какова вероятность того, что сообщения не перекроются по времени.

⊲ Пусть x – момент начала сообщения первой радиостанции, а y – момент начала второго сообщения. Для того, чтобы сообщения уложились в отведенный час, должны выполняться условия: $0 \le x \le 50$ мин; $0 \le y \le 40$. Сообщения не перекроются во времени, если выполнятся условия y – x < 10 и y – x < 20. Этим условиям удовлетворяют точки заштрихованных областей на рис.1.

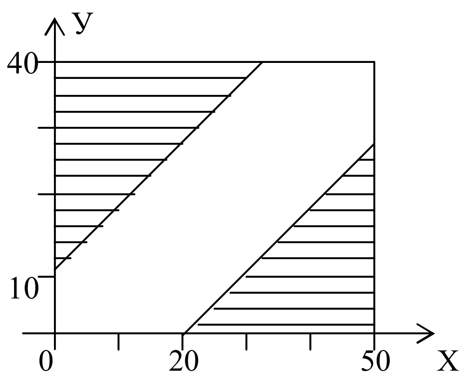


Рис.1

Так как все положения точки (x ,y) в прямоугольнике 50×40 равновозможны, то искомая вероятность равна отношению заштрихованной площади, которая равна 30×30, к площади прямоугольника. Поэтому
$P = (30\times30)/(50\times40)= 9/20$.

Ответ: 9/20. ▹

Задача 18. В течение суток к причалу должны независимо друг от друга подойти и разгрузиться два сухогруза. Одному из них для разгрузки требуется k_1 часов, другому - k_2 часов. Какова вероятность того, что ни одному из сухогрузов не придется ожидать в очереди на разгрузку? (см. пример 10 и исходные данные)

Задача 19. В отрезок [0;1] наугад брошены две точки, причем все положения каждой точки в этом отрезке равновозможны. Пусть X - расстояние от левого конца отрезка до ближайшей точки, а Y - расстояние между точками. Найдите вероятность того, что $n X \le Y$, где $\boldsymbol{n}$ - номер варианта (см пример 10).

Задача 20. В область D наугад брошена точка, причем все положения точки в этой области равновозможны. Найдите вероятность того, что координаты точки X и Y будут удовлетворять неравенству $cXY \le aX^2 + b\,Y^2$. (в нечетных выриантах область D – единичный квадрат $[0;1] \times [0;1]$, в четных вариантах область D – треугольник с вершинами A (0;0), B (1;0) и C (0;1))
(см. пример 10 и исходные данные)

Пример 11 (к задаче 21). Координаты случайной точки $M(b,c)$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $b + c = 3$, служат коэффициентами квадратного уравнения
$z^2 + b\,z + c = 0$. Полагая все положения случайной точки в указанном треугольнике равновозможными, найти вероятность того, что уравнение имеет два действительных корня.

◃ Пусть A – интересующее нас событие. Уравнение имеет действительные корни, если его дискрименант D = $b^2 - 4c \ge 0$. Это неравество будет выполнено, если случайная точка M попадет

в треугольнике ниже кривой $c \le \dfrac{b^2}{4}$ (на рис.2 заштрихованная область). Точка пересечения

линий $b + c = 3$ и $c = \dfrac{b^2}{4}$ имеет координаты (2,1). Поэтому площадь заштрихованной фигуры на рис.2 равна $\int_0^1 (3 - c - 2\sqrt{c})dc$ = 7/6.

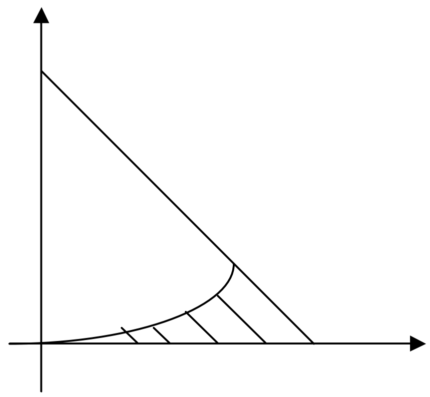


Рис. 2

Так как площадь всего треугольника равна 9/2, то по геометрическому определению вероятности P(A) = 7/27. ▷

Задача 21. Координаты случайной точки M(b, c) в прямоугольнике, ограниченном осями координат и прямыми $x = $ m и $y = $ n, служат коэффициентами квадратного уравнения $z^2 + b\,z + c = 0$. Полагая все положения случайной точки в указанном прямоугольнике равновозможными, найдите вероятность того, что уравнение не имеет действительных корней (см. пример 11 и исходные данные).

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Желателен следующий порядок решения задач и оформления записи: а) обозначения событий; б) анализ взаимосвязей событий и их символическая запись; в) вычисление вероятностей.

В теории вероятностей события рассматривают на фоне комплекса условий, которые его порождают. Проще говоря, событие – это результат опыта, который проистекает в природе по воле человека, независимо от нее или ей вопреки. Рассмотрим множество событий, которые можно наблюдать в эксперименте при фиксированном комплексе условий. На множестве таких событий определим следующие понятия.

Суммой событий ***A*** и ***B*** называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий ***A*** **или** ***B*** . Сумму событий ***A*** и ***B*** обозначают через $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Произведением событий ***A*** и ***B*** называют событие, состоящее в появлении событий А **и** В в одном и том же опыте. Обозначают произведение событий ***A*** и ***B*** через $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Событие, состоящее в *не* появлении события ***A***, называется противоположным событием и обозначается через $\overline{A}$.

Если в каждом опыте два события ***A*** и ***B*** всегда либо оба происходят, либо оба не происходят, то такие события называют *равносильными* или *эквивалентными* и записывают: ***A* = *B*.**

Говорят, что события A_1, A_2, . . . , A_m образуют *полную группу* событий, если они попарно несовместимы и в каждом опыте непременно происходит одно и только одно из этих событий.

Словесные рассуждения можно перевести в символическую запись с помощью соответствий: “или” ⇔ “+ “; “и” ⇔ “· “; “ не *A*” ⇔ $\overline{A}$; “ равносильно” ⇔ “ = “.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A/B)$.

Теорема (умножения вероятностей). Вероятность произведения событий равна вероятности одного события, умноженной на вероятность другого события, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

События называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Если события независимы, то $P(A/B)=P(A)$, $P(B/A)=P(B)$ и

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Для любого конечного числа событий вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что предыдущие события произошли, т.е.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_{n-1}\cdot A_n)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Если события независимы, то

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_{n-1}\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Итак, *прежде чем вычислять вероятность произведения событий, необходимо установить, <u>зависимы ли события или нет.</u>*

<u>Теорема</u> (сложения вероятностей). Вероятность суммы событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

События называются *несовместными*, если их появление в одном и том же опыте невозможно.

Если события A и B *несовместны*, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Для трех *совместных* событий теорема сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Если события несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

Теорему сложения можно обобщить на любое конечное число слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_i\cdot A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_i\cdot A_j\cdot A_k)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n).$$

Если события *несовместны*, то

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Итак, *прежде чем вычислять вероятность суммы событий следует выяснить, совместны они или нет.*

Пример 12 (к задаче 22). Вероятности попадания в цель при одном выстреле для первого, второго и третьего стрелков равны соответственно 0,3; 0,6; 0,8. Все три стрелка выстрелили в цель. Какова вероятность того, что:

а) цель поражена? б) произошло только одно попадание? в) произошло ровно два попадания? г) попадут все три стрелка? д) будет хотя бы один промах?

⊲ Обозначим через A_i - событие, состоящее в попадании в цель i-го стрелка.

а) Поражение цели (событие A) равносильно появлению хотя бы одного из событий A_1 **или** A_2 **или** A_3. Поэтому $A = A_1 + A_2 + A_3$.
Учитывая совместность событий имеем $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$
$- P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$, а так как события независимы, то $P(A) = 0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}3\cdot 0{,}6 - 0{,}3\cdot 0{,}8 - 0{,}6\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}944$.

б) Рассмотрим три случая:

1) $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ - первый стрелок попал в цель **и** при этом второй **не** попал **и** третий **не** попал.

2) $B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ - первый стрелок **не** попал **и** при этом второй попал **и** третий **не** попал.

3) $B_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$ - первый **и** второй **не** попали **и** при этом третий попал.

Только одно попадание в цель (событие B) равносильно реализации хотя бы одного из *несовместных* событий B_1 **или** B_2 **или** B_3. Поэтому

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 .$$

В силу независимости событий A_i имеем

$$P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}7\cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}332.$$

в) Два попадания в цель (событие C) равносильны реализации хотя бы одного из несовместных случаев: $A_1\cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ **или** $A_1\cdot \overline{A_2}\cdot A_3$ **или** $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$.
В силу независимости событий A_i получаем

$$P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}468.$$

г) Все три стрелка попадут в цель (событие D), если произойдут события A_1 **и** A_2 **и** A_3, т.е. $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. В силу независимости событий A_i имеем
$P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}144$.

д) Хотя бы один промах (событие E) равносилен появлению хотя бы одного из событий $\overline{A_1}$ **или** $\overline{A_2}$ **или** $\overline{A_3}$, т.е. $E = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$. Вместо вычисления вероятности суммы трех совместных событий, заметим, что событие E равносильно не появлению события D. Поэтому $P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}144 = 0{,}856$.

Ответ: а) 0.944; б) 0,332; в) 0,468; г) 0,144; д) 0,856. ⊳

Задача 22. В каждой из трех урн содержится по восемь шаров. В первой урне 5 белых и 3 черных шара. Во второй урне m_1 белых, а остальные черные, в третьей урне m_2 белых, а остальные шары черные. Из каждой урны наугад выбрано по одному шару. Найти вероятности следующих событий: A – выбран только один белый шар; B – выбраны только белые шары; C – выбран хотя бы один белый шар.
(см. пример 12 и исходные данные)

Пример 13 (к задаче 23 и 24). Из 20 изделий 4 имеют скрытые дефекты. Изделия выбирают наугад по одному и проверяют. Найдите вероятности следующих событий:
A – первым бракованным изделием окажется 5 по счету проверяемое изделие;
B – первыми бракованными изделиями окажутся 3 и 4 проверяемые изделия;
C – первыми бракованными изделиями окажутся 3 и 5 по счету изделия.

⊲ Обозначим через A_i - событие, состоящее в выборе годного изделия при i-м выборе. Событие A произойдет, если первые четыре изделия окажутся годными и лишь пятое по счету изделие будет бракованным. Это означает, что $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \overline{A}_5$, причем события зависимы. Поэтому

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot P(A_4 / A_1 A_2 A_3) \cdot \mathrm{P}(\overline{A}_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{4}{16} = \frac{91}{969} \approx 0{,}094.$$

Событие B произойдет, если первые два изделия будут годными, а третье и четвертое окажутся бракованными. Символически это можно записать в виде
$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$. В силу зависимости событий

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(\overline{A}_3 / A_1 A_2) \cdot P(\overline{A}_4 / A_1 A_2 \overline{A}_3) =$$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} = \frac{8}{323} \approx 0{,}025.$$

Аналогично, $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 \cdot \overline{A}_5$

и $P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(\overline{A}_3 / A_1 A_2) \cdot P(A_4 / A_1 A_2 \overline{A}_3) \cdot \mathrm{P}(\overline{A}_5 / A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4) =$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{3}{16} = \frac{7}{323} \approx 0{,}022. \triangleright$$

Задача 23. Из тщательно перемешанной колоды карт (36 карт) выбирают одна за другой карты. Варианты 1 – 10: Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти будет k-я по счету карта? Варианты 11-20: Какова вероятность того, что первыми картами пиковой масти будут k-я и $(k+1)$ - я по счету карты? Варианты 21-31: Какова вероятность того, что первыми картами пиковой масти будут k-я и $(k+2)$ - я по счету карты? (см. пример 13 и исходные данные)

Задача 24. Среди $\boldsymbol{n}$ изделий находится два изделия со скрытым дефектом. Изделия выбирают наугад по одному и проверяют, пока оба бракованных изделия не будут обнаружены. Какова вероятность того, что придется проверить ровно $\boldsymbol{k}$ изделий? Какова вероятность того, что придется проверить не менее $\boldsymbol{k}$ изделий?
(см. пример 13 иисходные данные)

Пример 14 (к задаче 25). Имеется система соединенных между собой элементов (скажем, участок электрической цепи, поточная линия и т. д., см. рис. 3). Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение заданного времени (надежность) равна 0,8. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Какова надежность системы?

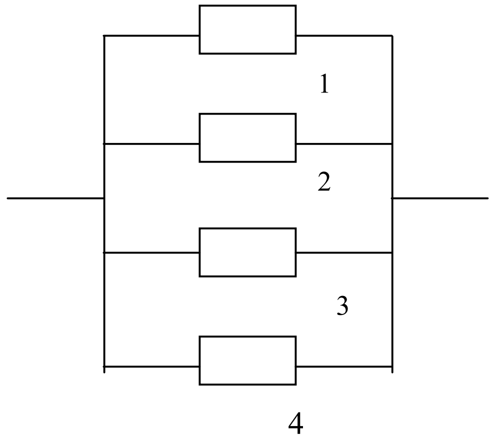


Рис. 3

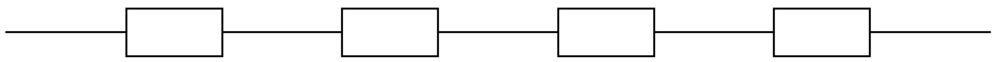
◁ Пусть событие A состоит в безотказной работе системы в течение заданного времени, а A_i означает безотказную работу i – го элемента в течение того же времени. Безотказная работа системы равносильна безотказной работе хотя бы одного элемента. Поэтому $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. События A_i совместны. Вместо вычисления вероятности $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$ по формуле (2.5) вычислим вероятность противоположного события $\overline{A}$. Выход из строя системы эквивалентен выходу из строя всех элементов в течение заданного времени, т.е. $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$. Так как элементы выходят из строя независимо друг от друга, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = (0{,}2)^4 = 0{,}0016.$$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984 \approx 1. \lhd$$

Пример 15 (к задаче 25). Имеется система соединенных между собой элементов (электрическая цепь, поточная линия и т. д., см. рис. 4). Вероятность безотказной работы (надежность) каждого элемента равна 0,9. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Какова надежность системы?



1 2 3 4

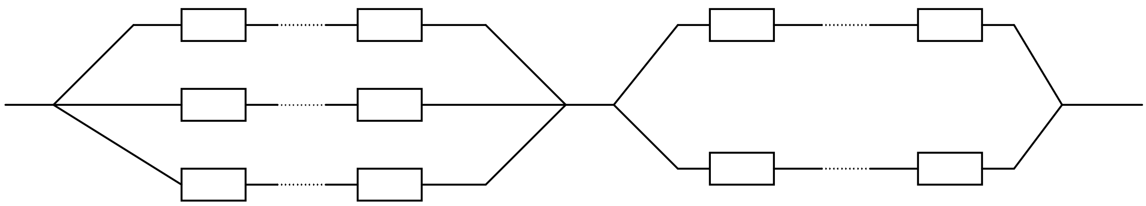
Рис. 4

◁ Пусть событие A состоит в безотказной работе системы, а A_i состоит в безотказной работе i – го элемента. Событие A произойдет, если одновременно произойдут события A_1, A_2, A_3 и A_4. Поэтому $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, а так как события независимы, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = (0{,}9)^4 \approx 0{,}66. \lhd$$

Задача 25. На рис. 5 изображена схема некоторой системы (напрмер, участок электричкской цепи, или участок поточной линии, где деталь подвергается обработке на разных станках). Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени (надежность) для каждого элемента первого блока равна 0,9, а для элементов второго блока эта вероятность равна 0,8. В первом блоке три параллельные линии соответственно из $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ элементов. Второй блок состоит из двух параллельных линий, в которых соответственно $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ элементов.

Найдите надежность системы (см. примеры 14 и 15 и исходные данные).



.

1 Блок 2 Блок

Рис. 5

Пример 16 (к задаче 26). В первой урне 2 белых шара, 4 синих и 9 красных, а во второй соответственно 3 , 5 и 6 . Из каждой урны наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета?

$\lhd$ Событие, состоящее в выборе шаров одного цвета, обозначим через A . Обозначим через B_i выбор из i - ой урны двух белых шаров, через C_i обозначим выбор из i - ой урны двух синих шаров, через D_i выбор из i - ой урны двух красных шаров. Событие A произойдет, если из первой урны будут выбраны два белых шара (событие B_1) и из второй урны будут выбраны тоже два белых шара (событие B_2) или из первой урны извлекут два синих шара (событие C_1) и из второй урны будут выбраны тоже два белых шара (событие C_2) или из первой урны будут выбраны два красных шара (событие D_1) и из второй урны будут выбраны тоже два красных шара (событие D_2). Поэтому $A = B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C\,C_2 + D_1 \cdot D_2$. События независимы и слагаемые несовместны. В итоге получаем, что

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(B_2) + P(C_1)\cdot P(C_2) + P(D_1)\cdot P(D_2) =$$

$$= \frac{C_2^2}{C_{15}^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_{14}^2} + \frac{C_4^2}{C_{15}^2}\cdot\frac{C_5^2}{C_{14}^2} + \frac{C_9^2}{C_{15}^2}\cdot\frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{201}{3185} \approx 0{,}06. \rhd$$

Задача 26. В первой урне n_1 белых шаров, n_2 синих и n_3 красных, а во второй соответственно m_1, m_2 и m_3 . Из каждой урны наугад выбирают k шаров. Какова вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета?
($k = 1$ для *нечетных* вариантов и $k = 2$ для *четных*.)
(см. пример 16 и исходные данные)

Пример 17 (к задаче 27)**.** Два стрелка по очереди стреляют в цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна для них соответственно 1/3 и 1/2. Каждый стрелок имеет право только на два выстрела. Какова вероятность того, что цель будет поражена? Какова вероятность того, что цель поразит первый стрелок?

$\lhd$ Обозначим через A_i попадание первого стрелка при i-м выстреле, а через B_i - попадание второго стрелка при i-м выстреле.

На рис. 6 изображено “дерево” всех возможных способов протекания стрельбы. Цель не будет поражена (событие $\overline{C}$), если произойдут события $\overline{A}_1$ **и** $\overline{B}_1$ **и** $\overline{A}_2$ **и** $\overline{B}_2$. Так как события независимы, то $P(\overline{C}) = \mathrm{P}(\overline{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}_1)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_2)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}_2) =$ $= (2/3)\cdot(1/2)\cdot(2/3)\cdot(1/2) = 1/9$. Поэтому вероятность поражения цели $P(C) = 1 - P(\overline{C}) =$ $= 1 - 1/9 = 8/9$.

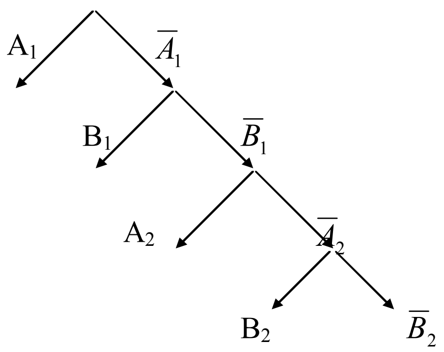


Рис. 6

Цель поразит первый стрелок (событие A), если он попадет при первом выстреле **или** при первом выстреле он **не** попадет в цель **и** второй стрелок при своем первом выстреле **не** попадет в цель **и** после этого первый стрелок попадет в цель.
Поэтому $A = A_1 + \overline{A}_1\cdot\overline{B}_1\cdot A_2$. События A_1 и $\overline{A}_1\cdot\overline{B}_1\cdot A_2$ несовместны.
В силу независимости событий получаем

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{B}_1)\cdot P(\mathrm{A}_2) = 1/3 + 2/3\cdot 1/2\cdot 1/3 = 4/9. \ \triangleright$$

Задача 27. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Первым бросок делает игрок A. Найти вероятность события:

Варианты 1 – 8. Выиграл игрок A до k – го броска.
Варианты 9 – 15. Выиграл игрок B до k – го броска.
Варианты 16 – 23. Выиграл игрок A не позднее k – го броска.
Варианты 24 – 31. Выиграл игрок B не позднее k – го броска.
(***k*** равно последней цифре варианта плюс 4, см. пример 17).

Пример 18 (к задаче 28). Урна содержит 6 занумерованных шаров с номерами от 1 до 6. Шары извлекаются по одному без возвращения. Пусть событие A состоит в том, что шары будут извлечены в порядке их номеров, а событие B – в том, что хотя бы один раз номер шара совпадет с порядковым номером его извлечения. Найти вероятности событий A и B и определить предельные вероятности этих событий при неограниченном увеличении числа шаров в урне.

$\triangleleft$ **а)** Обозначим через A_i – событие, состоящее в том, что порядок извлечения i-го шара совпадает с его номером. Тогда событие $A = A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_6$. Вместо рассмотрения произведения зависимых событий заметим, что шары в указанном порядке можно извлечь только одним способом, а всего равновозможных способов извлечения существует 6!. Поэтому $\mathrm{P(A)} = \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720}$. При увеличении числа шаров $\mathrm{P(A)} \to 0$.

Событие B произойдет, если появится хотя бы одно из событий A_1 или A_2 или … или A_6. Поэтому $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$, причем события совместны. При переходе к противоположному событию придется рассматривать произведение шести <u>зависимых</u> событий $\overline{A}_i$, что в данном случае сделать сложно. Поэтому вычислим вероятность суммы непосредственно:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{6}P(A_i)\ -\ \sum_{1\le i<j\le 6}P(A_i)\cdot P(A_j)\ +\ \sum_{1\le i<j<k\le 6}P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k)\ -\ \ldots$$

$$\ldots - P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5\cdot A_6)=\ 6\cdot\frac{1}{6}-C_6^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+C_6^3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}-C_6^4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+\ C_6^5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ -\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\ =1\ -\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}\ =\ \frac{454}{720}\approx 0{,}65.$$

Заметим, что искомая вероятность является частичной суммой ряда Тейлора функции $1-e^{-x}$ при x = -1. Поэтому при больших n имеем

$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A\,n)\approx 1-e^{-1}\approx 0{,}63.$

б) Номера первых трех шаров совпадут с номером извлечения с вероятностью

$$P\ =\ P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\ \ P(\ A_3\ /\ A_1A_2\ )\ =\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{120}.$$

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{720}$; $P(A)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$; $P(B)=\dfrac{454}{720}\approx 0{,}63$; $P(B)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1-e^{-1}$. ◁

Задача 28**.** На вешалке висит *n* шляп. Каждый из владельцев шляпы берет шляпу наугад и уходит. Какова вероятность того, что хотя бы один уйдет в своей шляпе? (см. пример 18 и исходные данные).

4. Формула полной вероятности.

Пусть событие *A* может произойти с одним и только с одним из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Иными словами, событие *A* появится, если произойдет событие B_1 **и** при этом появится событие *A*, **или** произойдет событие B_2 **и** при этом появится событие *A* и т. д. Символическая запись этой фразы имеет вид

$$A=B_1\cdot A+\ B_2\cdot A+\ldots+B_n\cdot A.$$

В силу несовместимости событий можно записать

$$P(A)=P(B_1\cdot A)+\ P(B_2\cdot A)+\ldots+P(B_n\cdot A).$$

Используя теорему умножения вероятностей, получаем формулу

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)\ +\ P(B_2)\cdot P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A/B_n),$$

которая и называется ***формулой полной вероятности.***

Пример 19 (к задачам 29 и30). Имеется две коробки деталей, в каждой из которых по 10 деталей. В первой коробке среди деталей две низкого сорта, а во второй 4 низкосортных детали. Из первой коробки для нужд производства взяли наугад половину деталей, а оставшиеся высыпали во вторую коробку. Через некоторое время из второй коробки взяли наугад деталь. Какова вероятность того, что это деталь низкого сорта?

◁ Обозначим через *A* событие, состоящее в выборе из второй коробки детали низкого сорта. Возможность этого выбора зависит от того, какие именно детали были добавлены во вторую коробку. На этот счет можно выдвинуть следующие предположения: B_1 - во вторую коробку добавили пять годных деталей; B_2 - добавили 1 деталь низкого сорта и четыре доброкачественные; B_3 - добавили две детали низкого сорта и три доброкачественные. Пять деталей во вторую коробку можно переложить $n = C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$ способами. Из них событию B_1 благоприятствует $C_8^5 = 56$, событию B_2 — $C_2^1 \cdot C_8^2 = 2 \cdot 70 = 140$, а событию B_3 — $C_2^2 \cdot C_8^3 = 56$ способов. Событие A произойдет, если появится событие B_1 **и** после этого произойдет событие A **или** появится событие B_2 **и** после этого произойдет событие A **или** появится B_3 **и** после этого произойдет А. Символически: $A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A$. Учитывая несовместность событий B_i , имеем

$$P(A) = P(B_1 \cdot A) + P(B_2 \cdot A) + P(B_3 \cdot A) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2) + P(B_3) \cdot P(A / B_3) =$$

$$= (56 / 252) \cdot (4 / 15) + (140 / 252) \cdot (5 / 15) + (56 / 252) \cdot (6 / 15) = 1/3. \lhd$$

Задача 29. Из урны с n_1 белыми и n_2 черными шарами k шаров, взятые наугад, были перенесены в урну с m_1 белыми и m_2 черными шарами. Какова после этого вероятность вынуть белый шар из второй урны? (Для нечетных вариантов $k = 2$, для четных $k = 3$; величины n_1, n_2, m_1, m_2 взять из цифровых данных к задаче № 26; см. пример 19)

Задача 30. В условиях задачи 28 из первой урны выбирают два шара, а из второй один шар. Затем из выбранных шаров наугад берут шар. Какова вероятность того, что шар будет белым? (см. пример 19).

5. Формулы Байеса.

Пусть событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В этих условиях вероятность события A можно вычислить по формуле полной вероятности. События B_i иногда называют «гипотезами», поскольку можно лишь предполагать какое именно из них произойдет. Предположим, что известны вероятности $P(B_1)$, $P(B_2)$, … , $P(B_n)$.

Проделан опыт, в результате которого событие A произошло. Тогда вероятности событий B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при условии появления события A определяются по формулам. Байеса

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A / B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Формулы Байеса позволяют переоценивать вероятности гипотез (событий B_i) с учетом информации, которую содержит в себе факт появления события A .

Пример 20 (к задачам 31 и 32)**.** По каналу связи передается одна из последовательностей букв AAAA, BBBB, CCCC с вероятностями соответственно 0,5, 0,4, 0,1. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью 0,8 и с вероятностями 0,1 и 0,1 за две другие буквы. Предполагается, что искажаются буквы при передаче независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано AAAA, если принято ABCA.

◁ Для краткости записи формулы обозначим AAAA через T_1, BBBB через T_2, CCCC через T_3. Тогда по формуле Байеса

$P(T_1, / ABCA) =$

$$= \frac{P(T_1)\cdot P(ABCA/T_1)}{P(T_1)\cdot P(ABCA/T_1) + P(T_2)\cdot P(ABCA/T_2) + P(T_3)\cdot P(ABCA/T_3)} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8}{0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1} = 8/9. \;\triangleleft$$

Пример 21 (к задачам 31 и 32**)**. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для этих стрелков соответственно равны 0,8, 0,7 и 0,6. Какова вероятность того, что третий стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины?

◁ Обозначим через A событие, состоящее в появлении двух пробоин в мишени. В отношении двух пробоин могут быть три предположения: B_1 - попали первый **и** второй стрелки, а третий **не** попал, вероятность чего равна $P(B_1) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}224$; B_2 - попали первый **и** третий, а второй **не** попал, вероятность чего равна $P(B_2) = 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 = 0{,}144$; B_3 - попали второй **и** третий, а первый не попал, вероятность чего равна $P(B_3) = 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6 = 0{,}084$.

Заметим, что $P(A/B_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$. Тогда по формуле Байеса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3)} =$$

$$= \frac{0{,}224}{0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084} = 56/113 \approx 1/2. \;\triangleleft$$

Задача 31. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для этих стрелков соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Какова вероятность того, что i - тый стрелок промахнулся, если в мишени оказалось две пробоины? (см. примеры 20 и 21 и исходные данные).

Задача 32. Из урны, содержащей ***n*** белых и ***m*** черных шаров наугад без возвращения выбирают три шара. Третий шар оказался белым. Какова вероятность того, что первые два шара были тоже белого цвета? Какова вероятность того, что первые два шара были разного цвета? (см. примеры 20 и 21 и исходные данные).

6. Повторные независимые испытания

Опыты называются *независимыми*, если вероятность каждого исхода любого опыта не изменяется от того, какие исходы имели другие опыты.

Пусть производится n независимых опытов и известна $\boldsymbol{P(A)}$ = p -вероятность появления события A в каждом из опытов ($\boldsymbol{P(\bar{A})} = 1 - p = q$). Тогда вероятность того, что в n независимых опытах событие A появится ровно k раз равна по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\ .$$

Число $k = k_0$, при котором вероятность $P(A)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом появления события*.

Если $(n + 1)\,p$ число дробное, то k_0 равно целой части числа $(n + 1)\,p$. Если же $(n + 1)\,p$ – число целое, то k_0 принимает два значения:

$$k_0 = (n + 1)\,p - 1 \quad \text{и} \quad k_0 = (n + 1)\,p.$$

Пример 22 (к задаче 33). Предположим, что 30% студентов нашего института занимаются спортом. Какова вероятность того, что среди первых пяти встречных студентов окажется только один спортсмен? Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один спортсмен? Каково наиболее вероятное число спортсменов среди них?

◁ Так как студентов в институте много (несколько тысяч), то по мере опроса нескольких из них пропорции в оставшейся части практически не изменяются. Поэтому можно считать опрос каждого студента независимым опытом. Всего опытов производится $\boldsymbol{n} = 5$, а вероятность положительного ответа $p = 0{,}3$. По формуле Бернулли имеем $P_5(1) = C_5^1\ 0{,}3 \cdot (0{,}7)^4 = 0{,}36015$. Вероятность хотя бы одного правильного ответа проще вычислять, если перейти к противоположному событию: $P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) =$
$= 1 - (0{,}7)^5 = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193$.

Так как $(\boldsymbol{n} + 1)p = (5 + 1)0{,}3 = 1{,}8$ (целая часть числа равна 1), то наиболее вероятное число спортсменов среди пяти опрошенных $\boldsymbol{k_0} = 1$. ▷

Пример 23. На каждый вопрос предлагается три возможных ответа, из которых следует выбрать один правильный. Задано пять вопросов. Какова вероятность того, что путем простого угадывания удастся правильно ответить на четыре вопроса? Какова вероятность угадать правильный ответ хотя бы на один вопрос?

◁ Выбор ответа на вопрос можно рассматривать как независимый опыт. Всего таких опытов производится $n = 5$, а вероятность успеха в каждом опыте равна $p = 1/3$. Тогда вероятность путем простого угадывания правильно ответить на четыре вопроса равна $P_5(4) = C_5^4 \cdot (1/3)^4 \cdot (2/3)^1 = 10/243 \approx 1/24$.

Вероятность угадать хотя бы один правильный ответ равна
$P_5(\mathrm{k} \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - (2/3)^5 = 1 - 32/243 \approx 7/8$. ▷

Задача 33. Из кошелька на стол высыпали $\boldsymbol{n}$ монет.
а) Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k}$ из них упали гербом вверх?
б) Какова вероятность того, что не менее $\boldsymbol{k}$ из них упали гербом вверх?
(см. примеры 22 и 23 и исходные данные)

Пример 24 (к задачам 34 и 35). Вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,3. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели была больше 0,9?

◁ Каждый выстрел можно рассматривать как независимое испытание, и в каждом из них вероятность появления события (попадания в цель) равна $p = 0{,}3$. Цель будет поражения, если в $\boldsymbol{n}$ выстрелах будет хотя бы одно попадание, вероятность чего равна

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad 1 - (0{,}7)^n > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad (0{,}7)^n < 0{,}1 \Rightarrow \quad n \geq 7.$$ ▷

Задача 34. Для игрока в баскетбол вероятность забросить мяч в корзину со штрафного броска равна p. Сколько бросков надо предоставить игроку, чтобы вероятность попадания в корзину хотя бы один раз было больше $P = 0{,}9$?
($p = 0{,}n$, n – номер варианта, для девятого варианта $n = 35$; см. пример 24).

Задача 35. Вероятность того, что изделие имеет скрытый дефект, равна $\boldsymbol{p}$. Сколько нужно взять для проверки изделий, чтобы вероятность обнаружения среди них изделия со скрытым дефектом была больше P ? (В вариантах 1 – 9 взять $P =$ 0,9, а $\boldsymbol{p}$ = 0,0 n , где n – номер варианта; для вариантов 10 – 20 взять $P =$ 0,95, а $\boldsymbol{p}$ = 0, n , где n – номер варианта; в вариантах 21 – 31 считать $P =$ 0,85 а $\boldsymbol{p}$ = 0, n , где n – номер варианта; см. пример 24).

Пример 25 (к задаче 36). Монету подбрасывают до тех пор, пока герб не выпадет три раза. Какова вероятность того, что до этого цифра выпадет пять раз?

◁ Всего должно состояться 8 подбрасываний монеты. Чтобы опыт закончился именно на восьмом броске, необходимо при восьмом подбрасывании получить герб, вероятность чего равна 1/2, **и** до этого при семи подбрасываниях герб должен выпасть ровно два раза, вероятность чего по формуле Бернулли равна

$P_7(2) = C_7^2\,(1/2)^2\cdot(1/2)^5 = 21/128$. В силу независимости опытов искомая вероятность равна $(21/128)\cdot(1/2) = 21/256 \approx 1/13$. ▷

Задача 36. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна $\boldsymbol{p}$. Стрельба производится до $\boldsymbol{n}$ попаданий. Какова вероятность того, что при этом будет $\boldsymbol{m}$ промахов? (см. пример 25 и исходные данные).

Пример 26(к задачам 37 и 38). Из начала координат начинает движение точка. На каждом шаге она с вероятностью $\boldsymbol{p} = ½$ сдвигается на единицу вверх или вероятностью $\boldsymbol{q} = 1 – \mathrm{p} = ½$ сдвигается на единицу вправо. Какова вероятность того, что после восьми шагов частица окажется в точке A (5;3)? Какова вероятность того, что за эти восемь шагов частица поднимется не менее чем на пять единиц вверх?

◁ Каждый шаг частицы можно считать независимым испытанием. Частица после восьми шагов окажется в точке A (5;3), если из восьми шагов пять будут сделаны вверх (а остальные три - вверх), вероятность чего по формуле Бернулли равна

$$P_8(5) = C_8^5\,(½)^5\ (½)^3 = 7/32 \approx 0{,}22.$$

Частица поднимется не менее, чем на пять единиц вверх, если не менее пяти шагов из восьми будут сделаны вверх. Вероятность этого равна

$P_8(k \geq 5) = P_8(5) + P_8(6) + P_3(7) + P_8(8) = 93/256 \approx 0{,}36$. ▷

Задача 37. Из начала координат начинает движение точка. На каждом шаге она с вероятностью $\boldsymbol{p}$ сдвигается на единицу вверх или вероятностью $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$ сдвигается на единицу вправо. Какова вероятность того, что после n шагов частица окажется в точке A (k; n-k)? Какова вероятность того, что за эти n шагов частица поднимется не менее чем на k единиц вверх? (см. пример 26 и исходные данные)

Задача 38. Частица в начальный момент времени находится в начале координат. В каждую из последующих $\boldsymbol{n}$ секунд она сдвигается с вероятностями, равными ½, на единицу вправо или влево независимо от движений в предшествующие секунды. Какова вероятность того, что через $\boldsymbol{n}$ секунд частица окажется в точке с координатой $\boldsymbol{k}$? (см. пример 26 и исходные данные)

Пример 27 (к задаче 39). Каждый из двух стрелков 4 раза стреляет в цель. Вероятности попасть в цель при каждом выстреле равны для них соответственно 0,6 и

0,8. Какова вероятность того, что у первого будет 2 промаха, а у второго только один? Какова вероятность того, что у стрелков будет равное число попаданий?

⊲ Каждый выстрел можно считать независимым опытом. Первый должен в четырех выстрелах попасть два раза, вероятность чего по формуле Бернулли равна

$$P_4(2) = C_4^2 (0{,}6)^2 (0{,}4)^2 = 0{,}3456.$$

Второй должен попасть три раза, вероятность чего равна

$$P_4(3) = C_4^3 (0{,}8)^3 (0{,}2)^1 = 0{,}4096.$$

Вероятность двух промахов у первого и одного промаха у второго стрелка равна в силу независимости опытов $0{,}3456 \cdot 0{,}4096 = 0{,}1416$.

Вероятность того, что у каждого стрелка будет $\boldsymbol{m}$ попаданий равна

$$C_4^m (0{,}6)^m (0{,}4)^{4=m} \cdot C_4^m (0{,}8)^m (0{,}2)^{4-m}.$$

Поэтому вероятность равного числа попаданий равна

$$\sum_{m=0}^{4} C_4^m (0{,}6)^m (0{,}4)^{4=m} \cdot C_4^m (0{,}8)^m (0{,}2)^{4-m} = 0{,}2102.$$

Задача 39. Биатлонисту на каждом из двух рубежей необходимо поразить пять мишеней. Вероятность поразить мишень при выстреле лежа (на первом рубеже) равна p_1, а при выстреле стоя (на втором рубеже) эта вероятность равна p_2. Какова вероятность того, что оба рубежа биатлонист преодолеет без промахов? Какова вероятность того, что на каждом рубеже биатлонист допустит по одному промаху. Какова вероятность того, что биатлонист допустит только один промах? Какова вероятность того, что на первом рубеже биатлонист допустит k_1 промах, а на втором k_2 промахов.

(см. пример 27 и исходные данные)

Пример 28 (к задаче 40)**.** Два игрока А и В подбрасывают монету. Если монета выпадает гербом вверх, то А получает очко. Если выпадает решка, то очко получает игрок В.

а) Какова вероятность того, что после 10 бросков монеты счет будет равным?

б) Какова вероятность того, что после этих бросков у игрока А будет на два очка больше?

⊲ Каждый бросок монеты можно считать независимым опытом, и таких опытов производится 10. Счет будет равным, если в результате десяти бросков герб выпадет 5 раз. Вероятность этого по формуле Бернулли равна

$$\mathrm{P}_{10}(5) = C_{10}^5 (0{,}5)^{10} = \frac{63}{256} \approx \frac{1}{4}.$$

Игрок А получит на два очка больше, если в десяти бросках герб выпадет 6 раз, вероятность чего равна

$$\mathrm{P}_{10}(6) = C_{10}^6 (0{,}5)^{10} = \frac{105}{512} \approx \frac{1}{5}. \triangleright$$

Задача 40. В урне содержится $\boldsymbol{m}_1$ белых и $\boldsymbol{m}_2$ черных шаров. Из урны производится *повторный* выбор n шаров:

а) Какова вероятность того, что будет выбрано равное число белых и черных шаров?

б) Какова вероятность того, что белых будет выбрано на $\boldsymbol{k}$ больше?

в) Какова вероятность того, что будет выбрано не менее двух белых шаров?

(см. пример 28 и исходные данные)

Формулу Бернулли можно обобщить на случай независимых опытов, каждый из которых имеет *более двух* возможных исходов.

Пусть в результате опыта происходит одно из m попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m$ соответственно ($p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$). Тогда вероятность того, что в результате независимых опытов событие A_1 наступит k_1 раз, событие A_2 наступит k_2 раза, …, событие A_m наступит k_m раз, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, равна:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \quad p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}. \qquad (1)$$

Пример 29 (к задачам 41 и 42). В крупной партии изделий 60% изделий первого сорта, 30% - второго, 10% - третьего сорта. Для проверки взяли наугад 6 изделий. Какова вероятность того, что среди них 3 изделия первого сорта, 2 изделия второго сорта и одно изделие третьего сорта?

◁ Так как партия изделий велика, то последовательный выбор из нее нескольких изделий практически не меняет пропорции в партии и, значит, не меняет вероятности выбора изделия данного сорта. Поэтому можно в качестве математической модели взять схему независимых опытов. Будем считать, что производится 6 независимых опытов, в каждом из которых вероятность выбора изделия первого сорта равна $p_1 = 0{,}6$, второго – 0,3, третьего – 0,1. В соответствии с формулой (1)

$$P_6(3,2,1) = \frac{6\,!}{3!\,2!\,1!}\,(0{,}6)^3\,(0{,}3)^2\,(0{,}1) \approx 0{,}12. \ ◁$$

Задача 41. В урне находится $\boldsymbol{m_1}$ белых шаров, $\boldsymbol{m_2}$ черных и $\boldsymbol{m_3}$ красных. Из урны повторным способом выбирают $\boldsymbol{n}$ шаров. Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k_1}$ раз будет выбран белый шар, $\boldsymbol{k_2}$ - черный шар и $\boldsymbol{k_3}$ - красный?
(см. пример 29 и исходные данные)

Задача 42. В урне находится $\boldsymbol{m_1}$ белых шаров и $\boldsymbol{m_2}$ черных. Из урны наугад выбирают два шара, затем шары возвращают в урну, перемешивают и опыт повторяют. Предполагается проделать $\boldsymbol{n}$ таких опытов. Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k_1}$ раз будут выбраны оба белых шара, $\boldsymbol{k_2}$ раз - оба черных шара и $\boldsymbol{k_3}$ раз - шары разного цвета? (Величины $\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}$ взять из исходных данных к задаче 40; см пример 29).

7. Формула Пуассона. Простейший поток событий.

При большом числе опытов $\boldsymbol{n}$ формула Бернулли приводит к большому объему вычислений. Существуют приближенные формулы для вычисления вероятностей $\boldsymbol{P_n(k)}$, которые дают тем большую точность, чем больше число $\boldsymbol{n}$. Пусть число независимых опытов $\boldsymbol{n}$ велико (чем больше, тем лучше), а вероятность события $\boldsymbol{p}$ мала (чем меньше, тем лучше, но $\boldsymbol{p} > 0$). Тогда

$$\boldsymbol{P_n(k)} \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\lambda = n \cdot p}$. Эту формулу называют <u>*формулой Пуассона*</u>. Формула Пуассона дает приемлемую точность, если опытов производится хотя бы несколько десятков, а $p < 0{,}1$.

Пример 30 (к задаче 43). Вероятность того, что изделие при транспортировке с завода повредится, равна 0,0005. С завода отправлено четыре тысячи изделий. Какова вероятность того, что в пути повредится больше двух изделий?

⊲ Транспортировку каждого изделия можно рассматривать как независимый опыт, число которых (n = 4000) велико. Вероятность же появления события в каждом опыте (p = 0,0005) мала. Это дает основание воспользоваться для вычислений формулой Пуассона. Заметим, что $\lambda = \boldsymbol{n \cdot p} = 4000 \cdot 0{,}0005 = 2$. Нас интересует вероятность $P_{4000}(k > 2) = P_{4000}(3) + P_{4000}(4) + ... + P_{4000}(4000)$. Проще эту вероятность вычислить, если рассмотреть вероятность противоположного события:

$$P_{4000}(k > 2) = 1 - P_{4000}(k \le 2) = 1 - P_{4000}(0) - P_{4000}(1) - P_{4000}(2) =$$

$$= 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - e^{-2} - 2\,e^{-2} - 2\,e^{-2} = 1 - 5\,e^{-2} \approx 0{,}31. \ ⊲$$

Задача 43. При дальней радиосвязи из-за помех каждый сигнал независимо от других с вероятностью $\boldsymbol{p}$ может быть принят ошибочно. Передано $\boldsymbol{n}$ сигналов. Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k}$ из них будут приняты ошибочно? Какова вероятность ошибочного приема не менее $\boldsymbol{k}$ сигналов? (см. пример 30 и исходные данные).

Пример 31 (к задаче 44). Среди 300 изделий 15 бракованных. Для проверки наугад выбрали пять изделий. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных? Сравнить точное значение вероятности с приближенным, найденным по формуле Бернулли.

⊲ Пусть A – интересующее нас событие. Выбрать пять изделий из 300 можно C_{300}^5 способами. Событию A благоприятствуют те способы выбора, при которых пять изделий выбирается из 285 годных. Число таких способов равно C_{285}^5. Точное значение искомой вероятности (с точностью до одной десятитысячной) равно $P(A) = C_{285}^5 / C_{300}^5 = 0{,}7724$.

Так как партия изделий велика, то выбор одного за другим нескольких изделий не меняет заметно пропорции в этой партии. Поэтому можно считать, что производится пять независимых опытов и что вероятность выбора бракованного изделия в каждом опыте примерно равна $p = 15 / 300 = 0{,}05$.
По формуле Бернулли приближенное значение

$$P(A) = P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}05)^0 \cdot (0{,}95)^5 = 0{,}7738. \ ⊲$$

Задача 44. При приемочном контроле из партии, состоящей из $\boldsymbol{n}$ изделий, наугад проверяют $\boldsymbol{m}$ изделий. Если среди проверяемых окажется хотя бы одно бракованное, то партия бракуется. Какова вероятность приема партии, если на самом деле в ней $\boldsymbol{k}$ бракованных изделий? Сравните точное значение этой вероятности с приближенным, найденным по формуле Бернулли.
(см. пример 31 и исходные данные).

Пример 32 (к задаче 45). Известно, что из каждой 1000 элементов в среднем 999 сохраняют свою работоспособность в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что из 3000 элементов все до единого сохранят свою работоспособность в течение гарантийного срока?

◁ Работу каждого элемента в течение гарантийного срока можно считать независимым опытом. Число опытов велико (n = 3000). Вероятность того, что элемент сохранит работоспособность в течение гарантийного срока, равна 0,999. Формула Бернулли из-за большого числа опытов для расчетов неприемлема. Для применения формулы Пуассона будем говорить не о работоспособных элементах, а об элементах вышедших из строя. Вероятность выхода из строя элемента $p = 0{,}001$. Тогда $\lambda = np =$ $= 3000 \cdot 0{,}001 = 3$. Все 3000 элементов сохранят свою работоспособность, если ни один из них не выйдет из строя. По формуле Пуассона $P_{3000}(0) = \dfrac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}05$. ◁

Задача 45. Каждое изделие независимо от других стандартно с вероятностью $\boldsymbol{p}$. Произведено $\boldsymbol{n}$ изделий. Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k}$ из них стандартны? (см. пример 32 и исходные данные).

Поток событий называется ***простейшим***, если выполняются следующие условия:

1. Появление того или иного числа событий на интервале времени длины t зависит только от длины этого интервала и не зависит от его расположения на оси и от событий, происходящих вне этого интервала.
2. Вероятность появления события за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине этого промежутка, т.е. $P_1(\Delta t) = \mu \cdot \Delta t$, где μ - некоторая постоянная.
3. Вероятность появления двух и более событий за малый промежуток времени Δt есть величина более высокого порядка малости по сравнению с Δt.

Из условий 1 - 3 следует, что $P_k(t) = \dfrac{(\mu t)^k}{k!} \exp(-\mu t)$.

Условие 1 означает, что события происходят независимо друг от друга и характеристики этого потока не изменяются со временем (поток стационарный). Условия 2 и 3 означают, что события происходят по одному, а не группами (поток ординарен). Величина μ называется интенсивностью простейшего потока, она равна среднему числу событий в единицу времени. Величина μt равна среднему числу событий за время t.

Все сказанное можно упрощенно сформулировать следующим образом:

Пусть события происходят независимо друг от друга во времени (или в пространстве) и по одному. Тогда, если на отрезок времени (или пространства) приходится в среднем λ событий, то вероятность появления на этом отрезке k событий приблизительно равна $P_k = \lambda^k \exp(-\lambda) / k!$.

Пример 33 (к задаче 46). Известно, что наборщик в среднем допускает одну ошибку на две страницы текста. В набранной книге взяли наугад страницу. Какова вероятность того, что на этой странице содержится более одной опечатки?

◁ Опечатки появляются по одной и независимо друг от друга. Условия простейшего потока приблизительно выполняются, и формула Пуассона приблизительно верна. На одну страницу приходится в среднем $\lambda = 1/2$ опечатки. Поэтому вероятность того, что на данной странице содержится более одной опечатки, равна

$$P(k > 1) = 1 - P(k = 0) - P(k = 1) = 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} e^{-1/2} - \frac{(1/2)^1}{1!} e^{-1/2} \approx 0{,}1. \ ◁$$

Задача 46. На многоканальный телефон фирмы поступает простейший поток вызовов. В среднем за пять минут поступает один вызов, т.е. интенсивность потока равна

$\mu = 1/5$ вызова в минуту.

В вариантах 1 – 10: какова вероятность того, что k минут подряд не будет вызовов, а в следующие 5 минут поступят два вызова? (k – номер варианта).

В вариантах 11 – 19: какова вероятность того, что в первые k минут вызовы были, а в последующие 5 минут вызовов не было? (k равно последней цифре номера варианта)

В вариантах 21 – 29: какова вероятность того, что за k минут поступит только один вызов, а в последующие 5 минут вызовов не будет?

В вариантах 20, 30: какова вероятность того, что в первые 5 минут вызоыов не будет, а в послудующие 5 минут поступит m вызовов, где m равно первой цифре варианта. (см. пример 33).

8. Функция распределения. Функция плотности вероятности. Числовые характеристики.

О п р е д е л е н и е. *Функцией распределения* случайной величины X называют функцию

$$F(\mathrm{x}) = \mathrm{P}\,(X< x\,),$$

определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение меньшее x.

Если a и b - точки непрерывности функции $F(x)$, то

$$P\,(a < X < b) = P\,(a \le X < b) = P\,(a < X \le b) = P\,(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

(см. рис. 7)

Впредь будем называть непрерывными только случайные величины с непрерывной функцией распределения. Для непрерывной случайной величины вероятность любого отдельно взятого значения равна нулю.

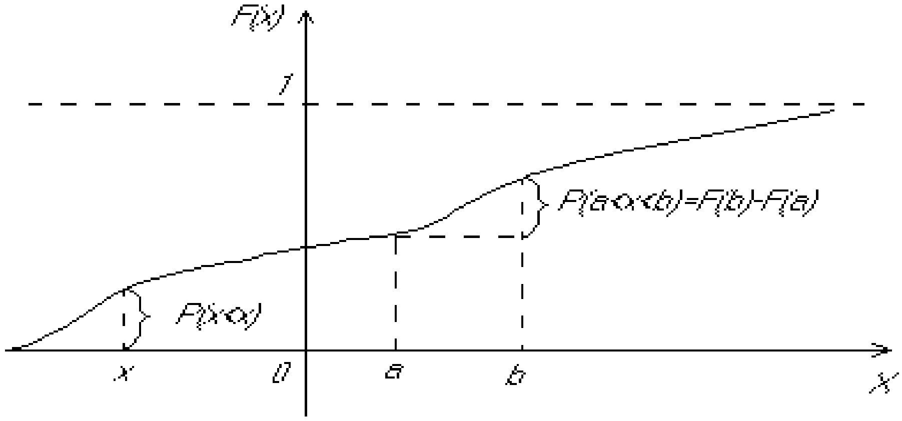


Рис. 7

Если функция распределения представима в виде $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, то подынтегральную функцию f(x) называют *функцией плотности вероятности*. Если функция распределения дифференцируема, то функцией плотности вероятности f (x) называется первая производная от функции распределения F(x), т.е. f (x) = F′(x).

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрически это означает, что вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b) численно равна площади, которая опирается на этот интервал и ограничена сверху кривой $f(x)$ (рис 8)

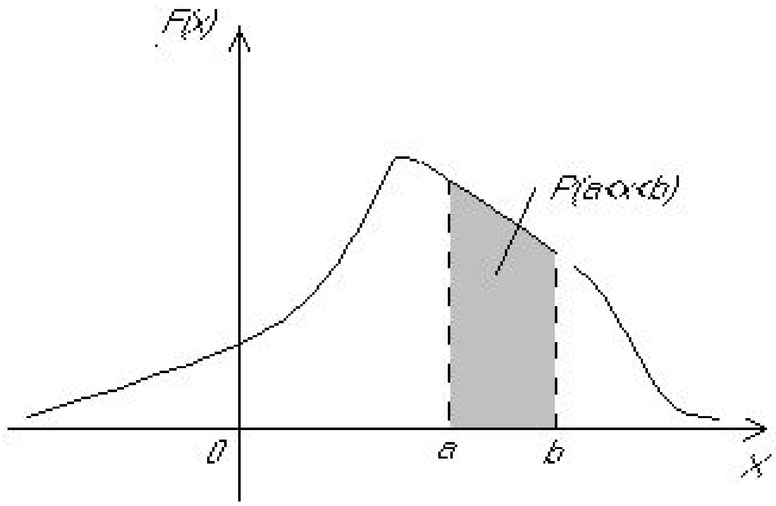


Рис 8

Свойства – признаки функции плотности вероятности:

1. $f(x) \ge 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty) = 1.$

Последнее условие называется условием нормировки. Геометрически это условие означает, что площадь, заключенная между осью абсцисс и графиком функции плотности вероятности, равна единице.

По функции плотности вероятности $f(x)$ можно найти функцию распределения случайной величины:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

О п р е д е л е н и е. *Математическим ожиданием* (или средним значением) дискретной случайной величины X называется число

$$M(X) = \sum_i x_i p_i, \qquad (3)$$

равное сумме произведений возможных значений x_i на соответствующие им вероятности p_i. Если дискретная случайная величина имеет бесконечно много значений, то требуется абсолютная сходимость ряда (3). Если ряд (3) не сходится абсолютно, то математическое ожидание такой случайной величины не существует.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, имеющей функцию плотности вероятности f(x), называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (4)$$

если интеграл абсолютно сходится. Если интеграл (4) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание не существует.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т.е. M(C) = C·1 = C.

2. Математическое ожидание суммы любого конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

3. Математическое ожидание произведения любого конечного числа взаимно <u>независимых</u> случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

С л е д с т в и е. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

О п р е д е л е н и е. Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (5)$$

Для вычисления дисперсии иногда удобно использовать другую формулу:

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2, \qquad (6)$$

т.е. дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания:

Свойства дисперсии:

С в о й с т в о 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$.

С в о й с т в о 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии с возведением в квадрат, т.е. $D(CX) = C^2 D(X)$, где C – постоянная величина.

О п р е д е л е н и е. Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания:

$$\overset{o}{X} = X - M(X).$$

Центрированные случайные величины удобно использовать в преобразованиях, так как

$$M(\overset{o}{X}) = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

$$M(\overset{o}{X})^2 = M[\,X - M(X)\,]^2 = D\,(X).$$

С в о й с т в о 3. Если случайные величины X и У <u>*независимы*</u>, то

$$D\,(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это лишает наглядности дисперсию как числовую характеристику. Поэтому для характеристики разброса значений случайной величины используют *среднее квадратическое отклонение,* которое равно положительному значению корня квадратного из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

Пример 34 (к задаче 47). Некто носит на связке пять ключей. При отмыкании замка он последовательно испытывает ключи, пока не подберет нужный. Полагая выбор ключей бесповторным, написать закон распределения числа испытанных ключей. Вычислите математическое ожидание этой случайной величины.

⊲ Обозначим через X – число испытанных ключей. Так как выбор ключей бесповторный, то X может принимать значения: 1, 2, 3, 4, 5. Случайная величина X примет значение $x_1 = 1$, если с первой попытки будет выбран нужный ключ, вероятность чего равна 1/5 в силу равновозможности выбора любого из ключей. Значение $x_2 = 2$ случайная величина примет, если при первой попытке ключ будет выбран ошибочно (вероятность чего равна 4/5) и при второй попытке будет выбран нужный ключ из оставшихся четырех(вероятность этого рана ¼). Поэтому:

$P(X = 2) = (4/5)\cdot(1/4) = 1/5;$
$P(X = 3) = (4/5)\cdot(3/4)\cdot(1/3) = 1/5;$
$P(X = 4) = (4/5)\cdot(3/4)\cdot(2/3)\cdot(1/2) = 1/5;$
$P(X = 5) = (4/5)\cdot(3/4)\cdot(2/3)\cdot(1/2)\cdot 1 = 1/5.$

Случайная величина X имеет закон распределения

X	1	2	3	4	5
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Среднее число попыток равно

$M(X) = 1\cdot 1/5 + 2\cdot 1/5 + 3\cdot 1/5 + 4\cdot 1/5 + 5\cdot 1/5 = 3.$ ▷

Задача 47. В урне ***n*** белых и ***m*** черных шаров. Шары вынимают из урны по одному без возвращения, пока не выберут черный шар. Пусть X – число вынутых шаров. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание (см. пример 34 и исходные данные).

Пример 35 (к задаче 48)**.** Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет герб, или 5 раз подряд не выпадет цифра. Пусть X – число бросков монеты. Напишите закон распределения случайной величины X и найдите ее математическое ожидание.

◁ Если при первом же броске выпадет герб, то $X = 1$, вероятность чего равна ½ . Бросков понадобится два, если сначала выпадет цифра, а при втором броске – герб. Вероятность такого исхода равна (½) · (½) = ¼. Монету придется бросать трижды, если сначала дважды выпадет цифра и при третьем броске - герб. Вероятность этого равна (½) · (½) · (½) = 1/8. Аналогично P(X = 4) = (½) · (½) · (½) · (½) = 1/16. Если четыре раза подряд выпадет цифра, то необходим пятый бросок, который независимо от результата (с вероятностью 1) будет последним. Поэтому P(X = 5) = (½) · (½) · (½) · (½) · 1 = 1/16. Закон распределения числ бросков имеет вид

X	1	2	3	4	5
P	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Среднее число бросков равно

$M(X) = 1\cdot 1/2 + 2\cdot 1/4 + 3\cdot 1/8 + 4\cdot 1/16 + 5\cdot 1/16 = 31/16 \approx 2.$ ▷

Задача 48. Стрелок стреляет в цель, пока не попадет, либо пока не сделает ***m*** промахов. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна ***p***. Пусть X - число произведенных выстрелов. Напишите закон распределения для случайной величины X и найдите ее математическое ожидание (см. пример 35 и исходные данные).

Пример 36 (к задаче 49)**.** Из 12 изделий три имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны 4 изделия. Напишите закон распределения числа изделий со скрытыми дефектами среди выбранных

◁ Пусть X – число деталей со скрытыми дефектами среди выбранных четырех. Это дискретная случайная величина с возможными значениями 0,1,2,3. Четыре детали из 12 можно выбрать $C_{12}^4 = 495$ способами. Значению $X = 0$ благоприятствуют $C_9^4 = 126$ способов выбора изделия. Поэтому $P(X = 0) = 126/495 = 14/55$. Значению $X = 1$ благоприятствуют $C_3^1 \cdot C_9^3 = 252$ способа, $P(X = 1) = 252/495 = 28/55$. Значению $X = 2$ благоприятствуют $C_3^2 \cdot C_9^2 = 108$ способов, $P(X = 2) = 108/495 = 12/55$. Наконец, значению $X = 3$ благоприятствуют $C_3^3 \cdot C_9^1 = 9$ способов, $P(X = 3) = 9/495 = 1/55$. Случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2	3
P	14/55	28/55	12/55	1/55

Среднее число деталей со скрытыми дефектами в выборке равно

$M(X) = 0\cdot 14/55 + 1\cdot 28/55 + 2\cdot 12/55 + 3\cdot 1/55 = 1.$ ▹

Задача 49. В партии из n изделий m имеют скрытые дефекты. Наугад выбраны **r** изделий. Пусть X - число бракованных изделий среди выбранных. Напишите закон распределения для случайной величины X и вычислите ее математическое ожидание. (см. пример 36 и исходные данные).

Пример 37 (к задаче 50)**.** Случайная величина X принимает значения 1,3,5,7,9 с вероятностями $P(X=k) = a\cdot k$. Найти математическое ожидание X.

◃ Так как сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, то $a\cdot 1 + a\cdot 3 + a\cdot 5 + a\cdot 7 + a\cdot 9 = a\cdot 25 = 1$, то $a = 1/25$ $P(X=k) = k/25$. Поэтому $M(X) = 1\cdot 1/25 + 3\cdot 3/25 + 5\cdot 5/25 + 7\cdot 7/25 + 9\cdot 9/25 = 165/25 = 6{,}6.$ ▹

Задача 50. Случайная величина X принимает значения n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Вероятность $P(X = x) = s\cdot x$, где s – некоторая постоянная величина. Найдите значение s , запишите закон распределения X, вычислите математическое ожидание X. (n – номер варианта; см пример 37).

Пример 38 (к задаче 51). Из чисел 1,2,3, …, 20 наугад без возвращения выбирают 8 чисел. Найти математическое ожидание их суммы.

◃ Обозначим через X_i число, выбранное i – м по порядку. Тогда для любого $m = 1,2,3, \dots, 20$ имеем $P(X_i = m) = \frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\ldots\cdot\frac{20-m+1}{20-m+2}\cdot\frac{1}{20-m+1} = \frac{1}{20}.$

Например, вероятность того, что пятое по порядку число будет равно m равна $P(X_i = m) = \frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{20}.$ Это означает, для i – го по порядку числа равновозможны все значения от 1 до 20. Поэтому математическое ожидание i – го числа равно $M(X_i) = 1\cdot\frac{1}{20} + 2\cdot\frac{1}{20} + \dots + 20\cdot\frac{1}{20} = 10{,}5.$ Сумма выбранных чисел $Y = \sum_{i=1}^{8} X_i$ имеет математическое ожидание $M(Y) = \sum_{i=1}^{8} M(X_i) = 8\cdot 10{,}5 = 84.$ ▹

Задача 51. Из чисел от 1 до n выбирают наугад без возвращения k чисел. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел. ($n =$ номеру варианта плюс 5). Найдите математическое ожидание суммы этих чисел при повторном выборе. (см. пример 38 и исходные данные).

Пример 39 (к задаче 52). На круговом экране локатора равновозможно появление пятна в каждой точке экрана. Радиус экрана равен R. Найти закон распределения расстояния от центра экрана до пятна. Найти математическое ожидание и дисперсию этого расстояния.

◃ Обозначим через X расстояние от центра экрана до пятна. Это расстояние будет меньше x, если пятно попадет внутрь круга радиуса x. Вероятность этого по геометрическому определению вероятности равна отношению площади круга радиуса x к площади всего экрана локатора. Поэтому функция распределения случайной величины X имеет вид F(x) = 0 при x ≤ 0, $F(x) = P(X< x) = \dfrac{\pi x^2}{\pi R^2} = \dfrac{x^2}{R^2}$ при 0< x < R

и F(x) = 1 при R< x. Тогда функция плотности вероятности $f(x) = 2x/R^2$ при 0< x < R, а

$$M(X) = \int_0^R X\cdot\frac{2X}{R^2}\,dx = 2R/3 \quad \text{и} \quad D(X) = \int_0^R (x-2R/3)^2\cdot 2x/R^2\cdot dx = = R^2/18. \ \rhd$$

Задача 52. Зона ответственности локатора определяется в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $\rho_1 \le \rho \le 100$. В случайной точке зоны ответственности может появиться цель. Расстояние ее от локатора – случайная величина X. Считая равновозможными все положения цели в зоне ответственности, найдите функцию распределения случайной величины X и ее функцию плотности вероятности. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
(см. пример 39 и исходные данные)

Пример 40 (к задачам 53, 54 и 55)). Случайная величина X

$$F(x) = P(X<x) = \begin{cases} 0, & при\ x<0; \\ x^2/36, & при\ \ x\in[0,6]; \\ 1, & при\ \ x>6. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X<4)$, $P(2<X<5)$, $P(X>3)$.

$\lhd$ Найдем сначала функцию плотности вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & при\ x<0; \\ x/18, & при\ \ x\in[0,6]; \\ 0, & при\ \ x>6. \end{cases}$$

Тогда $M(X) = \int_0^6 x\cdot\frac{x}{18}\,dx = 4$, $M(X^2) = \int_0^6 x^2\cdot\frac{x}{18}\,dx = 18$.

Поэтому $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2$.
С учетом определения и свойств функции распределения $F(x)$ имеем
$P(X<4) = F(4) = 4/9$; $P(2<X<5) = F(5) - F(2) = 25/36 - 4/36 = 7/12$;
$P(X>3) = 1 - P(X<3) = 1 - F(3) = 1 - 9/36 = 3/4$. (В последнем случае учтено, что $P(X=3)=0$ в силу непрерывности случайной величины X. $\rhd$
0

Задача 53. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x<a; \\ \sqrt{x-a}, & при\ \ x\in[a,a+1]; \\ 1, & при\ \ x>a+1. \end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $P(X<a+\frac{1}{9})$, $P(a+\frac{1}{16}<X<a+\frac{1}{4})$, $P(X>\frac{1}{4})$.

(***a*** - номер варианта.)

Задача 54. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0;\\ \dfrac{4(ax-x^2)}{a^2}, & при\quad x\in[0,\dfrac{a}{2}];\\ 1, & при\quad x>\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, $P(X<a/4)$, $P(a/8<\ X\ <a/4)$.
(***a*** – номер варианта).

Задача 55. Случайная величина X имеет распределение Парето с плотностью вероятности

$f(x) = \dfrac{a}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a+1}$ при $x_0\ \le x$ и $f(x) = 0$ при $x < x_0$, ($a > 0$ и $x_0 > 0$).

Найдите $M(x)$ и $P(x_0\ \le x\ <\ x_0+a)$.
(x_0 - номер варианта, a = 2 в вариантах 1-10, a = 3 в вариантах 11 – 20 и a = 4 в вариантах 21 – 31.)

9. Нормальный закон распределения.

Нормальный закон распределения имеет плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad (7)$$

где $-\infty<m<\infty$ и $\sigma>0$ - некоторые параметры.

График функции плотности вероятности (7) имеет максимум в точке $x = m$, а точки перегиба отстоят от точки m на расстояние σ. При $x\to\ \pm\infty$ функция (7) асимптотически приближается к нулю (ее график изображен на рис. 9).

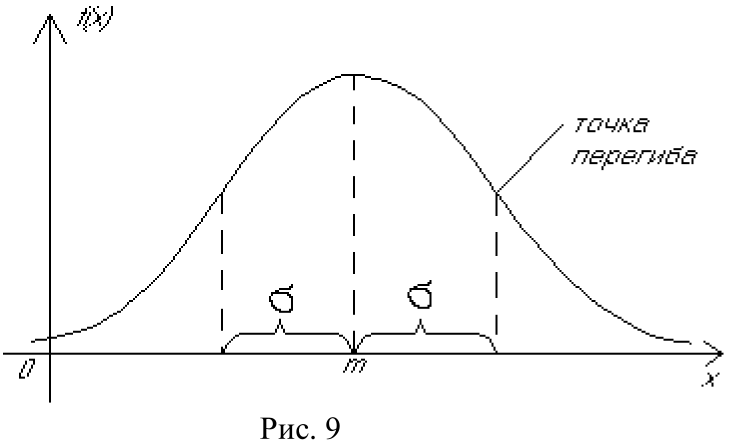


Рис. 9

Помимо геометрического смысла, параметры нормального закона распределения имеют и вероятностный смысл. Параметр m равен математическому ожиданию нормально распределенной случайной величины, а дисперсия $D(X) = \sigma^2$.

Если $X \sim N(m; \sigma^2)$, т.е. X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ^2, то

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \qquad (8)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt$ - функция Лапласа.

Значения функции $\Phi(x)$ можно найти по таблице (см. приложение 2). Функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Поэтому ее таблица дана только для неотрицательных x. График функции Лапласа изображен на рис. 10. При значениях $x > 5$ она практически остается постоянной. Поэтому в таблице даны значения функции только для $0 \le x \le 5$. При значениях $x > 5$ можно считать, что $\Phi(x) = 0,5$.

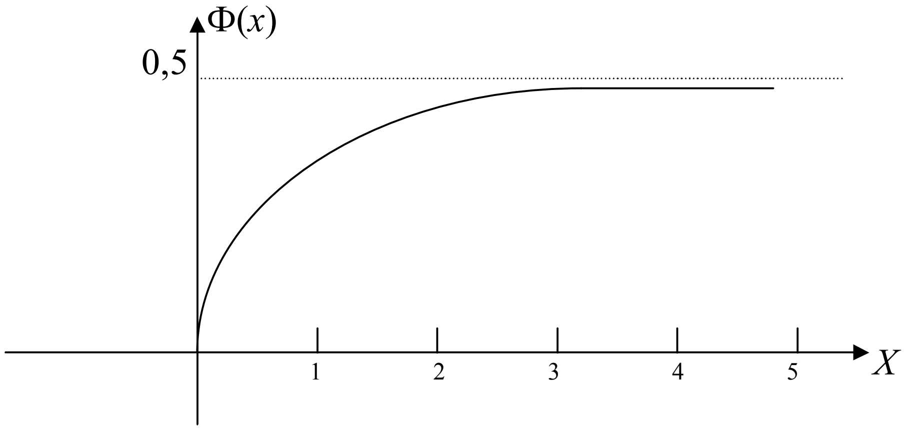


Рис. 10.

Если $X \sim N(m; \sigma^2)$, то

$$P(|X-m| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \qquad (9)$$

Пример 41 (к задаче 56). Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Известно, что $P(X < 6) = 0,9332$, а $P(X > 5) = 0,1587$. Найти значения параметров m и σ^2.

◁ Воспользуемся формулой (7).

$$P(X < 6) = P(\infty < X < 6) = \Phi\left(\frac{6-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{6-m}{\sigma}\right) + \Phi(\infty) = 0,9332. \triangleright$$

Так как $\Phi(\infty) = 0,5$, то $\Phi\left(\frac{6-m}{\sigma}\right) = 0,4332$. По таблице функции Лапласа находим, что $\Phi(1,5) = 0,4332$. Поэтому $\frac{6-m}{\sigma} = 1,5$ или $6 - m = 1,5\sigma$.

Аналогично $P(X > 5) = P(5 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = 0,1587.$

Так как $\Phi(\infty) = 0,5$, то $\Phi\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = 0,3413$. По таблице функции Лапласа находим, что

$\Phi(1) = 0{,}3413$. Поэтому $\dfrac{5-m}{\sigma} = 1$ или $5 - m = 1\sigma$. Из системы двух уравнений $6 - m = 1{,}5\sigma$. и $5 - m = 1\sigma$ находим, что $m = 3$, а $\sigma = 2$, т.е. $\sigma^2 = 4$. ▹

Задача 56. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(m;\sigma^2)$. Известно, что:
а) для нечетных вариантов $P(X < \text{a}) = \alpha$, а $P(X < \text{b}) = \beta$;
б) для четных вариантов $P(X < \text{a}) = \alpha$, а $P(X > \text{b}) = \beta$.
Найдите значения параметров m и σ^2. (см. пример 41 и исходные данные).

Исходные данные к расчетным заданиям
(В верхней строке указаны номера задач, а в крайнем левом столбце – номера вариантов)

№	К задаче 1				К зазаче 2		К задачам 3 и 4				
	n_1	n_2	k_1	k_2	n	k	n_1	n_2	n_3	n_4	k
1	4	8	3	2	4	3	4	5	4	6	4
2	8	4	3	2	5	3	4	4	5	3	3
3	4	8	2	4	6	3	3	4	4	5	3
4	5	8	3	2	7	3	4	5	4	6	4
5	8	3	2	3	6	4	5	3	4	3	3
6	8	6	3	4	7	4	5	4	4	6	4
7	8	5	4	3	8	3	4	5	3	4	3
8	4	8	2	3	8	4	6	3	4	3	3
9	6	8	2	3	8	5	6	4	4	3	3
10	6	7	3	2	9	3	6	3	4	4	3
11	6	9	2	2	9	4	4	5	4	5	4
12	9	6	4	2	9	5	4	3	4	3	3
13	9	5	4	3	7	5	6	5	4	5	4
14	9	6	3	4	10	3	5	6	5	4	3
15	6	10	2	4	10	4	5	4	4	3	3
16	6	9	3	2	10	5	6	4	6	5	4
17	10	6	4	2	8	6	6	5	4	5	4
18	10	4	4	3	11	3	6	3	4	4	3
19	5	6	2	3	11	4	6	4	6	4	4
20	6	5	3	2	11	5	4	6	5	3	3
21	6	8	4	5	12	3	3	6	5	5	3
22	8	6	5	2	12	4	6	5	6	4	4
23	5	8	2	3	13	3	6	3	4	3	3
24	5	8	3	2	13	4	7	5	4	4	4
25	8	6	5	3	14	3	5	6	3	4	3
26	8	6	2	4	14	4	7	6	4	5	4
27	6	7	2	3	15	3	6	7	3	4	3
28	7	6	2	3	15	4	7	6	6	4	4
29	8	7	3	4	16	3	3	6	7	5	3
30	8	7	3	5	16	4	3	7	6	4	3
31	7	8	4	3	12	5	4	7	5	6	4

№	К задаче 8				К задаче 9							
	N	M	n	m	N_1	N_2	N_3	N_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	10	3	4	2	2	4	1	3	1	2	1	2
2	10	3	5	2	2	4	1	3	1	3	1	2
3	10	4	3	2	2	2	4	3	1	1	2	2
4	10	4	4	2	2	2	4	3	1	2	1	2
5	10	4	4	3	2	2	4	3	1	2	2	2
6	12	3	3	2	2	4	2	3	1	2	2	2
7	12	3	4	2	2	4	2	3	2	2	1	2
8	12	3	4	3	2	4	2	3	2	1	2	1
9	12	3	5	2	2	4	2	3	1	3	1	2
10	12	4	5	3	2	4	2	3	1	2	1	2
11	12	4	3	2	3	1	4	2	2	1	2	1
12	12	4	4	2	3	1	4	2	2	1	3	1
13	12	4	4	3	3	1	4	2	2	1	2	2
14	12	5	3	2	2	4	2	3	1	2	2	2
15	12	5	4	2	2	4	2	3	1	3	1	2
16	9	3	3	2	3	4	2	3	2	2	1	2
17	9	4	3	2	4	3	2	3	2	1	1	2
18	9	4	4	2	2	4	2	3	2	3	1	2
19	9	4	4	3	2	4	2	3	1	1	2	2
20	9	5	3	2	2	4	2	3	1	2	1	2
21	9	5	4	2	4	2	3	2	2	1	1	1
22	9	5	4	3	4	2	3	2	3	1	1	2
23	11	3	3	2	4	3	3	2	2	1	2	1
24	11	3	4	2	4	2	3	3	2	1	1	2
25	11	3	4	3	4	3	3	2	3	2	1	2
26	11	4	3	2	4	4	3	2	2	2	1	1
27	11	4	4	2	2	3	3	5	1	2	1	2
28	11	4	4	3	3	2	3	5	1	2	2	2
29	14	3	3	2	3	5	2	4	2	1	1	1
30	14	3	4	2	3	3	2	5	2	1	1	3
31	14	3	4	3	4	3	3	5	2	2	1	3

№	11		12			13		15		17		
	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	k	m	n	k	n	m	r
1	4	2	8	3	4	8	3	7	3	5	4	2
2	4	3	8	4	3	8	4	8	3	5	4	1
3	5	2	8	2	5	8	5	8	4	6	4	2
4	5	3	6	5	2	8	6	9	3	6	4	1
5	6	2	7	2	6	9	3	9	4	7	4	2
6	6	3	7	6	2	9	4	10	3	7	4	1
7	6	4	7	3	5	9	5	10	4	7	3	1
8	6	5	7	5	3	9	6	10	5	7	5	2
9	6	6	7	4	4	10	3	11	3	8	4	1
10	7	2	8	2	3	10	4	11	5	8	4	2
11	7	3	9	4	2	10	5	11	4	8	4	1
12	7	4	9	3	4	10	6	12	3	8	5	2

13	7	5	9	4	3	6	4	12	4	8	5	1
14	7	6	9	3	3	7	4	12	5	8	5	3
15	8	2	9	3	5	7	3	12	6	9	4	2
16	8	3	9	5	3	7	5	13	3	9	4	1
17	8	5	8	4	4	6	5	13	4	9	5	1
18	8	6	8	3	5	12	3	13	5	9	5	2
19	9	2	8	5	3	12	4	13	6	9	5	3
20	9	3	8	2	6	12	5	14	3	9	6	1
21	9	4	8	6	2	12	5	14	4	9	6	2
22	9	5	9	3	4	14	3	14	5	9	6	3
23	9	6	9	2	5	14	4	14	6	9	6	4
24	9	7	9	4	3	14	5	15	3	10	5	1
25	10	2	9	5	2	14	6	15	4	10	5	2
26	10	3	9	5	4	16	4	15	5	10	5	3
27	10	4	9	4	5	16	5	15	6	10	6	1
28	10	5	9	3	6	16	6	16	3	10	6	2
29	10	6	9	6	3	11	4	16	4	10	6	3
30	10	7	9	2	7	11	5	16	5	10	6	4
31	10	8	9	7	2	11	6	16	5	10	7	2

№	18		20			21		22		23	24		25				
	k_1	k_2	a	b	c	m	n	m_1	m_2	k	n	k	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2
1	2	5	1	3	4	2	1	2	2	2	5	4	2	2	2	1	1
2	2	6	1	-3	2	1	2	2	3	3	5	5	2	3	2	2	1
3	2	7	1	5	6	1	3	2	4	4	6	3	2	3	1	2	2
4	2	8	1	-8	2	1	4	2	5	5	6	4	2	2	2	2	1
5	3	3	1	-5	4	5	1	2	6	6	6	5	2	3	2	1	1
6	3	5	1	-7	6	6	1	3	2	7	6	6	2	3	1	1	1
7	3	6	1	-15	2	7	1	3	4	8	7	3	2	2	2	2	2
8	3	7	1	-24	2	8	1	3	5	9	7	4	2	3	2	2	2
9	3	8	4	-3	4	2	2	3	6	11	7	5	2	3	1	2	1
10	4	2	4	-3/4	2	2	3	4	2	2	7	6	2	3	1	2	2
11	4	3	1	-3/4	1	3	1	4	3	2	7	7	1	2	1	1	1
12	4	4	4	-8	4	3	2	4	4	3	8	3	1	2	1	2	1
13	4	5	9	-3	-6	4	1	4	5	4	8	4	1	2	1	2	2
14	4	6	3	1	4	2	4	4	6	5	8	5	2	2	1	1	1
15	4	7	5	1	6	5	3	5	2	6	8	6	2	2	1	2	1
16	4	8	-8	1	2	2	5	5	3	7	8	7	2	2	1	2	2
17	5	3	-7	1	6	3	3	5	4	8	8	8	1	1	1	1	1
18	5	4	-5	1	4	3	4	5	5	9	9	3	1	1	1	2	1
19	5	5	-3	1	2	4	3	5	6	10	9	4	1	1	1	2	2
20	5	6	-3	4	4	4	4	6	2	11	9	5	3	2	1	1	1
21	5	7	-8	4	4	4	5	6	3	2	9	6	3	2	1	2	1
22	5	8	-15	4	4	-2	1	6	4	3	9	7	3	2	1	2	2
23	6	3	-5	1	4	-1	2	6	5	4	9	8	1	2	1	1	1
24	6	6	9	-3	-6	-1	3	6	6	5	9	9	1	2	1	2	1
25	6	7	4	-3	4	-1	4	7	2	6	10	3	1	2	1	2	2
26	6	8	15	1	8	-5	1	7	3	7	10	4	1	3	1	1	1
27	7	7	4	5	12	-6	1	7	4	8	10	5	1	3	1	2	1

28	7	8	12	1	8	-7	1	7	5	9	10	6	1	3	1	2	2
29	8	8	1	8	5	-8	1	1	3	10	10	7	3	3	1	1	1
30	8	6	5	4	12	-2	2	1	4	11	10	8	3	3	1	2	1
31	8	4	4	-15	4	-2	3	1	5	12	10	9	3	3	1	2	2

№	26						28	31				32	
	n_1	n_2	n_3	m_1	m_2	m_3	n	p_1	p_2	p_3	i	n	m
1	3	5	7	2	2	5	4	0,7	0,6	0,4	3	5	2
2	3	5	6	5	2	3	3	0,7	0,6	0,3	2	5	3
3	4	3	8	3	2	5	5	0,4	0,7	0,9	1	5	4
4	8	4	3	3	2	5	7	0,8	0,3	0,4	3	5	5
5	3	7	5	5	2	3	9	0,8	0,3	0,4	2	6	2
6	5	3	7	3	5	2	8	0,8	0,3	0,4	1	6	3
7	5	7	3	4	3	3	4	0,4	0,5	0,7	3	6	4
8	7	3	5	3	4	3	5	0,4	0,5	0,7	2	6	5
9	4	5	6	4	3	3	3	0,4	0,5	0,7	1	6	6
10	5	4	6	2	4	4	7	0,8	0,6	0,3	3	7	2
11	5	6	4	4	2	4	9	0,8	0,6	0,3	2	7	3
12	6	5	4	4	4	2	10	0,8	0,6	0,3	1	7	4
13	4	6	5	3	5	4	8	0,4	0,5	0,8	3	7	5
14	6	5	4	5	3	4	3	0,4	0,5	0,8	2	7	6
15	2	6	7	5	4	3	4	0,4	0,5	0,6	1	8	2
16	5	2	8	6	3	3	7	0,5	0,3	0,7	3	8	3
17	4	5	1	6	3	2	5	0,5	0,3	0,7	2	8	4
18	5	2	3	2	4	4	9	0,5	0,7	0,3	1	8	5
19	6	3	2	4	6	2	8	0,5	0,4	0,7	3	8	6
20	3	5	4	6	2	2	4	0,5	0,3	0,7	2	9	2
21	3	4	5	5	3	6	3	0,5	0,3	0,7	1	9	3
22	3	4	5	3	6	2	10	0,5	0,4	0,8	3	9	4
23	2	5	7	4	3	3	5	0,5	0,4	0,8	2	5	6
24	2	6	4	8	3	1	7	0,5	0,4	0,8	1	5	7
25	6	4	3	2	3	5	8	0,4	0,6	0,8	3	5	8
26	6	4	4	3	5	7	9	0,4	0,7	0,3	2	6	7
27	7	3	4	5	2	4	3	0,3	0,5	0,6	3	6	8
28	7	4	3	6	5	2	4	0,3	0,4	0,8	2	6	9
29	6	3	4	5	4	3	5	0,7	0,4	0,6	2	7	7
30	6	5	3	8	3	4	7	0,6	0,5	0,3	3	7	7
31	7	3	4	6	5	2	8	0,7	0,4	0,6	2	8	7

№	33		36			37			38		39			
	n	k	n	m	p	n	p	k	n	k	p_1	p_2	k_1	k_2
1	4	1	2	3	0,3	5	½	3	8	6	0,95	0,85	0	2
2	4	2	3	3	0,4	5	½	-1	8	4	0,95	0,80	1	2
3	4	3	4	3	0,2	5	½	-3	8	2	0,90	0,85	0	2
4	5	1	5	3	0,5	5	½	1	8	-2	0,90	0,80	0	2
5	5	2	5	2	0,3	5	⅓	3	8	-4	0,90	0,75	1	2
6	5	3	5	4	0,6	5	⅓	1	8	-6	0,90	0,70	0	2
7	5	4	5	4	0,4	5	⅓	-1	10	8	0,85	0,80	1	2

8	6	1	3	5	0,2	5	⅓	-3	10	6	0,85	9,75	0	2
9	6	2	3	6	0,4	6	¼	4	9	7	0,85	0,75	1	2
10	6	3	3	7	0,3	6	¼	0	9	5	0,80	0,70	2	2
11	6	4	4	3	0,3	6	¼	2	9	3	0,95	0,75	0	2
12	6	5	4	4	0,2	6	¼	-4	9	1	0,95	0,70	0	2
13	7	1	4	5	0,4	6	¼	-2	9	-1	0,90	0,65	1	2
14	7	2	4	5	0,2	6	½	0	9	-3	0,90	0,60	1	2
15	7	3	5	2	0,4	6	½	2	9	-5	0,85	0,60	1	2
16	7	4	5	2	0,6	6	½	4	9	-7	0,85	0,80	1	2
17	7	5	5	3	0,3	7	½	5	10	4	0,90	0,70	1	2
18	7	6	5	4	0,3	7	½	3	10	2	0,90	0,75	2	2
19	8	1	5	5	0,2	7	½	1	10	-2	0,80	0,75	1	2
20	8	2	5	5	0,4	7	½	-1	10	-4	0,80	0,65	1	2
21	8	3	6	2	0,3	7	½	-3	10	-6	0,80	0,65	2	2
22	8	4	6	3	0,2	7	½	-5	10	-8	0,90	0,70	2	2
23	8	5	6	4	0,6	7	⅓	5	12	10	0,90	0,70	1	2
24	8	6	6	2	0,5	7	⅓	3	12	8	0,80	0,70	1	2
25	9	1	6	3	0,4	7	⅓	1	12	6	0,80	0,70	0	3
26	9	2	7	2	0,2	7	⅓	-1	12	4	0,90	0,75	1	3
27	9	3	7	3	0,3	7	¼	-5	12	2	0,90	0,65	1	3
28	9	4	5	6	0,4	7	¼	-3	12	-2	0,90	0,65	2	2
29	9	5	7	4	0,3	7	¼	-1	12	-4	0,90	0,75	1	2
30	9	6	7	5	0,4	7	¼	5	12	-6	0,95	0,75	2	2
31	9	7	7	3	0,2	7	¼	3	12	-8	0,95	0,75	1	3

№	40				41							43			44		
	m_1	m_2	n	k	m_1	m_2	m_3	n	k_1	k_2	k_3	p	n	k	n	m	k
1	1	2	6	2	3	5	2	6	2	2	2	0,01	200	1	100	10	1
2	1	2	8	2	3	5	2	6	2	3	1	0,01	200	2	100	10	2
3	1	2	10	2	4	5	3	6	2	2	2	0,01	200	3	100	10	3
4	3	1	8	2	4	5	3	6	2	3	1	0,015	200	1	100	20	1
5	3	1	10	2	4	5	3	6	3	2	1	0,015	200	2	100	15	1
6	2	1	6	2	4	5	3	7	3	2	2	0,015	200	3	200	10	2
7	2	1	8	2	4	5	3	7	2	3	2	0,02	200	2	200	10	4
8	3	1	6	2	5	4	3	7	2	2	3	0,02	200	3	200	20	2
9	2	1	10	4	5	4	3	6	3	2	1	0,02	200	4	200	20	1
10	1	2	8	4	3	4	3	6	3	1	2	0,004	250	1	200	30	1
11	1	2	12	4	4	5	3	7	3	2	2	0,004	250	3	75	15	1
12	1	2	10	4	3	5	4	6	2	3	1	0,004	250	2	50	5	1
13	2	3	6	2	3	5	4	6	2	2	2	0,008	250	1	75	5	3
14	2	3	8	4	3	5	4	7	2	3	2	0,008	250	2	75	10	3
15	2	3	10	4	3	5	4	7	2	4	1	0,008	250	3	50	10	1
16	3	2	6	2	3	4	2	6	2	2	2	0,01	300	2	100	5	1
17	3	2	8	4	3	4	2	6	2	3	1	0,01	300	3	100	15	2
18	3	2	10	4	3	5	3	6	2	2	2	0,01	300	4	300	30	3

19	4	2	6	2	3	4	4	6	2	2	2	0,0025	400	1	300	25	3
20	4	2	8	4	3	4	4	7	2	2	3	0,0025	400	2	300	50	3
21	4	2	10	4	3	4	4	6	1	2	3	0,0025	400	3	400	40	2
22	2	4	6	2	4	4	3	6	3	2	1	0,005	400	1	400	20	2
23	2	4	8	4	4	4	3	6	1	3	2	0,005	400	2	500	50	2
24	2	4	10	4	4	4	3	7	3	3	1	0,005	400	3	500	25	4
25	4	3	6	2	4	4	3	7	3	2	2	0,005	600	2	500	25	2
26	4	3	8	2	4	4	2	6	2	2	2	0,005	600	3	150	10	3
27	4	3	10	4	4	4	2	6	3	2	1	0,005	600	4	150	15	1
28	3	4	6	2	4	3	4	6	3	1	2	0,0025	800	1	150	30	1
29	3	4	8	4	2	4	4	6	1	2	3	0,0025	800	2	150	15	2
30	3	4	10	4	2	4	4	7	1	3	3	0,0025	800	3	200	10	1
31	3	4	8	2	2	4	4	7	2	2	3	0,005	800	2	400	10	2

№	45			47		48		49			51	52		
	p	n	k	n	m	p	m	n	m	r	k	φ_1	φ_2	ρ_1
1	100	0,99	100	4	2	0,6	5	10	4	3	5	0	$\pi/4$	0
2	100	0,97	98	4	3	0,6	4	10	5	3	4	0	$\pi/2$	0
3	100	0,98	96	5	4	0,6	6	10	3	3	4	0	π	0
4	100	0,99	97	3	2	0,4	4	10	4	4	5	$\pi/4$	$3\pi/4$	0
5	100	0,99	99	5	2	0,4	5	10	5	4	4	0	$3\pi/4$	0
6	200	0,99	200	5	3	0,4	6	10	3	4	5	$\pi/4$	π	0
7	200	0,98	197	6	1	0,7	4	9	4	3	5	0	$\pi/4$	10
8	100	0,99	98	4	4	0,7	5	9	3	3	6	0	$\pi/2$	10
9	100	0,98	100	6	2	0,7	6	9	5	3	6	0	π	10
10	100	0,98	99	6	3	0,3	5	9	4	4	4	$\pi/4$	$3\pi/4$	10
11	200	0,99	198	6	4	0,3	4	9	3	4	5	0	$3\pi/4$	10
12	100	0,97	96	6	5	0,3	6	9	5	4	6	$\pi/4$	π	10
13	200	0,98	199	6	6	0,8	4	8	4	3	4	0	$\pi/4$	20
14	100	0,97	95	5	5	0,8	5	8	2	3	5	0	$\pi/2$	20
15	200	0,985	200	5	2	0,8	6	8	3	3	6	0	$\pi/6$	20
16	100	0,98	98	4	4	0,5	4	8	4	4	7	$\pi/4$	$3\pi/4$	20
17	200	0,985	197	4	5	0,6	6	8	3	4	8	0	$3\pi/4$	20
18	100	0,98	97	4	6	0,45	4	8	5	3	9	$\pi/4$	π	20
19	200	0,98	195	4	7	0,45	5	12	5	3	5	0	$\pi/4$	30
20	200	0,99	199	4	8	0,45	6	12	4	3	6	0	$\pi/2$	30
21	200	0,98	200	4	9	0,55	4	12	3	3	7	0	π	30
22	200	0,99	197	4	10	0,55	5	12	5	4	8	$\pi/4$	$3\pi/4$	30
23	200	0,98	198	5	6	0,55	6	11	5	4	9	0	$3\pi/4$	30
24	100	0,97	99	5	7	0,65	4	12	4	4	7	$\pi/4$	π	30
25	100	0,97	97	5	8	0,65	5	12	3	4	9	0	$\pi/4$	40
26	200	0,99	197	5	9	0,65	6	11	4	3	6	0	$\pi/2$	40
27	200	0,98	196	5	10	0,75	4	11	5	3	4	0	π	40
28	200	0,99	196	6	7	0,75	5	11	3	3	5	0	$3\pi/2$	40
29	300	0,99	298	6	8	0,75	6	11	4	4	6	0	$\pi/2$	50
30	300	0,98	295	6	9	0,35	4	11	3	4	7	0	$\pi/4$	50
31	300	0,99	299	6	10	0,35	5	12	2	4	6	0	π	50

№	56				59				60		
	a	α	b	β	p	n	k_1	k_2	p%	n	k
1	-2	0,0668	3	0,8413	0,02	500	5	12	15	200	25
2	-1	0,1587	5	0,0227	0,02	400	6	20	35	200	65
3	-1	0,4332	4	0,8413	0,02	600	9	14	20	150	25
4	0	0,1587	6	0,0227	0,02	700	10	16	25	200	55
5	-2	0,1587	1	0,6915	0.02	800	12	20	30	100	25
6	2	0,8413	-1	0,6915	0,02	900	14	20	40	100	45
7	1	0,1587	5	0,8413	0,02	1000	15	22	25	200	45
8	1	0,1587	5	0,1587	0,01	1000	8	14	15	200	35
9	-6	0,0227	3	0,8413	0,03	500	10	15	45	100	50
10	3	0,1587	6	0,0227	0,03	600	14	16	50	100	45
11	-3	0,1587	0	0,6915	0,03	700	16	24	10	400	35
12	-3	0,1587	0	0,3085	0,03	800	18	26	20	150	35
13	0	0,3446	5	0,7258	0,01	800	6	12	20	200	45
14	-1/2	0,4013	2	0,8413	0,01	900	6	13	60	200	115
15	-3	0,1587	0	0,0227	0,01	1000	8	14	50	150	70
16	-1/2	0,4013	2	0,1587	0,01	1500	12	20	60	200	125
17	5	0,6915	2	0,1587	0,01	2000	14	22	50	150	80
18	5	0,6915	2	0,8413	0,01	1200	8	14	50	300	140
19	2	0,0227	8	0,8413	0,01	1400	10	16	50	200	90
20	2	0,0227	8	0,1587	0,01	1600	12	18	50	200	105
21	3	0,1587	12	0,9773	0,01	1500	10	16	70	100	65
22	3	0,1587	4,5	0,6915	0,02	500	8	12	50	200	110
23	0	0,3085	6	0,8413	0,02	400	6	15	50	200	95
24	0	0,3085	6	0,6915	0,02	600	8	12	35	200	75
25	-2	0,1587	4	0,6915	0,01	900	7	10	20	300	55
26	-2	0,1587	4	0,3085	0,03	400	8	13	20	300	65
27	2	0,5000	4	0,6915	0,02	400	7	12	20	300	70
28	4	0,6915	2	0,5000	0,01	700	4	10	25	300	80
29	-3	0,1587	0	0,9773	0,02	200	3	9	25	400	90
30	0	0,3446	5	0,2742	0,01	300	3	8	25	400	105
31	-1	0,2742	4	0,6554	0,04	250	5	10	25	300	50