13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):$ $: y=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ \ 1\le y\le 2\}$.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xds$, где L – верхняя половина кривой $r=1+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi$.

15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xzdx+axdy-x^2dz$, где L – часть кривой $x+y+z=a,\ \ az=xy$ $x\ge 0,\ \ y\ge 0$ от точки $A=(0,a,0)$ до точки $B=(a,0,0)$.

16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (e^{-x}\cos y-y^2)dx+(e^{-x}\sin y-x^2)dy$. L – правая $(x\ge a)$ полуокружность $x^2+y^2=2ax$ от точки $A=(a,a)$ до точки $B=(a,-a)$.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S – внутренняя сторона эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F}=\vec{r}$, где $\vec{r}=(x,y,z)$.

19. Найти $div\,(f(r)\vec{r})$ где $r=|\vec{r}|,\ \ \vec{r}=(x,y,z),\ \ f(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Выяснить, когда $div\,(f(r)\vec{r})=0$.

20. Найти циркуляцию векторного поля $F=x\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль контура $L=\{(x,y,z):\ \ x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ x+y+z=0\}$, положительно ориентированного на верхней стороне плоскости.

21. Найти поток векторного поля $F=(y-x)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$ в направлении нормали верхней стороны треугольника ABC, где $A=(1,0,0)$, B = (0,1,0), C = (0,0,1).

Вариант № 16

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D=\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ \ x^2+y^2\ge 1\}$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dxdy$, где $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le R^2\}$.

3. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^\alpha\varphi,\ y=br\sin^\alpha\varphi$), вычис-

лить площадь области, ограниченной кривыми $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^3}{h^3}-\frac{y^3}{k^3}$, $y=0$.

4. Найти объем тела $x^2+y^2\le hz\le h^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, если $y^2\ge a(a+x)$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\quad z\ge R/3\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le R^2,\quad x^2+z^2\le R^2\}$, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую).
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=cz$, $z=c$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривыми $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$, $y=0$ относительно прямой $y=1$.
11. Найти статический момент части цилиндра $x^2+y^2=2Ry$, лежащей между плоскостями $z=0$ и $z=c$, относительно плоскости XZ, если плотность $\rho=y+z$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S yzdS$, где S – часть поверхности, полученная вращением линии $L=\{(x,y):\ y=\cos x,\quad \pi/2\le x\le\pi/2\}$, удовлетворяющая условию $0<y<z$ вокруг оси OX.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):$ $:y^2=ax^3-x^4$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+4y)ds$, где L – правая петля кривой $r^2=\cos 2\varphi$, $(x\ge 0)$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L yzdx+aydz-azdy$, где L – часть кривой $x^2+y^2=z^2$, $y^2+x^2=ax$ $z\ge 0$, $y\ge 0$ от точки $A=(0,0,0)$ до точки $B=(a,0,a)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (1-y/2)dx+x/2dy$, где L – верхняя часть полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $(y\ge 0)$ от точки $A=(a,0)$ до точки $B=(-a,0)$.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \le a^2$, $-H \le z \le H$.

18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

19. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$, где $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Вычислить $div\,\vec{E}$ в точке $M = (x, y, z)$, ($xyz \ne 0$).

20. Найти циркуляцию векторного поля $F = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль положительно ориентированного на верхней стороне плоскости контура $L = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 = 1,\ \ x + y + z = 1\}$.

21. Найти поток векторного поля $F = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x - y - 2z + 2 = 0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 17

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, где $D = \{(x, y):\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ \ 1 \le x \le 2\}$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, где $D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le ax\}$.

3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^5 = \dfrac{x^3}{h^3} + \dfrac{y^3}{k^3}$.

4. Найти объем тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$, $\ x^2 + y^2 \le 2az$.

5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если $x^3 + by^2 \le a^2x$, $a \le b$.

6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$, если $D = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4az,\ \ x^2 + y^2 \le 3z^2\}$.

7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x, y, z):\ 2(z^2 + y^2) \ge Rx,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2\}$.