ДКР № 3, вариант 931

1. Пусть $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 2+i$. Вычислите $\dfrac{z_2}{z_1} - \dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^5}{v^3}$.

3. Приведите число $z = 3 - 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 8+7i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_3 \\ -3x_1 \\ 7x_2 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Выпишите выражения для векторов базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ через вектора базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 = 2\vec{f}_1 - \vec{f}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} -15 & 18 \\ -12 & 15 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -13 & -9 & -6 \\ 36 & 26 & 18 \\ -24 & -18 & -13 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \\ -5 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 + 40x_1x_2 - 32x_1x_3 + 29x_2^2 - 52x_2x_3 + 34x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 28x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -6x_1^2 + 19x_2^2 - 60x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 932

1. Пусть $z_1 = -4+4i,\ z_2 = -1+5i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^4}{v^3}$.

3. Приведите число $z = -3+3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2-10x+50=0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ матрица перехода от базиса $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ имеет вид: $P_{ef} = \begin{pmatrix} -53 & 11 \\ -24 & 5 \end{pmatrix}$. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Выразите координаты x_1 и x_2 через y_1 и y_2.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ и $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e_1} = 2\vec{f_1}-3\vec{f_2}, \\ \vec{e_2} = \vec{f_1}+\vec{f_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 48 & 75 \\ -30 & -47 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -2$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -10 & -3 & 8 \\ -11 & -5 & 11 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & -8 \\ 7 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -25x_1^2 - 10x_1x_2 + 40x_1x_3 - 10x_2^2 - 16x_2x_3 - 31x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 16x_1^2 + 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 13x_2^2 + 14x_2x_3 + 11x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2) = 21x_1^2 + 31x_2^2 + 24x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 933

1. Вычислите $\dfrac{(-5+2i)(5-6i)}{1+5i}$.

2. Пусть $u=3\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$, $v=2\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z=\dfrac{\overline{u}^6}{\overline{v}^3}$.

3. Приведите число $z=-1-\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=2-9i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8x_1+5x_2\\7x_1+7x_3\\x_2-2x_3\end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases}\vec{f}_1=7\vec{e}_1-6\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\\ \vec{f}_2=-9\vec{e}_1+8\vec{e}_2+4\vec{e}_3,\\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+6\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\end{cases}$$

вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координаты $x_e=\begin{pmatrix}-14\\8\\5\end{pmatrix}$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ имеет вид $P_{ef}=\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матрицу $A_e=\begin{pmatrix}-24&16\\-8&-8\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-3}, если $A=\begin{pmatrix}31&45\\-18&-26\end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\8&9&8\\-4&-4&-3\end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -6 \\ 1 & -7 & 8 \\ -6 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 + 26x_2^2 - 20x_2x_3 + 10x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2^2 + 28x_2x_3 - 26x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -13x_1^2 - 7x_2^2 - 8x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 934

1. Вычислите $\dfrac{(2-i)(1+6i)}{-3+i}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{u^4}{\overline{v}^3}$.

3. Приведите число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 4 - 5i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ матрица перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ имеет вид: $P_{fe} = \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Выразите координаты y_1 и y_2 через x_1 и x_2.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e_1} = \vec{f_1} - 2\vec{f_2}, \\ \vec{e_2} = -3\vec{f_1} - 4\vec{f_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -37 \\ 13 & 81 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^2, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 10 & -27 & 15 \\ 6 & -17 & 10 \\ 6 & -14 & 7 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2^2 + 14x_2x_3 + 9x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2^2 - 24x_2x_3 + 9x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2^2 - 10x_2x_3 - 9x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 43x_1^2 + 57x_2^2 + 48x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 935

1. Пусть $z_1 = -5-4i$, $z_2 = -1-2i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}} + \dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^7 \cdot \overline{v}^9$

3. Приведите число $z = 3 + 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e_1} = -\vec{f_1} - 4\vec{f_2} - 5\vec{f_3}, \\ \vec{e_2} = -\vec{f_1} - 5\vec{f_2} + 4\vec{f_3}, \\ \vec{e_3} = 4\vec{f_1} - 5\vec{f_2} + \vec{f_3}. \end{cases}$$

Найдите матрицу P_{fe} перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ имеет вид $P_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 10 & -2 \\ -13 & -12 & 1 \\ -20 & -20 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 12x_1x_3 + 6x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 17x_2^2 - 36x_2x_3 - 24x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 17x_1^2 + 22x_2^2 + 12x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 936

1. Пусть $z_1 = -2 - i$, $z_2 = 3 + 3i$. Вычислите $\frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $v = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = u^6 \cdot \overline{v}^4$

3. Приведите число $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = -8 - 9i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 9x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 9x_3 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Найдите выражения векторов базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ через базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31y_1 + 7y_2, \\ 9y_1 - 2y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -48 & -32 \\ 32 & -48 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -16 & -13 & -12 \\ 22 & 17 & 16 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 16x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2^2 + 18x_2x_3 + 9x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + 20x_1x_2 + 12x_1x_3 - 9x_2^2 - 54x_2x_3 - 9x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 - 16x_1x_2 - 40x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + 50x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -5x_1^2 + 30x_2^2 + 120x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 937

1. Пусть $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$. Вычислите $\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $v = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^3 \cdot v^6$.

3. Приведите число $z = 2 - 2i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = -8 - i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_2 + 5x_3 \\ -3x_1 - 8x_2 \\ 8x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид: $P_{fe} = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ -11 & 60 \end{pmatrix}$. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Выразите координаты x_1 и x_2 через y_1 и y_2.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-3}, если $A = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 4 & 9 & -16 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 12x_1x_2 - 14x_1x_3 + 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 3x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 3x_2^2 - 22x_2x_3 + 23x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 5x_2^2 + 10x_2x_3 + x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -11x_1^2 - 39x_2^2 - 96x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 938

1. Вычислите $\dfrac{(-6+3i)(-6-i)}{-4-5i}$.

2. Пусть $u=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $v=3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z=\dfrac{u^7}{\overline{v}^2}$.

3. Приведите число $z=2-2i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2-10x+26=0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A=\begin{pmatrix}-4&-4&-1\\5&-4&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases}\vec{e}_1=-5\vec{f}_1+4\vec{f}_2+\vec{f}_3,\\ \vec{e}_2=-\vec{f}_1-7\vec{f}_2-6\vec{f}_3,\\ \vec{e}_3=\vec{f}_1+2\vec{f}_2+2\vec{f}_3.\end{cases}$$

Найдите матрицу P_{ef} перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ к базису $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ имеет вид $P_{ef}=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ матрицу $A_e=\begin{pmatrix}-30&10\\30&30\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A=\begin{pmatrix}-6&4\\-8&6\end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=2$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix}1&-1&-3\\28&-15&-30\\-8&4&7\end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -7x_1^2 - 8x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 + 24x_1x_2 - 24x_1x_3 + 20x_2^2 - 40x_2x_3 + 29x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -25x_1^2 - 30x_1x_2 - 10x_1x_3 - 18x_2^2 + 18x_2x_3 - 26x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -22x_1^2 - 17x_2^2 + 12x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 939

1. Пусть $z_1 = 5 - i,\ \ z_2 = -2 + i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right),\ \ v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^4}{v^6}$.

3. Приведите число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 8x + 17 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 \\ -2x_1 + 8x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$.

6. Матрица перехода от базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ имеет вид

$$P_{fe} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 4 & -5 & -1 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

Известно, что $\vec{x} = -5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$. Найдите выражение этого вектора через базис $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ связаны соотношениями:
$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 80 & 60 \\ -18 & -38 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -9 \\ 4 & -3 & 5 \\ 8 & -14 & 14 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 6x_1^2 - 16x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2^2 - 6x_2x_3 - 5x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму
$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 5x_2^2 - 16x_2x_3 + 29x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример

соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 + 4x_1x_2 + 16x_1x_3 - 26x_2^2 + 42x_2x_3 - 45x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 5x_1^2 - 30x_2^2 - 120x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 940

1. Пусть $z_1 = 5 + 8i$, $z_2 = -8 - 7i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{z_1 - z_2}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^3 \cdot v^9$.

3. Приведите число $z = -4\sqrt{3} + 4i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 8 - 2i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите матрицу перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7y_1 - 2y_2, \\ -11y_1 + 3y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 28 & -14 \\ 42 & 42 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -30 & 12 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -16 & 9 & 4 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 & -6 \\ 8 & 1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 - 20x_1x_3 + 20x_2^2 - 28x_2x_3 + 30x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = -9x_1^2 + 30x_1x_2 - 6x_1x_3 - 29x_2^2 - 2x_2x_3 - 19x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\, x_2) = -10x_1^2 + 5x_2^2 + 20x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 941

1. Вычислите $\dfrac{(6+5i)(6+3i)}{-1+5i}$.

2. Пусть $u=4\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $v=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z=\overline{u}^2\cdot\overline{v}^4$

3. Приведите число $z=4i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2-2x+50=0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_1+7x_2-5x_3\\6x_1+8x_2+7x_3\\-2x_1-2x_2-3x_3\end{pmatrix}$.

6. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид $P_{ef}=\begin{pmatrix}-6&13&5\\-5&11&4\\-4&8&3\end{pmatrix}$. Выпишите выражения для векторов базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ через вектора базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ к базису $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ имеет вид $P_{ef}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ матрицу $A_e=\begin{pmatrix}10&-20\\20&-15\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$.

8. Найдите собственные значения $A=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&-4\end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix}15&-24&32\\-24&35&-48\\-24&36&-49\end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\,x_2,\,x_3)=7x_1^2+6x_1x_2-14x_1x_3-8x_2^2+8x_2x_3+8x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\,x_2,\,x_3)=-4x_1^2-4x_1x_2+12x_1x_3+24x_2^2+26x_2x_3+4x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 - 6x_1x_2 - 18x_1x_3 + 10x_2^2 - 18x_2x_3 + 41x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 7x_1^2 - 17x_2^2 - 18x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 942

1. Пусть $z_1 = -2-5i$, $z_2 = -1+5i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^3}{\overline{v}^4}$.

3. Приведите число $z = -4\sqrt{3}+4i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2-8x+41=0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix}-3 & -1 & -3\\ 1 & -5 & -1\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases}\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1+7\vec{e}_2,\\ \vec{f}_2 = -2\vec{e}_1-5\vec{e}_2.\end{cases}$ Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Выразите координаты y_1 и y_2 через x_1 и x_2.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases}\vec{f}_1 = \vec{e}_1+3\vec{e}_2,\\ \vec{f}_2 = -3\vec{e}_1-3\vec{e}_2,\end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix}-18 & -6\\ 18 & 18\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix}67 & -105\\ 42 & -66\end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ -9 & 19 & -18\\ -9 & 19 & -17\end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix}5 & -4 & 9\\ -4 & -2 & -6\\ 9 & -6 & 2\end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -9x_1^2 + 6x_1x_2 - 30x_1x_3 + 15x_2^2 + 2x_2x_3 - 49x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 20x_2^2 + 52x_2x_3 - 57x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 3x_1^2 + 23x_2^2 + 48x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 943

1. Пусть $z_1 = -3-3i$, $z_2 = -2+5i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^5}{v^7}$.

3. Приведите число $z = -1-\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 2-3i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите выражения векторов базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ через базис $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179y_1 + 43y_2, \\ 25y_1 + 6y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e_1} = \vec{f_1} + 3\vec{f_2}, \\ \vec{e_2} = 3\vec{f_1} + 3\vec{f_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -12 & -36 \\ 16 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 12 & 10 & 6 \\ -8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 9 \\ 7 & -8 & 8 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -16x_1^2 + 32x_1x_2 + 24x_1x_3 - 32x_2^2 - 56x_2x_3 - 21x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 - 32x_1x_2 - 16x_1x_3 + 17x_2^2 + 20x_2x_3 + 12x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 6x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 944

1. Пусть $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2} - \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^2}{\overline{v}^6}$.

3. Приведите число $z = -4 - 4i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 10x + 50 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 5 & -5 & -2 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -7\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + 9\vec{f}_3, \\ \vec{e}_2 = 4\vec{f}_1 - 3\vec{f}_2 - 4\vec{f}_3, \\ \vec{e}_3 = 4\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2 - 6\vec{f}_3, \end{cases}$$

вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координаты $x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e}_1 = -4\vec{f}_1 - \vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 = -2\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 36 & -36 \\ 72 & -18 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} -11 & -5 \\ 30 & 14 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -3 & -8 & 16 \\ -8 & -15 & 32 \\ -4 & -8 & 17 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1^2 - 16x_1x_2 - 14x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 3x_2^2 + 20x_2x_3 - 9x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1^2 - 20x_1x_2 + 12x_1x_3 + 9x_2^2 + 2x_2x_3 + 9x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -15x_1^2 + 25x_2^2 + 30x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 945

1. Пусть $z_1 = -3-4i$, $z_2 = -3+i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{u^6}{\overline{v}^5}$.

3. Приведите число $z = 1-\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = -6-8i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e_1} = 9\vec{f_1} + 10\vec{f_2} + 7\vec{f_3}, \\ \vec{e_2} = \vec{f_1} + 3\vec{f_2} + 2\vec{f_3}, \\ \vec{e_3} = -2\vec{f_1} - 3\vec{f_2} - 2\vec{f_3}. \end{cases}$$

Найдите матрицу P_{ef} перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ имеет вид $P_{ef} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 8 & -23 & 44 \\ 4 & -14 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1^2 + 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 9x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 5x_2^2 + 26x_2x_3 + 11x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -25x_1^2 + 40x_1x_2 + 20x_1x_3 - 20x_2^2 - 4x_2x_3 - 14x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 7x_1^2 + 13x_2^2 + 8x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 946

1. Пусть $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -1 - 7i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1} - z_2}{z_1 + \overline{z_2}}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^3}{v^5}$.

3. Приведите число $z = -\sqrt{3} + i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 10x + 41 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 \\ -4x_1 + 6x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями:
$\begin{cases} \vec{f}_1 = 23\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = -7\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2. \end{cases}$ Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Выразите координаты x_1 и x_2 через y_1 и y_2.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \end{cases}$
линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 9 & -4 & -2 \\ 16 & -7 & -4 \\ -8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 - 16x_1x_3 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму
$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 5x_2^2 - 10x_2x_3 + 35x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 5x_2^2 + 10x_2x_3 - 9x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 15x_1^2 - 25x_2^2 + 30x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 947

1. Пусть $z_1 = -3+4i$, $z_2 = -6+3i$. Вычислите $\dfrac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} + \overline{z_2}}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^3}{\overline{v}^2}$.

3. Приведите число $z = 4$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 6x + 25 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -5 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найдите матрицу перехода P_{ef} от базиса $\vec{e_1} = (-3,\ 2)$, $\vec{e_2} = (-1,\ -3)$ к базису $\vec{f_1} = (-11,\ 0)$, $\vec{f_2} = (14,\ -2)$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ имеет вид $P_{ef} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-3}, если $A = \begin{pmatrix} 49 & -75 \\ 30 & -46 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \\ -42 & 40 & 19 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2^2 + 18x_2x_3 - 3x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 25x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1x_3 + 10x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -16x_1^2 + 32x_1x_2 - 32x_1x_3 - 41x_2^2 + 12x_2x_3 - 29x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -23x_1^2 - 3x_2^2 - 48x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 948

1. Вычислите $\dfrac{(2+i)(5-i)}{-2-2i}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^4 \cdot v^9$.

3. Приведите число $z = 2 + 2i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 2x + 17 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите матрицу перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130y_1 - 41y_2, \\ 19y_1 - 6y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \\ \vec{f_2} = -3\vec{e_1} - \vec{e_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -42 & -34 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -19 & 10 & 40 \\ 10 & -4 & -20 \\ -10 & 5 & 21 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 16x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 12x_2x_3 + 8x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 12x_1x_3 + 15x_2^2 + 14x_2x_3 + 7x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -25x_1^2 - 40x_1x_2 + 10x_1x_3 - 25x_2^2 - 10x_2x_3 - 11x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 43x_1^2 + 57x_2^2 + 48x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 949

1. Пусть $z_1 = 4 - i,\ \ z_2 = 1 + 2i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right),\ \ v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = u^7 \cdot \overline{v}^6$

3. Приведите число $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 14x + 50 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 + x_2 + 9x_3 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ матрица перехода от базиса $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ имеет вид: $P_{fe} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Выразите координаты x_1 и x_2 через y_1 и y_2.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ и $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f_1} = -3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}, \\ \vec{f_2} = -3\vec{e_1} + 3\vec{e_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 17 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -8 \\ 1 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 42x_2x_3 + 23x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 25x_1^2 - 30x_1x_2 - 40x_1x_3 + 18x_2^2 + 42x_2x_3 + 26x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -11x_1^2 - 39x_2^2 - 96x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 950

1. Пусть $z_1 = -4 - 2i,\ z_2 = +2 - 5i$. Вычислите $\dfrac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} + \overline{z_2}}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right),\ v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = u^3 \cdot \overline{v}^7$

3. Приведите число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 14x + 50 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -27 & 47 & 13 \\ 13 & -22 & -6 \\ -8 & 12 & 3 \end{pmatrix}$. Выпишите выражения для векторов базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ через вектора базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{e}_1 = 3\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 = -2\vec{f}_1 - \vec{f}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -28 & 19 \\ -49 & 33 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ 42 & -17 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 4$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 28 & -18 & -36 \\ 18 & -11 & -24 \\ 9 & -6 & -11 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ -6 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму
$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 30x_1x_3 + 18x_2^2 + 36x_2x_3 + 17x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма
$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -25x_1^2 - 30x_1x_2 - 10x_1x_3 - 25x_2^2 - 14x_2x_3 - 3x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 6x_1^2 - 19x_2^2 - 60x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 951

1. Пусть $z_1 = -4+6i$, $z_2 = 2+i$. Вычислите $\dfrac{z_2}{z_1} - \dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $v = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^6 \cdot v^5$.

3. Приведите число $z = 2\sqrt{3} + 2i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 12x + 85 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_1 + 8x_2 \\ -4x_1 - 7x_3 \\ -5x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите матрицу перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12y_1 + 5y_2, \\ 5y_1 - 2y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f_1} = -\vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \\ \vec{f_2} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2}, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 25 & 45 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 13 & -15 \\ 10 & -12 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 3$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 11 & -10 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 1 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -9x_1^2 - 18x_1x_2 - 24x_1x_3 - 10x_2^2 - 20x_2x_3 - 24x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 20x_1x_3 + 5x_2^2 - 38x_2x_3 + 12x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 31x_1^2 - 14x_2^2 + 24x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 952

1. Пусть $z_1 = 4 - 4i$, $z_2 = 1 - 3i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^2}{\overline{v}^3}$.

3. Приведите число $z = -4\sqrt{3} + 4i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 5 + 7i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ -x_1 - 9x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид $P_{ef} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Выпишите выражения для векторов базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через вектора базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -24 & 16 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^2, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -4 & 11 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & -16 & -9 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -4 & -6 & -8 \\ 7 & -8 & -9 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 25x_1^2 - 40x_1x_2 + 10x_1x_3 + 15x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 14x_1^2 + 11x_2^2 - 4x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 953

1. Вычислите $\dfrac{(4+5i)(4-i)}{6+2i}$.

2. Пусть $u=4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $v=3\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z=\dfrac{\overline{u}^3}{v^6}$.

3. Приведите число $z=8$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-8+6i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A=\begin{pmatrix}1&-3&6\\-4&-4&-3\\-3&1&-4\end{pmatrix}$.

6. Матрица перехода от базиса $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ имеет вид

$$P_{fe}=\begin{pmatrix}-9&14&7\\-10&11&6\\5&-3&-2\end{pmatrix},$$

Известно, что $\vec{x}=162\vec{f}_1+142\vec{f}_2-50\vec{f}_3$. Найдите выражение этого вектора через базис $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases}\vec{f}_1=-3\vec{e}_1+\vec{e}_2,\\ \vec{f}_2=2\vec{e}_1-2\vec{e}_2,\end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ матрицу $A_f=\begin{pmatrix}-12&8\\-30&28\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения $A=\begin{pmatrix}-5&-2\\4&1\end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix}-7&2&-6\\-10&5&-6\\5&-3&2\end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 25x_1^2 - 10x_1x_2 + 30x_1x_3 - 8x_2^2 - 12x_2x_3 + 17x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 6x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -7x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 954

1. Пусть $z_1 = 7 - 9i$, $z_2 = 9 - i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{z_1 - z_2}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^3}{\overline{v}^2}$.

3. Приведите число $z = -1 + \sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 5 - 4i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -4 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет вид

$$P_{fe} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -4 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix},$$

Известно, что $\vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Найдите выражение этого вектора через базис $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 7 & 29 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения $A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ -30 & 13 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 14 & -9 & -1 \\ 26 & -17 & -2 \\ -10 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -3x_1^2 + 10x_1x_2 + 8x_1x_3 - 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -16x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_1x_3 + 7x_2^2 + 52x_2x_3 + 25x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2^2 - 2x_2x_3 - 21x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = -5x_1^2 + 10x_2^2 + 20x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 955

1. Пусть $z_1 = 3 + 6i$, $z_2 = 5 - i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$, $v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \overline{u}^3 \cdot v^8$.

3. Приведите число $z = 2\sqrt{3} - 2i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 2x + 17 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - 9x_2 + 7x_3 \\ -5x_1 + 6x_2 - 5x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите выражения векторов базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ через базис $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32x_1 - 13x_2, \\ -5x_1 - 2x_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 12 & 72 \\ 88 & -12 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 10 & -11 & -29 \\ -6 & 11 & 22 \\ 6 & -8 & -19 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 16x_1^2 + 16x_1x_2 - 16x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 - 11x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_1x_3 + 18x_2^2 - 36x_2x_3 + 21x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 7x_1^2 - 2x_2^2 - 12x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 956

1. Пусть $z_1 = -4 - i,\ z_2 = 5 - 3i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ v = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^6}{\overline{v}^3}$.

3. Приведите число $z = -6 + 6i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 - 12x + 72 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Пусть x_1 и x_2 - координаты вектора в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а y_1 и y_2 - координаты этого вектора в базисе $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$. Найдите выражения векторов базиса $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ через базис $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$, если известно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35y_1 - 6y_2, \\ -41y_1 - 7y_2. \end{pmatrix}$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ к базису $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f_1},\ \vec{f_2}$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ 36 & 18 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^2, если $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Составьте квадратичную форму, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 9 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму
$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 + 16x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2^2 - 17x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма
$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1^2 + 12x_1x_2 - 16x_1x_3 - 10x_2^2 + 32x_2x_3 - 41x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 14x_1^2 - x_2^2 + 36x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 957

1. Пусть $z_1 = 3 + 6i$, $z_2 = -5 - 4i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1} - z_2}{z_1 + \overline{z_2}}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $v = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{u^3}{\overline{v}^4}$.

3. Приведите число $z = -2\sqrt{3} - 2i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = 4 - 7i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1 + 7x_2 + 6x_3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

6. Найдите матрицу перехода P_{fe} от базиса $\vec{f_1} = (3, 5)$, $\vec{f_2} = (-1, 4)$ к базису $\vec{e_1} = (-1, 21)$, $\vec{e_2} = (12, 3)$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ имеет вид $P_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -16 & -16 \\ 16 & -32 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -2$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 14x_1x_2 + 16x_1x_3 + 9x_2^2 - 6x_2x_3 - 3x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 - 3x_2^2 + 10x_2x_3 - 4x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма

$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -9x_1^2 - 18x_1x_2 - 6x_1x_3 - 10x_2^2 - 2x_2x_3 - 9x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 59x_1^2 + 66x_2^2 - 24x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 958

1. Вычислите $\dfrac{(6-2i)(4+2i)}{-4-i}$.

2. Пусть $u = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $v = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{\overline{u}^5}{\overline{v}^8}$.

3. Приведите число $z = \sqrt{3} - i$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = -5 - 9i$.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -5\vec{f}_1 - 13\vec{f}_2 - 4\vec{f}_3, \\ \vec{e}_2 = -3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3, \\ \vec{e}_3 = \vec{f}_1 + 4\vec{f}_2 + \vec{f}_3, \end{cases}$$

вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ координаты $x_f = \begin{pmatrix} 24 \\ 81 \\ 22 \end{pmatrix}$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f}_1 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \end{cases}$ линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 29 \\ -36 & -72 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^2, если $A = \begin{pmatrix} -15 & -18 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} -9 & -4 & 16 \\ -4 & -3 & 8 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 7x_1^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 + 9x_2^2 - 16x_2x_3 + 4x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 16x_1^2 + 40x_1x_2 + 24x_1x_3 + 29x_2^2 + 18x_2x_3 + 43x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 32x_2^2 + 16x_2x_3 + 14x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 5x_1^2 - 30x_2^2 - 120x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 959

1. Пусть $z_1 = 2 - i,\ \ z_2 = 2 - 3i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

2. Пусть $u = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ \ v = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{u^2}{\overline{v}^6}$.

3. Приведите число $z = 3\sqrt{3} - 3i$ к тригонометрическому виду.

4. Решите уравнение $x^2 + 4x + 13 = 0$ над полем комплексных чисел.

5. Составьте матрицу линейного оператора f, если известно, что $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 - x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 9x_2 - 4x_3 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 13\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{f}_2 = -21\vec{e}_1 - 20\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3, \\ \vec{f}_3 = 11\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$$

вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ координаты $x_e = \begin{pmatrix} -58 \\ -128 \\ -40 \end{pmatrix}$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$.

7. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ два базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ и $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ связаны соотношениями: $\begin{cases} \vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \end{cases}$
линейный оператор g имеет в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$.

8. Найдите собственные значения матрицы A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 31 & 22 & -46 \\ -27 & -20 & 39 \\ 9 & 6 & -14 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -7x_1^2 - 6x_1x_2 + 14x_1x_3 + 9x_2^2 - 12x_2x_3 - 6x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 24x_1x_3 + 5x_2^2 - 20x_2x_3 + 24x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли квадратичная форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = -16x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 17x_2^2 + 20x_2x_3 - 12x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\ x_2) = 21x_1^2 + 29x_2^2 + 6x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.

ДКР № 3, вариант 960

1. Пусть $z_1 = -9-2i$, $z_2 = -2+7i$. Вычислите $\dfrac{\overline{z_1}+z_2}{z_1-\overline{z_2}}$.

2. Пусть $u = 4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $v = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Найдите модуль и аргумент числа $z = \dfrac{u^4}{\overline{v}^6}$.

3. Приведите число $z = -6$ к тригонометрическому виду.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z = -9+2i$.

5. Найдите значение линейного оператора f на векторе $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, если матрица этого оператора имеет вид: $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -5 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет вид

$$P_{fe} = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 7 \\ 15 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

Известно, что $\vec{x} = -130\vec{f}_1 + 68\vec{f}_2 - 14\vec{f}_3$. Найдите выражение этого вектора через базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

7. Известно, что матрица перехода от базиса $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ к базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид $P_{fe} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, линейный оператор g имеет в базисе $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ матрицу $A_f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

8. Найдите собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$, если даны её собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -3$.

9. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы $\begin{pmatrix} 38 & 18 & 27 \\ -24 & -10 & -18 \\ -36 & -18 & -25 \end{pmatrix}$.

10. Составьте матрицу квадратичной формы

$$\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = 6x_1^2 - 10x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2^2 + 6x_2x_3 + 6x_3^2.$$

11. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = 25x_1^2 - 50x_1x_2 + 10x_1x_3 + 34x_2^2 + 2x_2x_3 - 11x_3^2$ к нормальному виду и укажите пример соответствующего преобразования координат.

12. С помощью критерия Сильвестра выясните, является ли данная квадратичная форма $\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3) = -25x_1^2 + 10x_1x_2 + 20x_1x_3 - 10x_2^2 + 20x_2x_3 - 36x_3^2$ положительно определённой, отрицательно определённой или не знакоопределённой.

13. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1,\, x_2) = -5x_1^2 + 10x_2^2 - 20x_1x_2$ и укажите соответствующее ортогональное преобразование координат.