Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ФИНАНСОВАЯ АКАДЕМИЯ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАКАДЕМИЯ)

Кафедра
«Теория вероятностей и математическая статистика»

А.В. Браилов П.Е. Рябов

Теория вероятностей и математическая статистика
Методические рекомендации по самостоятельной работе

Часть 2

Для студентов, обучающихся
по направлению 080100.62 «Экономика»
(программа подготовки бакалавра)

Москва 2010

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ФИНАНСОВАЯ АКАДЕМИЯ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАКАДЕМИЯ)

Кафедра
«Теория вероятностей и математическая статистика»

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

______________ М.А. Эскиндаров

«_____» __________ 2010 г.

А.В. Браилов П.Е. Рябов

Теория вероятностей и математическая статистика Методические рекомендации по самостоятельной работе

Часть 2

Для студентов, обучающихся
по направлению 080100.62 «Экономика»
(программа подготовки бакалавра)

Рекомендовано Ученым советом факультета математических методов и анализа рисков (*протокол № 4 от 23 марта 2010 г.*)

Одобрено кафедрой «Теория вероятностей и математическая статистика» (*протокол № 8 от 16 марта 2010 г.*)

Москва 2010

УДК 519.2(072) **480249**
ББК 22.17я73
Б 87

Рецензент: В.Б. Горяинов – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математическое моделирование», МГТУ им. Н.Э. Баумана

Б 87 **Браилов А.В., Рябов П.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации по самостоятельной работе. Часть 2. – М.: Финакадемия, кафедра «Теория вероятностей и математическая статистика», 2010. – 53 с.

Методические рекомендации предназначены для организации самостоятельной работы студентов, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика». В теоретической справке приведены решения типовых задач, которые вошли в варианты контрольных работ. Учебное издание содержит 30 вариантов контрольных заданий, требования к оформлению домашней контрольной работы. В конце учебного издания приведена рекомендуемая литература.

УДК 519.2(072)
ББК 22.17я73

Учебное издание
Браилов Андрей Владимирович
Рябов Павел Евгеньевич
Теория вероятностей и математическая статистика
Методические рекомендации
по самостоятельной работе
Часть 2
Компьютерный набор, верстка Рябов П.Е.
Формат 60× 90/16. Гарнитура *Times New Roman*
Усл. 3,3 п.л. Изд. № 34.9 – 2010. Тираж – 206 экз.
Заказ №__________
Отпечатано в Финакадемии

Содержание

§1. Распределение дискретной случайной величины

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество всех ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно. Вероятность попадания X в какое-либо множество $B \subseteq \mathbb{R}$ находится по формуле

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i,$$

где $p_i = P(X = x_i)$ – вероятность i-го возможного значения.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть представлен в форме таблицы:

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

.

Нетрудно убедиться в том, что сумма чисел во второй строке этой таблицы равна $P(X \in \mathbb{R}) = 1$. В случае дискретной случайной величины X ее функция распределения имеет вид

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

т.е. $F(x)$ – ступенчатая функция со скачками в точках x_1, x_2, ..., причем величины скачков равны соответственно $p_1, p_2, \ldots$.

Пример 1. *Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots 28$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 2)$.*

Решение. Имеем

$$1 = \sum_{k=1}^{28} P(X = k) = \sum_{k=1}^{28} c \cdot k = c\frac{28 \cdot 29}{2} = 406 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{406}.$$

Далее, вероятность $P(X > 2)$ равна

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$1 - (c + 2c) = 1 - 3c = 1 - 3\frac{1}{406} = \frac{403}{406} \approx 0{,}993.$$

Ответ: $c = \frac{1}{406}$; $P(X > 2) = 0{,}993$.

§2. Независимые дискретные случайные величины

Для независимости дискретных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого набора их возможных значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнялось равенство

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdot P(X_2 = a_2) \cdots P(X_n = a_n).$$

Пример 2. *Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от -6 до 5 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y от -6 до 9 с вероятностью $\frac{1}{16}$. Найдите вероятность $P(XY = 0)$.*

Решение. Используя: **а)** правило сложения вероятностей; **б)** независимость случайных величин X и Y, имеем

$$P(XY = 0) \overset{\text{а}}{=} P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) =$$
$$\overset{\text{б}}{=} P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0) \cdot P(Y = 0) =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{64} \approx 0{,}141.$$

Ответ: $0{,}141$.

Пример 3. *Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 0 до 7, Y – от 0 до 10, Z – от 0 до 13. Найдите вероятность $P(X+Y+Z=4)$, если известно, что возможные значения X, Y и Z равновероятны.*

Решение. Поскольку возможные значения X, Y и Z равновероятны, имеем:

$$P(X=k)=\frac{1}{8},\ k=0,1,\ldots,7,$$
$$P(Y=l)=\frac{1}{11},\ l=0,\ldots,10,$$
$$P(Z=m)=\frac{1}{14},\ m=0,\ldots,13.$$

С учетом: **а)** попарной несовместности событий $\{X=k,\ Y=l,\ Z=m\}$ при различных k,l,m; **б)** независимости событий $\{X=k\}$, $\{Y=l\}$, $\{Z=m\}$, находим

$$P(X+Y+Z=4)\overset{\textbf{а}}{=}\sum_{k+l+m=4}P(X=k,Y=l,Z=m)=$$
$$\overset{\textbf{б}}{=}\sum_{k+l+m=4}P(X=k)\cdot P(Y=l)\cdot P(Z=m)=$$
$$=C_6^2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{14}=\frac{C_6^2}{1232}=\frac{15}{1232}\approx 0{,}0122.$$

При подсчете количества слагаемых в последней сумме мы использовали тот факт, что число троек $k+l+m=4$ совпадает с числом последовательностей, состоящих из 4 единиц и 2 нулей.
Ответ: $0{,}0122$.

Пример 4. *Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 1 до 9 с вероятностью $\frac{1}{9}$, Z – от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$. Найдите вероятность $P(X<Y<Z)$.*

Решение. Используя: **а)** попарную несовместность событий $\{X=k,Y=l,Z=m\}$ при различных k,l,m; **б)** независимость событий $\{X=k\}$, $\{Y=l\}$, $\{Z=m\}$, находим

$$P(X<Y<Z)\overset{\textbf{а}}{=}\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 7}P(X=k,Y=l,Z=m)=$$
$$\overset{\textbf{б}}{=}\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 7}P(X=k)\cdot P(Y=l)\cdot P(Z=m)=$$
$$=C_7^3\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}=\frac{C_7^3}{13\cdot 9\cdot 7}=\frac{35}{819}\approx 0{,}0427.$$

При подсчете количества слагаемых в последней сумме мы использовали тот факт, что число троек (k,l,m), для которых $1\leqslant k<l<m\leqslant 7$, совпадает с числом способов выбора трех различных чисел из множества $\{1,2,\ldots,7\}$.
Ответ: $0{,}0427$.

Пример 5. *Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z – от 1 до 20 с вероятностью $\frac{1}{20}$, а X только значения 5 и 10, при этом $P(X=5)=\frac{9}{10}$. Найдите вероятность $P(X<Y<Z)$.*

Решение. С учетом: **а)** формулы полной вероятности; **б)** независимости Y и Z от X; **в)** попарной несовместности событий $\{Y=l,Z=m\}$ для различных l и m; **г)** независимости Y и Z, находим

$$P(X<Y<Z)\overset{\textbf{а}}{=}P(5<Y<Z|X=5)\cdot P(X=5)+$$
$$+P(10<Y<Z|X=10)\cdot P(X=10)=$$
$$\overset{\textbf{б}}{=}P(5<Y<Z)\cdot P(X=5)+P(10<Y<Z)\cdot P(X=10)=$$
$$\overset{\textbf{в}}{=}\Big[\sum_{6\leqslant l<m\leqslant 20}P(Y=l,Z=m)\Big]\cdot P(X=5)+$$
$$+\Big[\sum_{11\leqslant l<m\leqslant 20}P(Y=l,Z=m)\Big]\cdot P(X=10)=$$

$$\stackrel{\text{г}}{=} \Big[\sum_{6\leqslant l<m\leqslant 20} P(Y=l)\cdot P(Z=m)\Big]\cdot P(X=5)+$$
$$+\Big[\sum_{11\leqslant l<m\leqslant 20} P(Y=l)\cdot P(Z=m)\Big]\cdot P(X=10)=$$
$$=C_{15}^2\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{9}{10}+C_{10}^2\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{10}=\frac{99}{400}=0,2475.$$

Ответ: $0,2475$.

§3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, множество возможных значений которой конечно, называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Если множество возможных значений счетное, то

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части сходится абсолютно.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание константы равно этой константе:
$$E(C)=C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$E(CX)=CE(X).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:
$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:
$$E(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=E(X_1)\cdot E(X_2)\cdot\ldots\cdot E(X_n).$$

5. Если $\varphi(x)$ – числовая функция и X – дискретная случайная величина, то
$$E[\varphi(X)]=\varphi(x_1)p_1+\varphi(x_2)p_2+\ldots.$$

6. Если $\varphi(x)$ – выпуклая функция, то для любой случайной величины X выполняется неравенство Йенсена:
$$E[\varphi(X)]\geqslant\varphi(E[X]).$$

Пример 6. *Независимые случайные величины X_1, X_2, …, X_8 принимают только целые значения -9, -8, …, 6, 7. Найдите математическое ожидание $E(X_1\cdot X_2\cdots X_8)$, если известно, что возможные значения равновероятны.*

Решение. Сначала найдем математическое ожидание какой-нибудь одной случайной величины X_k:

$$E(X_k)=\frac{1}{17}\cdot(-9-8-\ldots-0+1+2+\ldots7)=-1.$$

Используя свойства математического ожидания, находим

$$E(X_1\cdot X_2\cdots X_8)=E(X_1)\cdot E(X_2)\cdots E(X_8)=[E(X_k)]^8=(-1)^8=1.$$

Ответ: 1.

Пример 7. *Независимые случайные величины* $X_1, \ldots, X_5$ *могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом* $P(X_i = 0) = 0,4$, $i = 1, \ldots 5$. *Найдите математическое ожидание* $E[4^{X_1+\ldots+X_5}]$.

Решение. Для одной случайной величины X_k имеем

$$E[4^{X_k}] = 4^0 \cdot 0,4 + 4^1 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Тогда, используя, что $4^{X_1}, \ldots, 4^{X_5}$ – независимые случайные величины, находим

$$E[4^{X_1+\ldots+X_5}] = E[4^{X_1}] \cdots E[4^{X_5}] = \left(E[4^{X_k}]\right)^5 = (2,8)^5 \approx 172,1.$$

Ответ: 172,1.

§4. Дисперсия дискретной случайной величины

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от $E(X)$ называется *дисперсией* X:

$$D(X) = E([X - E(X)]^2).$$

Стандартное (*среднее квадратичное*) *отклонение* случайной величины X определяется как корень из дисперсии и обозначается σ_X или $\sigma(X)$,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

2. Дисперсия константы равна нулю: $D(C) = 0$.

3. Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

В частности, прибавление константы к случайной величине X не меняет ее дисперсии: $D(X + C) = D(X)$.

Свойство 2 дисперсии обращается в несколько ослабленном виде: *если* $D(X) = 0$, *то для некоторой константы* C *равенство* $X = C$ *выполняется с вероятностью* 1.

Пример 8. *Распределение случайной величины* X *задано таблицей*

X	4	8	11	14	18
P	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

.

Найдите математическое ожидание $m = E(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma = \sigma_X$ *и вероятность* $P(|X - m| < \sigma)$.

Решение. По определению математического ожидания и свойства дисперсии имеем:

$$m = E(X) = 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,25 + 11 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,25 + 18 \cdot 0,1 = 11;$$
$$E(X^2) = 4^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,25 + 11^2 \cdot 0,3 + 14^2 \cdot 0,25 + 18^2 \cdot 0,1 = 135,3;$$
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 135,3 - 11^2 = 14,3.$$

Следовательно, стандартное отклонение равно

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{14,3} \approx 3,782.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(|X - m| < \sigma) = P(|X - 11| < 3,782) = P(7,218 < X < 14,782) =$$
$$= P(X = 8) + P(X = 11) + P(X = 14) = 0,25 + 0,3 + 0,25 = 0,8.$$

Ответ: $m = 11$; $\sigma = 3,782$; $P(|X - m| < \sigma) = 0,8$.

Пример 9. *Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0,9$, $P(Y=0)=0,3$. Найдите математическое ожидание $E[(X-Y)^2]$.*

Решение. Сначала найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

$$E(X)=0\cdot 0,9+1\cdot 0,1=0,1; \quad E(Y)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,7=0,7;$$
$$E(X^2)=0^2\cdot 0,9+1^2\cdot 0,1=0,1; E(Y^2)=0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,7=0,7;$$
$$D(X)=0,1-(0,1)^2=0,09; \quad D(Y)=0,7-(0,7)^2=0,21.$$

Тогда, используя свойства дисперсии, находим:

$$E[(X-Y)^2]=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2=$$
$$=D(X)+D(Y)+[E(X)-E(Y)]^2=$$
$$=0,09+0,21+(0,1-0,7)^2=0,66.$$

Ответ: 0,66.

Пример 10. *Для независимых случайных величин $X_1,\ldots,$ X_4 известно, что их математические ожидания $E(X_i)=-2$, дисперсии $D(X_i)=1$, $i=1,\ldots 4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1\cdots X_4)$.*

Решение. Используя свойства дисперсии, находим

$$D(X_1\cdots X_4)=E[(X_1\cdots X_4)^2]-[E(X_1\cdots X_4)]^2=$$
$$=E(X_1^2\cdots X_4^2)-[E(X_1)\cdots E(X_4)]^2=$$
$$=E(X_1^2)\cdots E(X_4^2)-[E(X_i)]^8=$$
$$=\left[D(X_i)+[E(X_i)]^2\right]^4-(-2)^8=$$
$$=[1+(-2)^2]^4-256=625-256=369.$$

Ответ: 369.

Пример 11. *Вероятность выигрыша 3 рублей в одной партии равна $\frac{2}{5}$, вероятность проигрыша 2 рублей равна $\frac{3}{5}$. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.*

Решение. Представим случайную величину K, капитал игрока, в виде суммы

$$K=K_0+K_1+K_2\ldots+K_5,$$

где K_0 – начальный капитал, K_i – изменение капитала игрока в результате i-ой партии ($i=1,2,\ldots,5$). Тогда

$$D(K_i)=E(K_i^2)-[E(K_i)]^2=$$
$$=\left(3^2\cdot\frac{2}{5}+(-2)^2\cdot\frac{3}{5}\right)-\left[3\cdot\frac{2}{5}-2\cdot\frac{3}{5}\right]^2=6.$$

Следовательно, дисперсия капитала игрока после 5 сыгранных независимых партий составит

$$D(K)=D(K_0+K_1+\ldots+K_5)=$$
$$=D(K_1)+\ldots+D(K_5)=5\cdot D(K_i)=5\cdot 6=30.$$

Ответ: 30.

§5. Числовые характеристики основных дискретных законов распределения

Биномиальным распределением с параметрами n и p называется распределение числа успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха в каждом испытании p. Биномиальное распределение имеет вид:

X	0	1	2	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	$C_n^np^nq^0$

,

где $q=1-p$. Для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, имеем:

$$E(X)=np, \quad D(X)=npq.$$

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ задается следующей бесконечной таблицей

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру λ данного распределения.

Геометрическим распределением с параметром p называется распределение числа испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Геометрическое распределение имеет вид бесконечной таблицы

X	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	qp	$q^2 p$	$\ldots$	$q^{k-1} p$	$\ldots$

Для дискретной случайной величины X, распределенной по геометрическому закону, $E(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$.

Пример 12. *Производится* 1920 *независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются* 7 *монет. Пусть* X *– число испытаний, в которых выпало* 3 *герба. Найдите математическое ожидание* $E(X)$.

Решение. По условию задачи случайная величина X, число испытаний, распределена по биномиальному закону, причем $n = 1920$. Вероятность успеха в одном испытании p найдем как вероятность события, что при одновременном подбрасывании 7 монет выпадет 3 герба. Здесь можно воспользоваться формулой Бернулли, согласно которой

$$p = P_7(3) = C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}.$$

Следовательно, искомое математическое ожидание равно

$$E(X) = np = 1920 \cdot \frac{35}{128} = 525.$$

Ответ: 525.

Пример 13. *Производится* 10 *независимых испытаний с вероятностью успеха* 0,6 *в каждом испытании. Пусть* X *– число успехов в испытаниях с номерами* $1,2,\ldots,7$, Y *– число успехов в испытаниях с номерами* $5, 6, \ldots, 10$. *Найдите дисперсию* $D[X+2Y]$.

Решение. Представим случайные величины X и Y в виде $X = U + V$ и $Y = V + W$, где U обозначает число успехов в испытаниях с номерами 1, 2, 3 и 4, V – число успехов в испытаниях с номерами 5, 6 и 7, а W – число успехов в испытаниях с номерами 8, 9 и 10. Поскольку испытания *независимы*, то случайные величины U, V и W также *независимы*, что нельзя сказать о случайных величинах X и Y. Ясно, что U, V и W распределены по биномиальному закону, причем $D(U) = 4pq$, $D(V) = 3pq$, $D(W) = 3pq$, где $p = 0,6$ – вероятность успеха в одном испытании, а $q = 1 - p = 0,4$. Следовательно,

$$D(X+2Y) = D(U+3V+2W) = D(U) + 9D(V) + 4D(W) =$$
$$= 4pq + 27pq + 12pq = 43pq = 43 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 10,32.$$

Ответ: 10,32.

Пример 14. *На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых* 10 *и* 50 *соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина* X *– число бросаний. Найдите математическое ожидание* $E(X)$ *и дисперсию* $D(X)$.

Решение. По условию задачи случайная величина X (число бросаний) распределена по геометрическому закону. Вероятность успеха p в одном испытании определим как вероятность события A, что точка, брошенная в большой квадрат Ω, попадет и в маленький. Используя геометрическую вероятность, найдем

$$p = P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{10^2}{50^2} = \frac{1}{25}.$$

Таким образом, используя формулы для математического ожидания и дисперсии в случае геометрического распределения, находим

$$E(X) = \frac{1}{p} = 25, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = 600.$$

Ответ: 25; 600.

Пример 15. *Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=10)}{P(X=9)} = 6$. Найдите математическое ожидание $E[X]$.*

Решение. Если X распределена по закону Пуассона, то

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$6 = \frac{P(X = 10)}{P(X = 9)} = \frac{\lambda^{10}}{10}.$$

Откуда, $\lambda = 60$. Следовательно, $E(X) = D(X) = \lambda = 60$.
Ответ: 60.

§6. Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y)$ случайных величин X, Y задается формулой

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Ковариация обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

2. $\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$.

3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Если X и Y независимы, то $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

5. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

6. $\mathrm{Cov}(aX, Y) = \mathrm{Cov}(X, aY) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$, где $a = \mathrm{const}$.

7. $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$.

8. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$.

Если $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Таким образом, из независимости X и Y следует их некоррелированность. Обратное утверждение неверно.

Ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y)$ может использоваться как характеристика взаимосвязи X и Y. Например, положительный знак $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ свидетельствует о том, что в колебательной динамике случайных величин X и Y преобладают отклонения от средних значений в одном направлении. Для подобного сравнения случайных величин, однако, больше подходит безразмерная характеристика – *коэффициент корреляции*, определяемый формулой

$$\rho_{XY} = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

2. $|\rho_{XY}| \leqslant 1$.

3. Условие $|\rho_{XY}| = 1$ равнозначно существованию таких констант α и $\beta \neq 0$, что равенство $Y = \alpha + \beta X$ выполняется с вероятностью 1.

Пример 16. *Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если вероятности $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0,5$, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,7$.*

Решение. Математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y равны:

$$E(X) = E(Y) = 0,5; \quad D(X) = D(Y) = 0,25.$$

Используя определение коэффициента корреляции и свойства ковариации, находим

$$\begin{aligned}
&D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\operatorname{Cov}(X, Y) = \\
&= D(X) + D(Y) - 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) = \\
&= 0,25 + 0,25 - 2 \cdot 0,7\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,25} = 0,15.
\end{aligned}$$

Ответ: $0,15$.

Пример 17. *Случайные величины X, Y распределены по закону Пуассона. Найдите $E\{(X + Y)^2\}$, если $E(X) = 40$ и $E(Y) = 70$, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,8$.*

Решение. Поскольку случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона и известны их математические ожидания, соответствующие дисперсии равны:

$$D(X) = E(X) = 40; \quad D(Y) = E(Y) = 70.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&E\{(X + Y)^2\} = D(X + Y) + [E(X + Y)]^2 = \\
&= D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) + [E(X) + E(Y)]^2 = \\
&= 40 + 70 + 2 \cdot 0,8\sqrt{40}\sqrt{70} + (40 + 70)^2 \approx 12294,7.
\end{aligned}$$

Ответ: $12294,7$.

Требования к оформлению домашней контрольной работы

- ✔ Порядок записи решений задач повторяет порядок условий в варианте контрольной работы.
- ✔ Перед решением указывается порядковый номер задачи, условие не переписывается.
- ✔ Номер задачи выделяется маркером или иным образом. В конце решения приводится ответ по форме: «Ответ:. . . ».
- ✔ Как правило, ответ записывается как десятичная дробь или целое. Допускается также запись в виде несократимой дроби, если такая запись содержит не более 5 символов (например: $\frac{11}{36}$). Ошибка округления в ответе не должна превосходить $0,1\%$.
- ✔ Если задача не решена, после ее номера ставится прочерк.
- ✔ Решения, которые содержат грубые ошибки (отрицательная дисперсия, вероятность больше 1, . . .), считаются неправильными.
- ✔ Неправильное решение, решение задачи из другого варианта или задачи с измененным условием, отсутствие решения или ответа приводит к минимальной оценке задачи (0 баллов).
- ✔ Отсутствие обоснования при правильном решении влечет снижение оценки на 2 балла.
- ✔ Неправильный ответ (в том числе из-за ошибок округления) при правильном решении снижает оценку.
- ✔ Оценка также снижается за плохое оформление работы (зачеркнутый текст, вставки, . . .).

Вариант № 2-01

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 1 до 10 с вероятностью $\frac{1}{10}$, Z – от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_9$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	$0,4$	$0,3$	$0,3$

Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_9^2\right)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2% равна $0,3$, вероятность повышения на $0,1\%$ равна $0,5$,а вероятность понижения на 3% равна $0,2$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{256}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{5}{8}$. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + \ldots + X_{256}^2\right)$.

5. Случайные величины независимы $X_1, \ldots, X_{17}$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{17})^2\right\}$.

Вариант № 2-02

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X – от 0 до 12 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 0 до 13 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 3 и 7, при этом $P(Z=3)=\frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 13.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i=0)=0{,}4$, $i=1,\ldots,4$. Найдите математическое ожидание $E\left[2^{X_1+\ldots+X_4}\right]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна $0{,}4$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0{,}3$, а вероятность проигрыша 40 рублей равна $0{,}3$. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 3 игральные кости. Пусть X – число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 2$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_7$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 10. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2+\ldots+X_7^2\right)$.

Вариант № 2-03

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y – от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, а X только значения 2 и 10, при этом $P(X=2)=\frac{2}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин не равна 12.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	7	8	11	14	15
P	$0{,}25$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}25$

.

Найдите математическое ожидание $\mu=E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma=\sigma_X$ и вероятность $P(|X-\mu|<\sigma)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1% равна $0{,}2$, вероятность повышения на $0{,}1$% равна $0{,}7$, а вероятность понижения на 2% равна 0.1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 25 и 10 соответственно. 8 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X – случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 10. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 10 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-04

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X − от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Y − от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 7 и 14, при этом $P(Z=7)=\frac{3}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет не меньше 21.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0,3$, $P(Y=0)=0,9$. Найдите математическое ожидание $E\left[(X-Y)^2\right]$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,5$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,3$, а вероятность проигрыша 50 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 10 и 50 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 7 точек. Пусть случайная величина X − число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 18 палаток и 18 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-05

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X − от 1 до 10 с вероятностью $\frac{1}{10}$, Y − от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Z − от 1 до 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$. Найдите вероятность того, что X, Y, Z примут разные значения.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ принимают только целые значения $-6, -5, \ldots, 3, 4$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_{10})$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,6$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 60 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Производится 3 840 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 7 монет. Пусть X − число испытаний, в которых выпало 3 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=6)}{P(X=5)}=7$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-06

1. Независимые случайные величины X и Y принимают только целые значения: X − от -7 до 7, Y − от -5 до 5. Найдите $P(XY > 0)$, если известно, что возможные значения X и Y равновероятны.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0,4$, $P(Y=0)=0,1$. Найдите математическое ожидание $E[(X+Y)^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3% равна $0,2$, вероятность повышения на $0,2\%$ равна $0,5$, а вероятность понижения на 2% равна $0,3$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни − независимые случайные величины.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X-Y)$, если вероятности $P(X=1)=P(Y=1)=0,3$, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,1$.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X-Y)$, если их математические ожидания равны 6, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,8$.

Вариант № 2-07

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z − от 1 до 21 с вероятностью $\frac{1}{21}$, а X только значения 5 и 10, при этом $P(X=5)=\frac{3}{10}$. Найдите вероятность $P(X<Y<Z)$.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	4	7
P	$0,4$	$0,4$	$0,2$

.

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,7$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,1$, а вероятность проигрыша 70 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{245}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n=5$ и $p=\frac{3}{7}$. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1+\ldots+X_{245})^2\right\}$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_6$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 2. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2+\ldots+X_6^2\right)$.

Вариант № 2-08

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от -5 до 5 с вероятностью $\frac{1}{11}$, Y – от -9 до 9 с вероятностью $\frac{1}{19}$. Найдите $P(XY < 0)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X) = 4$, $E(|X|) = 9$, $D(|X|) = 90$.Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1% равна 0,4, вероятность повышения на 0,2% равна 0,5, а вероятность понижения на 4% равна 0,1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 7$, $D(X) = D(Y) = 90$, а также коэффициент корреляции 0,4. Найдите математическое ожидание $E[(X+Y)^2]$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{16}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 8. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{16})^2\right\}$.

Вариант № 2-09

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y – от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, а X только значения 3 и 9, при этом $P(X = 3) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет меньше 12.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{90}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0,7$, $i = 1, \ldots, 90$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{90})^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2% равна 0,4, вероятность повышения на 0,3% равна 0,4, а вероятность понижения на 4% равна 0,2. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X) = 40$, $E(Y) = 30$, их дисперсии $D(X) = 9$, $D(Y) = 8$ и ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y) = 6$. Найдите математическое ожидание $E(X - Y)$ и дисперсию $D(X - Y)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{7}$. Пусть T – время ожидания наступления события A 13 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-10

1. Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от 1 до 18 с вероятностью $\frac{1}{18}$, Y от 1 до 23 с вероятностью $\frac{1}{23}$. Найдите вероятность $P(X+Y=34)$.

2. Для независимых случайных величин $X_1,\dots,X_6$ известно, что их математические ожидания $E(X_i)=1$, дисперсии $D(X_i)=3$, $i=1,\dots,6$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1\cdots X_6)$.

3. Вероятность выигрыша 50 рублей в одной партии равна $0,4$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,1$, а вероятность проигрыша 40 рублей равна $0,5$. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Производится 13 независимых испытаний с вероятностью успеха $0,7$ в каждом испытании. Пусть X – число успехов в испытаниях с номерами $1,2,\dots,9$, Y – число успехов в испытаниях с номерами $6,7,\dots,13$. Найдите дисперсию $D(X+2Y)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 20 и 40 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-11

1. Независимые случайные величины $X_1,\dots,X_7$ принимают только целые значения от 0 до 10. Найдите вероятность $P(X_1\cdot X_2\cdots X_7=0)$, если известно, что все возможные значения равновероятны.

2. Дискретные случайные величины $X_1,X_2,\dots,X_5$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	$0,2$	$0,1$	$0,7$

.

Найдите математическое ожидание $E[X_1^2+X_2^2+\ldots+X_5^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна $0,6$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,1$, а вероятность проигрыша 60 рублей равна $0,3$. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X-Y)$, если вероятности $P(X=1)=P(Y=1)=0,9$, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,3$.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=10)}{P(X=9)}=13$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-12

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X − от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y − от 1 до 16 с вероятностью $\frac{1}{16}$. Найдите вероятность $P(X+Y<7)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X)=1$, $E(|X|)=2$, $D(|X|)=70$. Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2% равна $0,4$, вероятность повышения на $0,2\%$ равна $0,4$, а вероятность понижения на 4% равна $0,2$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни − независимые случайные величины.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X)=40$, $E(Y)=20$, их дисперсии $D(X)=5$, $D(Y)=3$ и ковариация $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$. Найдите математическое ожидание $E(X-Y)$ и дисперсию $D(X-Y)$.

5. Случайные величины независимы $X_1,\ldots,X_8$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1+\ldots+X_8)^2\right\}$.

Вариант № 2-13

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X − от -5 до 9 с вероятностью $\frac{1}{15}$, Y − от -8 до 5 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(XY=0)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0,9$, $P(Y=0)=0,2$. Найдите математическое ожидание $E[(X-Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,6$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 60 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 7 партий.

4. Производится 13 независимых испытаний с вероятностью успеха $0,7$ в каждом испытании. Пусть X − число успехов в испытаниях с номерами $1,2,\ldots,9$, Y − число успехов в испытаниях с номерами $5,6,\ldots,13$. Найдите дисперсию $D(X+2Y)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 19 палаток и 19 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-14

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от 1 до 17 с вероятностью $\frac{1}{17}$, Y – от 1 до 5 с вероятностью $\frac{1}{5}$. Найдите вероятность $P(X < Y)$.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	7	11	13	15	19
P	0,1	0,05	0,7	0,05	0,1

Найдите математическое ожидание $\mu = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - \mu| < \sigma)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3% равна 0,4, вероятность повышения на 0,2% равна 0,3, а вероятность понижения на 4% равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 20 и 100 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 5 точек. Пусть случайная величина X – число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{16}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 8. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{16})^2\right\}$.

Вариант № 2-15

1. Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 25$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 4)$.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_5$ принимают только целые значения $-8, -7, \ldots, 3, 4$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_5)$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,5, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,3, а вероятность проигрыша 50 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Производится 1 280 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 8 монет. Пусть X – число испытаний, в которых выпало 2 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 20 и 60 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-16

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y – от 1 до 15 с вероятностью $\frac{1}{15}$, а X только значения 6 и 9, при этом $P(X=6)=\frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет меньше 15.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	3	5
P	0,2	0,2	0,6

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 4% равна 0,1, вероятность повышения на 0,3% равна 0,5, а вероятность понижения на 1% равна 0,4. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 15 и 20 соответственно. 8 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X – случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 20. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. Случайные величины $X_1,\ldots,X_5$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2+\ldots+X_5^2)$.

Вариант № 2-17

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y – от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$, а X только значения 2 и 6, при этом $P(X=2)=\frac{2}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин не равна 8.

2. Независимые случайные величины $X_1,\ldots,X_4$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i=0)=0,4$, $i=1,\ldots,4$. Найдите математическое ожидание $E\left[3^{X_1+\ldots+X_4}\right]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3% равна 0,2, вероятность повышения на 0,3% равна 0,5, а вероятность понижения на 2% равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1,\ldots,X_{243}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n=4$ и $p=\frac{1}{9}$. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1+\ldots+X_{243})^2\right\}$.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X-Y)$, если их математические ожидания равны 5, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,3.

Вариант № 2-18

1. Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 27$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы с и вероятность $P(X > 5)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0,9$, $P(Y = 0) = 0,6$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 60 рублей в одной партии равна $0,2$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 20 рублей равна $0,6$. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 3$, $D(X) = D(Y) = 10$, а также коэффициент корреляции $0,6$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{12}$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + \ldots + X_{12}^2\right)$.

Вариант № 2-19

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X – от 1 до 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$, Y – от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 6 и 14, при этом $P(Z = 6) = \frac{1}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет не меньше 20.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{10}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0,9$, $i = 1, \ldots, 10$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{10})^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна $0,5$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 50 рублей равна $0,3$. Найдите дисперсию капитала игрока после 7 партий.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{243}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{2}{9}$. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + \ldots + X_{243}^2\right)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 10 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-20

1. Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(X+Y=21)$.

2. Для независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_4$ известно, что их математические ожидания $E(X_i)=-1$, дисперсии $D(X_i)=3$, $i=1,\ldots,4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1\cdots X_4)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2% равна $0,1$, вероятность повышения на $0,2\%$ равна $0,7$, а вероятность понижения на 1% равна $0,2$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 2 игральные кости. Пусть X – число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 4$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{7}$. Пусть T – время ожидания наступления события A 17 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-21

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Z – от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность того, что X, Y, Z примут разные значения.

2. Для независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_4$ известно, что их математические ожидания $E(X_i)=-2$, дисперсии $D(X_i)=1$, $i=1,\ldots,4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1\cdots X_4)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3% равна $0,1$, вероятность повышения на $0,1\%$ равна $0,6$, а вероятность понижения на 1% равна $0,3$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1,\ldots,X_{180}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n=3$ и $p=\frac{5}{6}$. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2+\ldots+X_{180}^2\right)$.

5. Случайные величины $X_1,\ldots,X_{18}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 7. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1+\ldots+X_{18})^2\right\}$.

Вариант № 2-22

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z − от 1 до 20 с вероятностью $\frac{1}{20}$, а X только значения 5 и 9, при этом $P(X = 5) = \frac{4}{5}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	6	7	11	15	16
P	$0,2$	$0,15$	$0,3$	$0,15$	$0,2$

.

Найдите математическое ожидание $\mu = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X-\mu| < \sigma)$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,7$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,1$, а вероятность проигрыша 70 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X) = 30$, $E(Y) = 70$, их дисперсии $D(X) = 5$, $D(Y) = 8$ и ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y) = 3$. Найдите математическое ожидание $E(X - Y)$ и дисперсию $D(X - Y)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{11}$. Пусть T − время ожидания наступления события A 15 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-23

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X − от 0 до 6 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Y − от 0 до 18 с вероятностью $\frac{1}{19}$, а Z только значения 1 и 8, при этом $P(Z = 1) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 11.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0,7$, $P(Y = 0) = 0,1$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1% равна $0,2$, вероятность повышения на $0,1\%$ равна $0,7$, а вероятность понижения на 2% равна $0,1$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни − независимые случайные величины.

4. Производится 14 независимых испытаний с вероятностью успеха $0,8$ в каждом испытании. Пусть X − число успехов в испытаниях с номерами $1, 2, \ldots, 9$, Y − число успехов в испытаниях с номерами $5, 6, \ldots, 14$. Найдите дисперсию $D(X + 2Y)$.

5. Случайные величины независимы $X_1, \ldots, X_{14}$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 5. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{14})^2\right\}$.

Вариант № 2-24

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y – от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$. Найдите вероятность $P(X < Y)$.

2. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_9$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	$0,2$	$0,3$	$0,5$

.

Найдите математическое ожидание $E[X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_9^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна $0,5$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 50 рублей равна $0,3$. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Производится 18 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 4 игральные кости. Пусть X – число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 3$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 5 палаток и 5 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-25

1. Независимые случайные величины X и Y принимают только целые значения: X – от -8 до 8, Y – от -9 до 6. Найдите $P(XY > 0)$, если известно, что возможные значения X и Y равновероятны.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{50}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0,6$, $i = 1, \ldots, 50$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{50})^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3% равна $0,4$, вероятность повышения на $0,3\%$ равна $0,3$, а вероятность понижения на 4% равна $0,3$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{147}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = \frac{1}{7}$. Найдите математическое ожидание $E\{(X_1 + \ldots + X_{147})^2\}$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{19}$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 9. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_{19}^2)$.

Вариант № 2-26

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от -9 до 9 с вероятностью $\frac{1}{19}$, Y – от -6 до 5 с вероятностью $\frac{1}{12}$. Найдите вероятность $P(XY = 0)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0,2$, $P(Y = 0) = 0,7$. Найдите математическое ожидание $E[(X - Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 40 рублей в одной партии равна $0,3$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,3$, а вероятность проигрыша 30 рублей равна $0,4$. Найдите дисперсию капитала игрока после 4 партий.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 15 и 20 соответственно. 6 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X – случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 20. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=10)}{P(X=9)} = 4$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-27

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(X + Y < 6)$.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_7$ принимают только целые значения $-9, -8, \ldots, 12, 13$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_7)$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна $0,7$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,1$, а вероятность проигрыша 70 рублей равна $0,2$. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 5 и 15 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 10 точек. Пусть случайная величина X – число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если их математические ожидания равны 6, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,8$.

Вариант № 2-28

1. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ принимают только целые значения от 0 до 10. Найдите вероятность $P(X_1 \cdot X_2 \cdots X_4 = 0)$, если известно, что все возможные значения равновероятны.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_5$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0,6$, $i = 1, \ldots, 5$. Найдите математическое ожидание $E[2^{X_1+\ldots+X_5}]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1% равна $0,2$, вероятность повышения на $0,3\%$ равна $0,7$, а вероятность понижения на 2% равна $0,1$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Производится 640 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 7 монет. Пусть X – число испытаний, в которых выпало 2 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{15}$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_{15}^2)$.

Вариант № 2-29

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X – от -8 до 7 с вероятностью $\frac{1}{16}$, Y – от -9 до 8 с вероятностью $\frac{1}{18}$. Найдите $P(XY < 0)$.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	3	6	7
P	$0,4$	$0,4$	$0,2$

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность выигрыша 60 рублей в одной партии равна $0,2$, вероятность проигрыша 10 рублей равна $0,2$, а вероятность проигрыша 20 рублей равна $0,6$. Найдите дисперсию капитала игрока после 4 партий.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 9$, $D(X) = D(Y) = 40$, а также коэффициент корреляции $0,5$. Найдите математическое ожидание $E[(X+Y)^2]$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 25 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-30

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 1 до 16 с вероятностью $\frac{1}{16}$, Y – от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Z – от 1 до 9 с вероятностью $\frac{1}{9}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X) = 3$, $E(|X|) = 4$, $D(|X|) = 20$. Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 4% равна $0,2$, вероятность повышения на $0,1\%$ равна $0,4$, а вероятность понижения на 2% равна $0,4$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет $1\,000$ рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если вероятности $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0,8$, а коэффициент корреляции X и Y равен $0,9$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 5 и 25 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X – число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Рекомендуемая литература

[1] *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике: учебник: В 3-х ч. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 464 с.

[2] *Браилов А.В., Солодовников А.С.* Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Ч.3. Теория вероятностей: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2010. – 128 с.