Задание 2. Исследование качества переходных процессов САУ

Для САУ в соответствии с вариантом задания построить переходную и импульсную характеристику замкнутой системы и определить следующие параметры качества:

1. величину перерегулирования;
2. время переходного процесса;
3. статическую ошибку;
4. время регулирования;
5. коэффициент ошибки по положению;
6. коэффициент ошибки по скорости;
7. коэффициент ошибки по ускорению;
8. интегральные оценки качества.

Теоретические сведения

Графическое представление переходных и импульсных функций называют временными характеристиками. Временные характеристики представляют процессы, происходящие в динамическом и статическом режимах. Переходной функцией *h(t)* называют функцию, описывающую сигнал на выходе при условии, что на вход подано единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. График переходной функции, представляющий собой зависимость функции *h(t)* от времени *t*, называют переходной характеристикой. В том случае, если амплитуда единичного ступенчатого воздействия отлична от единицы, получают разновидность переходной характеристики, которая называется кривой разгона.

Импульсной дикцией или весовой функцией *ω(t)* называют функцию, описывающую реакцию на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. График зависимости функции *ω(t)* от времени называют импульсной переходной (импульсной характеристикой).

Аналитическое определение переходных функций и характеристик основано на следующих положениях. Если задана передаточная функция системы или составной части *W(p)* и известен входной сигнал *x(t)*, то выходной сигнал *y(t)* определяется следующим соотношением:

 .

Таким образом, изображение выходного сигнала  представляет собой произведение передаточной функции на изобра­жение входного сигнала . Сигнал *y(t)* в явном виде получился после перехода от изображения  к оригиналу *y(t)*. Для большинства случаев линейных систем и составных элементов разработаны таблицы, позволяющие производить переход от изображений к оригиналу и обратно.

Так как изображение единичного ступенчатого воздействия равно, то изображение переходной функции определяется соотношением:

 .

Следовательно, для нахождения переходной функции необходимо передаточную функцию разделить на оператор Лапласа *p* и выполнять переход от изображения к оригиналу.

Изображение единичного импульса равно 1. Тогда изображение импульсной функции определяется выражением:

 .

Таким образом, передаточная функция является изображением импульсной функции.

Так как , то между импульсной и переходной функциями существует следующая зависимость:



 Методы построения переходной функции

## Из выше сказанного известно, что изображение переходной функции, имеет вид

 .

Оригинал переходной функции может быть получен использованием точных и приближенных методов. Будем рассматривать только точные методы, связанные с применением обратного преобразования Лапласа.

**Метод построения переходных функций**

**с использованием таблиц преобразования Лапласа**

Построение переходной функции с использованием таблиц преобразования Лапласа начинается с представления изображения переходной функции в виде произведения передаточных функций типовых звеньев

 .

Затем полученное выражение преобразуется в сумму передаточных функций с неопределенными коэффициентами

 . (7)

В этом выражении *A, Bi, Ck, Dk* – неопределенные коэффициенты, *λi* – вещественные корни уравнения *D(p)=0****,*** а выражения *p2+bkp+ck****–*** соответствуют комплексно – сопряженным корням характеристического уравнения. Выражение (7) необходимо привести к общему знаменателю и числитель полученного выражения приравнять числителю изображения исходной переходной функции *B(р).* Приравнивая члены при одинаковых степенях оператора *p* в левой и правой частях, получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Вычислив значения этих коэффициентов, обратимся к таблицам преобразования Лапласа и определим оригиналы слагаемых формулы (7). Отметим, что оригиналы, соответствующие первым двум членам суммы (7), определяются непосредственно из таблиц преобразований Лапласа (Приложение 1). Для определения оригиналов для третьего члена этой суммы может потребовать некоторых преобразований.

**Метод построения переходных функций с использованием формулы обратного преобразования Лапласа**

Оригинал переходной функции может быть получен использованием формулы обратного преобразования Лапласа, так называемой формулы разложения, которая в общем случае имеет вид

 ,

где *p****i –*** корни уравнения *pD(p)=0, ni****-*** кратность корней. В случае только простых корней, когда среди них имеется *m* вещественных корней и *l* пар комплексно – сопряженных корней, формула разложения принимает вид

 .

В этом выражении *αk* и *βk* – вещественная и мнимая части комплексно – сопряженных корней, а . Амплитуда и фаза колебательных составляющих определяются следующим образом:

 ,

 ; .

При вычислениях по приведенным выше формулам, в первую подставляется только один из пары комплексно – сопряженных корней. При вычислении фазового сдвига необходимо учитывать квадрант, в котором находится вектор *Akejϕk.*

**Пример.** Построить переходную функцию замкнутой системы.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

 ,

где все коэффициенты заданы или вычислены ранее. Корни характеристического уравнения равны:

 ; ;

 .

1) Построение переходной функции табличным методом.

Изображение переходной функции можно представить в виде:

 ,

где *b=2α, c=α2+β2.*

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и приравняем числитель этого выражения к числителю исходного изображения переходной функции. Приравняв члены при одинаковых степенях оператора *p* в правой и левой частях, получим систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Из этой системы сразу определяется *А=1*, после чего решается система 4-го порядка.

 

 Решение этой системы дает:

 ; ;

 ; .

Три первых слагаемых изображения переходной функции являются табличными. Необходимо преобразовать к табличному виду четвертое слагаемое.

 .

 Полученные слагаемые являются табличными. Подставив численные значения параметров и использовав таблицы преобразования Лапласа, получим выражение для переходной функции

 .

2) Построение переходной функции с использованием формулы разложения.

Вначале определим составляющие процесса, соответствующие вещественным корням.

; .

Для колебательной составляющей получим

 , .

Так как вектор этой составляющей находится во втором квадранте, то

 .

Следовательно

.

Переходные процессы, полученные различными способами, совпадают с точностью до арифметических вычислений. Кривая переходной функции показана на рис.15. Переходный процесс практически монотонный. Колебательная составляющая фактически никак себя не проявляет ввиду крайне малой амплитуды. Перерегулирование отсутствует: σ =0. Время регулирования, определенное при Δ=0,05, приближенно равно 2,2 с., что для системы автоматического регулирования большинстве случаев является вполне приемлемым.

 

 Рис.15. Переходная функция системы регулирования

**Показатели качества САУ**

Количественные оценки качества, так называемые прямые показатели качества, определяются по кривой переходного процесса (рис.16).

 

 Рис.16. Переходная функция и показатели качества

Используются следующие прямые показатели качества:

1. величина перерегулирования ***σ,***

 ;

характеризует максимальное отклонение регулируемой величины от ее установившегося значения, которое может быть определено в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала

 ;

1. время переходного процесса или время регулирования *tp* – наименьшее значение времени, после которого имеет место неравенство

 ,

где *Δ* - заданная величина, обычно лежащая в пределах *Δ=0,02÷0,05;*

3) статическая ошибка *εсm****–*** величина отклонения установившегося значения регулируемой величины ***x(∞)*** от требуемого значения ***N***

 

или , где *E(p)* – изображение ошибки;

4) время регулирования *tр* – промежуток времени, по истечении которого регулируемая величина первый раз достигает установившегося значения.

Для определения качества системы могут использоваться и другие показатели, соответствующие решаемой задаче, например, число колебаний регулируемой величины за время регулирования, частота и период колебаний и т.д.

Во всех случаях необходимо построить переходную функцию.

**Коэффициенты ошибок**

Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях, может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки определяется выражением

 ,

где - передаточная функция по ошибке.

Разложим передаточную функцию системы по ошибке в степенной ряд в окрестности точки *p=0*. Отметим, что при *p→0*, *t→∞* и именно поэтому мы говорим о точности в установившемся режиме.

 

Обозначим:  и получим

 , (8)

 .

Учитывая, что оператор *p*, умноженный на изображение самой величины, является символом дифференцирования, можно для оригиналов записать

 . (9)

Выражение (9) определяет зависимость ошибки регулирования от различных составляющих входного воздействия, коэффициенты *Ki* получили название коэффициентов ошибок:

* *K0* - коэффициент ошибки по положению;
* *K1*- коэффициент ошибки по скорости;
* *K2* – коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Из (8) следует, что

 .

Численные значения коэффициентов ошибок определяются из этого выражения при *p→0*.

 .

Очевидно, что *К0=Фε(0)*.

Входное воздействие можно представить в виде степенного ряда

 ,

где g0 – постоянная величина, характеризующая начальное значение, g1=const – скорость изменения входного воздействия, g2 =const – ускорение и т.д.

Тогда

 .

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

 ,

где ν - порядок астатизма системы. Для передаточной функции замкнутой системы по ошибке получим

 .

Изображение ошибки запишется в виде

 .

Отсюда следует, что если порядок астатизма больше порядка старшей производной воздействия, т.е. ν>m, то ошибка в установившемся режиме будет равна нулю. Если ν=m, то установившаяся ошибка будет равна постоянной величине, называемой статической ошибкой. И если ν<m, то при t→∞ и ε→∞. В отношении коэффициентов ошибок последнее выражение позволяет сделать следующие выводы.

1). Если система статическая, т.е*.ν=0*, то существуют все составляющие ошибки и все коэффициенты ошибок не равны нулю, т.к. *К0 = Фε(0)≠ 0*.

2).Система с астатизмом 1-го порядка, *ν =1*, не имеет ошибки по положению и *К0=0*.

3).Система с астатизмом 2-го порядка, *ν =2*, не имеет ошибок по положению и по скорости и *К0 =0*, *К1=0*.

Этот список можно продолжить. Таким образом, повышение порядка астатизма повышает точность системы в установившемся режиме. Но повышение порядка астатизма снижает запасы устойчивости, т.к. введение интегрирующих звеньев увеличивает фазовое запаздывание (снижает частоту ωπ). Поэтому на практике порядок астатизма выше второго не применяют, а чаще всего ограничиваются астатизмом первого порядка, используя для повышения точности другие способы.

**Интегральные оценки качества**

Интегральные оценки характеризуют качество протекания переходных процессов. Наибольшее распространение получили две интегральные оценки

 , (10)

 . (11)

Интеграл (10) определяет площадь под кривой квадрата динамической ошибки. Чем меньше этот интеграл, тем быстрее затухает переходный процесс и, следовательно, интеграл *J0* служит мерой быстродействия системы. В ряде случаев система, удовлетворяющая условию минимума *J0*, имеет значительную колебательность переходного процесса. Для уменьшения колебательности можно попробовать воспользоваться оценкой *J1* (11). Представим этот интеграл в виде

 .

Последний член в полученном выражении является постоянной величиной и, если считать, что при *t→∞* ошибка *ε(t)→0*, то он равен *τε2(0)*. Минимальное значение интеграл *J1* будет иметь, если подынтегральное выражение будет равно нулю, т.е.

 .

Решение этого дифференциального уравнения будет

 .

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия начальное значение ошибки *ε(0)=1*, и можно рекомендовать следующую методику выбора величины постоянной времени *τ*.

1) выберем из каких либо соображений время регулирования *tp* и величину *Δ*, по уровню которой выбирается это время, т.е.;

2) определим логарифм натуральный от полученного выражения , и получим .

Недостатками интегральных оценок являются невозможность получения прямых показателей качества и высокая сложность вычислительных процедур. Достоинство – это возможность выразить интегральные оценки как функции параметров системы и, воспользовавшись известными методами поиска экстремума, определить значения этих параметров, дающие минимум избранной оценке. Именно это и послужило развитию аналитических методов синтеза систем автоматического управления, основанных на минимизации квадратичных интегральных оценок.