

Вопросы к зачету
для студентов заочной формы обучения
специальности 270102.65 «Промышленное и гражданское строительство»
по курсу математики
III семестр

1. Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся ряды.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточный признак расходимости числового ряда.
3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
4. Знакопеременные числовые ряды. Определение абсолютно и условно сходящегося ряда. Знакопеременные числовые ряды. Теорема Лейбница.
5. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
6. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Применение рядов Тейлора.
7. Разложение в ряд Фурье периодических функций.
8. Комплексные числа. Три формы комплексного числа.
9. Действия с комплексными числами. Извлечение корня и возведение в степень.
10. Элементарные функции комплексного переменного.
11. Дифференциальные уравнения. Общее и частное решения. Задача Коши.
12. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные и Бернулли.
13. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
14. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства их решений. Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Структура общего решения.
16. Метод Лагранжа.

Контрольная работа №5.

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{12} + \dots;$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$ | в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}.$ |
| 2. a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{9} + \frac{5}{16} + \dots;$ | б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n^2+1} \right)^{2n}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{4n+5}.$ |
| 3. a) $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \dots;$ | б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2-1} \right)^{3n}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3n+5}.$ |
| 4. a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots;$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n^2-1} \right)^{4n}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3n+6}.$ |
| 5. a) $\frac{2}{9} + \frac{4}{19} + \frac{6}{29} + \dots;$ | б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-3} \right)^{n^2}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+3)3^n}.$ |
| 6. a) $\frac{1}{5} + \frac{4}{10} + \frac{9}{17} + \frac{16}{26} + \dots;$ | б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+3)}.$ |
| 7. a) $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{12} + \frac{4}{15} + \dots;$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{9n^2}$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n^2+3}}.$ |
| 8. a) $\frac{3}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{15} + \frac{9}{21} + \dots;$ | б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+2n}{5+n} \right)^n$ | в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)}.$ |
| 9. a) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{27} + \frac{10}{81} + \dots;$ | б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^{n^2}$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\sqrt{n^2-3}}.$ |
| 10. a) $\frac{3}{2} + \frac{7}{8} + \frac{11}{32} + \frac{15}{128} + \dots;$ | б) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n^3-2} \right)^n$ | в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+4n}}.$ |

Задание 2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах.

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2+3}.$ | 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}.$ |
| 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^4+4}}.$ | 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}.$ |

$$5. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2+4}.$$

$$6. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3+8}.$$

$$7. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+2)!}.$$

$$8. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n^2+7}.$$

$$9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^n n}.$$

$$10. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n(n+3)}.$$

Задание 3. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв 3-4 ненулевых члена в разложении подынтегральной функции в ряд Тейлора, оценить точность вычислений.

$$1. \quad \int_0^{0.2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

$$2. \quad \int_0^{0.3} \frac{\ln(1+x^3)dx}{x^2}.$$

$$3. \quad \int_0^{0.2} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$4. \quad \int_0^{0.1} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{x}.$$

$$5. \quad \int_0^{0.2} \frac{(1-\cos x)dx}{x^2}.$$

$$6. \quad \int_0^{0.3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$7. \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x dx}{x}.$$

$$8. \quad \int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$9. \quad \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}.$$

$$10. \quad \int_0^{0.5} \frac{\arcsin 3x dx}{x}.$$

Задание 4. Функция $f(x)$ задана на интервале $0 \leq x \leq \pi$. В нечетных вариантах разложить функцию в ряд Фурье по синусам. В четных вариантах разложить функцию в ряд Фурье по косинусам.

$$1. \quad f(x) = x.$$

$$2. \quad f(x) = x.$$

$$3. \quad f(x) = 2x - \pi.$$

$$4. \quad f(x) = 2x - \pi.$$

$$5. \quad f(x) = \pi - x.$$

$$6. \quad f(x) = \pi - x.$$

$$7. \quad f(x) = -x.$$

$$8. \quad f(x) = -x.$$

$$9. \quad f(x) = x + \pi.$$

$$10. \quad f(x) = x + \pi.$$

Задание 5. Найти все значения корня из комплексного числа, изобразить их на комплексной плоскости.

1. $\sqrt[3]{1-i};$

2. $\sqrt{1+\sqrt{3}\cdot i};$

3. $\sqrt[3]{i-1};$

4. $\sqrt{-1+\sqrt{3}\cdot i};$

5. $\sqrt[3]{i};$

6. $\sqrt[3]{-8-8\sqrt{3}\cdot i};$

7. $\sqrt[3]{-1};$

8. $\sqrt{1-\sqrt{3}\cdot i};$

9. $\sqrt[3]{8i-8};$

10. $\sqrt[3]{27i-27}.$

Задание 6. Найти общие решения дифференциальных уравнений.

1. а) $xy' + 2y = \operatorname{arctg}x;$

б) $y'' + 16y = \sin 3x.$

2. а) $(x + 4y)dy = (2x + y)dx;$

б) $y'' + 16y = \cos 2x.$

3. а) $(x + 2y)dx - xdy = 0;$

б) $y'' + 2y' = x.$

4. а) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}};$

б) $y'' + 2y' = e^{-2x}.$

5. а) $(3y - x^2)dx = xdy;$

б) $y'' - 4y = xe^{2x}.$

6. а) $xdy = (\sqrt{x^2 - y^2} + y)dx;$

б) $y'' + 4y = \sin 3x.$

7. а) $xdy = (x^4 + 2y)dx;$

б) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}.$

8. а) $xdy = (2e^x - y)dx;$

б) $y'' - 2y' + 5y = 3\sin 5x.$

9. а) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx;$

б) $y'' - 2y' + 5y = 2\cos 2x.$

10. а) $xydy = (y^2 + x)dx;$

б) $y'' + 2y' - 3y = e^x.$

Задание 7. Найти решение задачи Коши.

1. $x^2 y'' + xy' = 1, y(1) = -2, y'(1) = 1.$

2. $xy'' - y' = \frac{2}{x}, y(1) = 0, y'(1) = 2.$

3. $(1 + x^2)y'' = xy', y(0) = 1, y'(0) = 1.$

4. $xy'' = (1 + 2x)y', y(1) = 0, y'(1) = e^2.$

5. $y'' - 2yy' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1.$
6. $y'' - 2y'e^{-2y} = 0, y(0) = 0, y'(0) = -1.$
7. $y'' + \sin 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0,5.$
8. $y''(e^x + 1) + y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
9. $x^2 y'' + y' = 2, y(1) = 0, y'(1) = 1.$
10. $2xy'' = y', y(1) = 0, y'(1) = 2.$

Учебно-методическая литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.: Наука, 1985.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1, 2 ч.- М.: Рольф, 2001.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах, т.1, М: Высшая школа –2003, 304с.,
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах., т.2, М: Высшая школа, 2003.- 415 с.
5. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И., Дюбюк П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики.- М.: Высшая школа, 1973.- 576 с.
6. Сборник задач по математике /под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова / М.: изд-во физ.-мат. лит-ры, 2003, 2 -4 ч.
7. Хотенова О.А. Ряды: методические рекомендации по выполнению расчетно-графической (контрольной) работы.- Архангельск: АГТУ, 2008.- 35 с. (можно найти на сайте <http://narfu.ru/isia/km/education/books/>)