8.4. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Контрольная работа № 1

Методические указания

Указания к выполнению контрольной работы № 1

Задача 1

1. Найти критические точки функции f(X,Y), принадлежащие области D.

2. Исследовать функцию f(X,Y) на условный экстремум на границе области D.

3. Выбрать наибольшее Zmax и наименьшее Zmin значения функции Z=f(X,Y) в замкнутой области D, вычмслить значения функции в критических точках внутри области и на её границе.

4. В ответе записать Zmin, Zmax и координаты (Xmin,Ymin) и (Xmax,Ymax) точек, где достигаются эти значения. Изобразить графически область D и поместить на ней найденные точки (Xmin,Ymin) и (Xmax,Ymax).

Задача 2

1. Найти градиент функции U(X,Y) в точке M.

2. Найти вектор E, задающий направление.

3. Вычислить производную функции U(X,Y) по направлению вектора E как проекцию градиента U в точке M на направление вектора E.

Задача 3

1. Найти вектор N(X,Y,Z) нормали к поверхности S в произвольной точке M(X,Y,Z).

2. Найти вектор N1 нормали к плоскости P.

3. Найти точку M0(X0,Y0,Z0) на поверхности S, касательная плоскость в которой параллельна плоскости P, используя условие коллинеарности векторов N и N1.

4. Написать уравнение искомой плоскости. Если задача имеет более одного решения, в ответе написать уравнения всех плоскостей, удовлетворяющих данному условию.

Задача 4

1. Стационарные точки функции F(X,Y) определяются как решение системы уравнений:

$$\frac{dF}{dx} = 0; \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

2. Полученная в п.1 система имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое из уравнений на d_2, а второе на ($-d_1$) и сложим их. (Если числа d_1 и d_2 имеют общие множители, то домножать нужно на недостающие множители). Получим однородное относительно неизвестных x и y уравнение: $a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0$. Поделим его на y^2 и решим его как квадратное уравнение относительно x/y, получим линейную зависимость между x и y:

$$x_1 = k_1y_1; \quad x_2 = k_2y_2$$

Подставляя найденные выражения для x в любое из уравнений первоначальной системы, вычислим значения y, а затем и x.

3. Исследуем найденные в п.2 стационарные точки (x, y) на экстремум.

Для этого вычислим вторые производные функции F. Обозначим повторную производную по x через $A(x, y)$, повторную производную по y через $C(x, y)$ и смешанную производную по x и y через $B(x, y)$. Достаточным условием существования экстремума в стационарной точке (x, y) является выполнение неравенства: $AB - C^2 > 0$. Если при этом $A > 0$, то (x, y) является точкой локального минимума, а если $A < 0$, то (x, y) - точка локального максимума. В случае $AB - C^2 < 0$ в стационарной точке экстремума нет.

Отчет о работе должен содержать:

1) Все частные производные первого и второго порядка функции $F(x, y)$.

2) Решение системы уравнений, определяющей стационарные точки.

3) Исследование стационарных точек на экстремум с помощью достаточного условия экстремума.

4) Ответ записать в виде таблицы. В таблице указать:

- координаты всех стационарных точек, записанных в виде десятичных дробей с двумя знаками после запятой;

- значения функции F в стационарных точках, также записанные в виде десятичных дробей;

- около каждой стационарной точки написать, является ли она точкой локального максимума, локального минимума или не является точкой экстремума.

---

1. Найти все частные производные первого порядка функции $u = u(x, y, z)$ и написать формулу первого дифференциала для этой функции. Найти дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ([4], стр. 192-196).

$$u = \ln\left(8\sqrt{x} + 2y^3 - 3z^2\right), \ M_0(4; -1; 4).$$

2. Найти все частные производные второго порядка функции $z = z(x, y)$ и написать формулу второго дифференциала для этой функции. Найти значение второго дифференциала в точке $M_0(x_0, y_0)$ ([4], стр. 197-199).

$$z = e^{-x}\cos 2x; \ M_0\left(-1; \ \frac{\pi}{3}\right)$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 12x - 7y + 3$ в замкнутой области D, задаваемой неравенствами: $x^2 + y^2 \le 81; \ y \le x.$ ([4], стр. 206-207).

4. Найти производную функции

$$U(x, y) = (x + 9y)^2 + \ln(6x + y)$$

в точке M(10; -10) в направлении из точки M к началу координат. ([4], стр. 200-201).

5. Для поверхности S: $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 208$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости P: $4x + y + 3z = -7$ ([4], стр. 203-204).

6. Найти экстремумы функций двух переменных

$$F(x, y) = x^3 - 4x^2y + 4xy^2 + 2y^3 - 15x + 6y + 8,$$

определив её стационарные точки и проверив каждую из них с помощью достаточных условий экстремума ([4], стр. 204-205).