Вариант №17

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0,$
   $y(0)=1$
2. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$
3. $(1-2xy)y'=y(y-1)$
4. $xydy=(y^2+x)dx$
5. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$
6. $x^3y''+x^2y'=1,$
   $y(1)=1,\quad y'(1)=-1$
7. $yy''-y'(1+y')=0$
8. $y''+4y'+13y=0,$
9. $y'''-4y''+3y'=0$
10. $y''+3y'=xe^{-3x}$
11. $y''-4y'+3y=2\cos 2x$
12. $y''+4y=\sin 2x$
13. $y''-4y'+3y=(x+2)e^x+x^2e^{5x}$
14. $y''-2y'+y=\frac{5e^x}{x}$
15. $y''''-4y'''+4y''=5$

Вариант №18

1. $y'ctgx+y=2, y(0)=-1$
2. $(y-x)dy+ydx=0$
3. $y-xy'=b(1+x^2)$
4. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$
5. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dx=0$
6. $y''x+x(y')^2-y'=0,$
   $y(1)=y'(1)=2$
7. $y''y^3=2$
8. $y''-9y=0, y(0)=0, y'(0)=3$
9. $y'''+5y''+4y=0$
10. $y''+3y'=3x^2+1$
11. $y''-14y'+49y=3\cos 3x$
12. $y''+4y=2\cos 2x$
13. $y''+4y'+13y=e^{-x}\sin 3x+e^{-x}x\cos 3x$
14. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{2x}$
15. $y'''+8y'=\cos 2x$

Вариант №19

1. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$
2. $xy'+x=y+\frac{y^2}{x},\ y(1)=3$
3. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$
4. $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}$
5. $y(1+xy)dx-xdy=0$
   $(m=\frac{1}{y^2})$
6. $(x+1)y''+x(y')^2=y',$
   $y(1)=-2,\ y'(1)=4$
7. $y''y+(y')^2=0$
8. $4y''+4y'+y=0,$
   $y(0)=1,\ y'(0)=0$
9. $y''''-2y'''+2y''=0$
10. $y''+2y'=1+e^{-2x}$
11. $y''-y=5\sin x$
12. $y''+y=3\cos x$
13. $y''+y'-2y=(x^2+2)e^x+8\sin 2x$
14. $y''+4y=tg2x$
15. $y''''-2y''+y=-x^2$

Вариант №20

1. $y'+\frac{2(1-x^3)}{x^4-4x+1}\sin 2y=0$
2. $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y},\ y(1)=2$
3. $(3x-y^2)y'=y$
4. $(1+x^2)y'=2xy+x^2y^2$
5. $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0,$
   $(m=e^x)$
6. $(1+x^2)y''-2xy'=0,$
   $y(0)=0,\quad y'(0)=3$
7. $\left[1+(y')^2\right]\frac{1}{y}=2y''$
8. $y''+p^2y=0,$
   $y(1)=2,\quad y'(1)=1$
9. $y''''+y''=0$
10. $y''-2y'=xe^x$
11. $y''-y=5\cos x$
12. $y''+y=4\sin x$
13. $y''+p^2y=x^2\sin x+x\cos x+2$
14. $y''+4y=ctg2x$
15. $y'''-5y''+4y'=x$

Вариант №21

1. $2x^2yy' + y^2 = 2$
2. $(xy' - y)\sin\frac{7}{x} + x = 0$
3. $(2e^y - x)y' = 1$
4. $x^3 \sin y dy = x dy - 2y dx$,
   $y(1) = \frac{p}{2}$
5. $\left(\frac{y^2 + \sin 2x}{y} + 1\right)dx - \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - x\right)dy = 0$
6. $y''(e^x + 1) + y' = 0$,
   $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
7. $yy'' = (y')^2$
8. $y'' - 5y' + 4y = 0$,
   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
9. $y'''' + 2y'' + y = 0$
10. $y'' + 2y' = x^2 + 1$
11. $y'' - y = 3\cos 3x$
12. $y'' + 49y = \sin 7x$
13. $y'' + 4y' + 13y = xe^{-2x} + \sin x + (x+1)\cos x$
14. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
15. $y'''' + 4y'' = e^{-2x}$

Вариант №22

1. $y' = xy^2 + 2xy$
2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
3. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$
4. $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$,
   $y(1) = 1$
5. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$
6. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2(1 + x^2)^2$,
   $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
7. $2yy'' + (y')^2 = 0$
8. $y'' + 4y' + 4y = 0$,
   $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
9. $y'''' - 2y''' + y'' = 0$
10. $y'' - 2y' = e^{2x} + x$
11. $y'' - y = 5\sin 5x$
12. $y'' + 49y = 7\cos 7x$
13. $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}(x\cos 3x + \sin x)$
14. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$
15. $y''' + y'' = \sin 2x$

Вариант №23

1. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$
2. $y' = \frac{y}{x} + ctg\frac{y}{x}, \quad y(2) = 0$
3. $(x + y^2)dy = ydx$
4. $3xy - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
5. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$
6. $(x^2 - 1)y'' - xy' = 0$,
   $y(0) = y'(0) = 1$
7. $y^2y'' + y' = 0$
8. $y'' + 3y' + 2y = 0$,
   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$
9. $y'''' - 6y'' + 9y = 0$
10. $y'' + 5y' = x^2 + 4x + 3$
11. $y'' - 4y = 2\cos 2x$
12. $y'' + 4y = 10\sin 2x$
13. $y'' + 2y' + y = (x^2 + 3x)e^{-x} + e^{-x}x\cos x$
14. $y'' + 3y' + 2y = -\frac{1}{e^x + 1}$
15. $y''' - 8y = 1 - x$

Вариант №24

1. $y\frac{dy}{dx} = (1 - x)e^7$
2. $y' = \frac{y}{x}(\ln\frac{x}{y} + 1), \; y(1) = e$
3. $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1$
4. $y' - ay = xy^2$
5. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$
6. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$,
   $y(0) = 1, \; y'(0) = 3$
7. $y'' = \frac{y'}{4\sqrt{y}}$
8. $y'' + 5y' = 0$,
   $y(0) = 0, \; y'(0) = 5$
9. $y'''' + 2y''' + y'' = 0$
10. $y'' - 5y' = e^{5x} + 2$
11. $y'' - 4y = 3\sin 3x$
12. $y'' + 4y = 2tg\,2x$
13. $y'' - 2y' + 2y = x^3e^x\cos x$
14. $y'' + 4y = 8\cos 2x$
15. $y'''' + 4y'' = e^{2x}$

Вариант №25

1. $x^2yy'+1=y$
2. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}, \quad y(2)=0$
3. $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$
4. $ydx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$
5. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$
6. $y''x\ln x=y'$
7. $2(y')^2=y''(y-1)$,
   $y(1)=2, \quad y'(1)=-1$
8. $y''-y=0$
   $y(0)=3, \quad y'(0)=-2$
9. $y''''+8y''+16y=0$
10. $y''-9y=e^{3x}+3$
11. $y''+3y'=\sin 3x$
12. $y''+4y=3\cos 2x$
13. $y''+4y'+13y=e^{-2x}x\sin x$
14. $y''+y=\frac{1}{\cos x}$
15. $y'''+y''-y'=x$

Вариант №26

1. $xy'=y^2-2y$
2. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}+x, \; y(1)=0$
3. $y=x(y'-x\cos x)$
4. $y'(x^3+y^2+3)=3x^2$
5. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$
6. $xy''-y'=x^2e^x$
7. $2yy''-(y')^2=1, \; y(0)=1, \; y'(0)=2$
8. $4y''-8y'+5y=0, \; y(0)=0,$
   $y'(0)=4$
9. $y''''-2y''+y=0$
10. $y''+3y'=x^2+2$
11. $y''+y'=\cos x$
12. $y''+4y=7\sin 2x$
13. $y''-2y'+y=xe^x+e^x\cos x$
14. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$
15. $y''''+9y''=2$

Вариант №27

1. $2yx^2dy=(1+x^2)dx$
2. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$
3. $y'=2x(x^2+y)$
4. $xy'+y+y^2=0, \quad y(8)=\frac{1}{47}$
5. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$
6. $y''-\frac{1}{x}y'=x^2$
7. $2yy''=1+(y')^2$,
   $y(0)=y'(0)=1$
8. $y''+6y'+9y=0$,
   $y(0)=2, \quad y'(0)=3$
9. $y'''+y'=0$
10. $y''-3y'+2y=-4x+e^x$
11. $y''+2y'+2y=3\cos 3x$
12. $y''+y=7\sin x$
13. $y''-2y'+5y=x^2e^x+xe^x\sin 2x$
14. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$
15. $y'''+y=1+x$

Вариант №28

1. $xy'=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$
2. $y'-\frac{y}{x}=2$
3. $(xy'-1)\ln x=2y$
4. $y'-2y=-y^3, \; y(0)=1$
5. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$
6. $xy''=y'$
7. $yy''-(y')^2=y''$,
   $y(0)=1, \; y'(0)=1$
8. $y''+4y'+29y=0$,
   $y(0)=0, \; y'(0)=5$
9. $y''''-2y''=0$
10. $y''+2y'+2y=2-e^x$
11. $y''+y'=5\sin x$
12. $y''+4y=12\cos 2x$
13. $y''+6y'+9y=xe^{-3x}+$
    $x^2e^{-3x}\sin x$
14. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$
15. $y'''-4y'=e^{2x}$

Вариант №29

1. $y'(x^3+1)=3x^2y, \quad y(1)=1$
2. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$
3. $x^2y'+xy+1=0$
4. $y'+\dfrac{y}{x+1}=-\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$
5. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$
6. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$
7. $y''ctgy=(y')^2,$

   $y(0)=\dfrac{p}{3}, \quad y'(0)=2$
8. $y''+10y'+25y=0,$

   $y(0)=5, \quad y'(0)=0$
9. $y'''-13y''+12y'=0$
10. $y''+5y'=10e^{-5x}+5$
11. $y''-9y=3\sin 3x$
12. $y''+9y=4\cos 3x$
13. $y''-2y'+5y=e^x x\cos 2x+xe^x\sin 3x$
14. $y''+y=tgx$
15. $y'''+9y'=\sin 3x$

Вариант №30

1. $y'(x^2+1)=xy, \; y(0)=1$
2. $(x^2-y^2)dy-xydx=0$
3. $x(y'-y)=e^x$
4. $(a^2-x^2)y'+2xy=y^2\sin x$
5. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$
6. $y''tgx=y'+1$
7. $y''=e^{2y}, \; y(0)=0, \; y'(0)=1$
8. $y''+2y'+10y=0,$

   $y(0)=0, \; y'(0)=-2$
9. $y'''-y'=0$
10. $y''+10y'+25y=5e^{-5x}$
11. $y''+9y=2\sin 3x$
12. $y''-9y=21\cos 3x$
13. $y''+4y'+5y=e^{-2x}(\sin 2x+$

    $x^2\cos 2x)$
14. $y''+y=ctgx$
15. $y'''-4y''+3y'=x+2$

IY. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$
2. $y' - ytgx = \dfrac{x}{\cos x}$
3. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$
4. $y''' - (y')^2 + y'(y-1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
5. $y'' - 3y' = x + \cos x$

1. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$ Однородное уравнение первого порядка (коэффициенты при *dx* и *dy* однородные функции первой степени).

Представим уравнение в виде: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

Сделаем подстановку X=U*Y, тогда $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{du}{dy} \cdot y + u,\ \dfrac{x}{y} = u$ и уравнение примет вид: $\dfrac{du}{dy} = -2\sqrt{u}$

Разделяем переменные и интегрируем: $\displaystyle\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\int \frac{dy}{y}, \qquad \sqrt{u} = -\ln|y| + c$

Общее решение данного уравнения: $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = c - \ln|y|$ Ц‘Ц $x = y\left(c - \ln|y|\right)^2$

2. $y' - y \cdot tgx = \dfrac{x}{\cos x}$ Это линейное уравнение первого порядка.

Положим $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + v'u$ и уравнение запишем в виде:

$$u'v + v'u - uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{x}{\cos x} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \frac{x}{\cos x}$$

Вспомогательную функцию *V(x)* найдем из уравнения $v' - v \cdot tgx = 0$

В этом уравнении разделяются переменные:

$$\frac{dv}{v}=\mathrm{tg}\,x\,dx,\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x},\quad \ln|v|=-\ln|\cos x|+\ln|k|$$

Где К — любое действительное число, отличное от 0. Следовательно $v=\dfrac{K}{\cos x}$

Выберем $v=\dfrac{1}{\cos x}$, при этом уравнение станет таким:

$$u'\frac{1}{\cos x}=\frac{x}{\cos x},\quad u'=x,\quad \textit{отсюда}\quad u=\frac{1}{2}x^2+c$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y=u\cdot v=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)$$

3. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$ Уравнение второго порядка.

Порядок можно понизить, так как уравнение не содержит неизвестную функцию y. Для y' имеем однородно уравнение первого порядка:

$$\frac{d(y')}{dx}=\frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}$$

Обозначим $\dfrac{y'}{x}=u$, то есть $y'=u\cdot x$, тогда $\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{du}{dx}x+u$

Представляем уравнение:

$$\frac{du}{dx}x+u=u\ln u,\quad \frac{du}{dx}x=u\ln u-u$$

1) Рассмотрим случай $\ln u-1\neq 0$ и разделим переменные:

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x},\quad \ln|\ln u-1|=\ln|e_1x|,\quad \ln u=1+c_1x$$

имеем:

$$u = e^{1+c_1 x}, \quad y' = x e^{1+c_1 x}, \quad dy = x e^{1+c_1 x} dx$$

Интегрируя по частям, получим общее решение данного уравнения:

$$y = \frac{x}{c_1} e^{1+c_1 x} - \frac{e^{1+c_1 x}}{c_1^2} + \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{e^{1+c_1 x}(c_1 x - 1) + c_2}{c_1^2}$$

Если $\ln u - 1 = 0$, то $u = e, \quad y' = ex; \quad y = \frac{e}{2} x^2 + c,$ тоже удовлетворяет данному уравнению.

4. $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 2$

Это уравнение второго порядка не содержит переменную x, поэтому можно понизить порядок, положив $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ и для *p(y)* получим уравнение первого порядка:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p - p^2 + p(y-1) = 0$$

В силу начальных условий, $p \neq 0$. Сокращая на *p*, получим линейное уравнение первого порядка $p' - p = 1 - y$.

Полагаем *p=uv*, тогда $p' = u'v + v'u$ и далее решаем аналогично примеру 2:

$$u'v + v'u - uv = 1 - y$$

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y$$

$$v' - v = 0, \quad \frac{dv}{dy} = v, \quad \frac{dv}{v} = dy, \quad \ln|v| = y,$$

$$v = e^y, \quad u'e^y = 1 - y, \quad \frac{du}{dy} = (1-y)e^{-y}$$

$$u = \int (1-y)e^{-y} dy = (y-1)e^{-y} - \int e^{-y} dy = (y-1)e^{-y} + e^{-y} + c_1 =$$

$$= ye^{-y} + c_1, \quad p = y + c_1 e^y$$

Найдем C_1, из условия $y = 2$ при $x = 0$; $2 = c_2 e^0 = c_2$

Итак $y = 2e^{x}$

5. $y'' - 3y' = x + \cos x$

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y = \overline{y} + y^{*}$, где $\overline{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 3y' = 0$, y^{*} – частное решение данного неоднородного уравнения.

Для нахождения $\overline{y}$ решаем характеристическое уравнение $k^{2} - 3k = 0$.
Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$ действительные различные, следовательно:
$\overline{y} = c_1 e^{3x} + c_2$. Частное решение $y^{*} = y_1 + y_2$, где y_1 - частное решение, соответствующее $f_1=x$, а y_2 – частное решение, соответствующее правой части $f_2 = \cos x$ Так как f_1 многочлен превой степени, 0 – корень характеристического уравнения, то $y_1 = (Ax + B)x$. Решение y_2, ищем в виде $y_2 = D\cos x + E\sin x$. Итак:

$$y^{*} = Ax^{2} + Bx + D\cos x + E\sin x$$

$$y'^{*} = 2Ax + B - D\sin x + E\cos x$$

$$y''^{*} = 2A - D\cos x - E\sin x$$

Подставим y^{*}, y'^{*}, y''^{*} в данное уравнение:

$$2A - D\cos x - E\sin x - 3(2Ax + B - D\sin x + E\cos x) = x + \cos x$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при x, $\sin x$, $\cos x$, свободные члены, получим систему для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -D - 3E = 1 \\ -E + 3D = 0 \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{9}$, $D = -\frac{1}{10}$, $E = -\frac{3}{10}$

Ответ: $y = \overline{y} + y^{*} = c_1 e^{3x} + c_2 - \frac{1}{6}x^{2} - \frac{1}{9}x - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x)$

Литература

1. Демидович Б.П. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. –М.: Наука, 1978
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. –М.: Наука, 1971.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –М.: Наука, 1970.