Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 4 & 1 & -3 & | & -4 \end{pmatrix}.$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 4 & 1 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 2 & -3 & 1 & | & 2 \\ 4 & 1 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -13 & 1 & | & 12 \\ 4 & 1 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -13 & 1 & | & 12 \\ 0 & -19 & -3 & | & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -13 & 1 & | & 12 \\ 0 & -6 & -4 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -13 & 1 & | & 12 \\ 0 & 3 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & 9 & | & 4 \\ 0 & 3 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & 9 & | & 4 \\ 0 & 0 & 29 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3/29}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & 9 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/29 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & -9 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/29 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 9R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -26/29 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/29 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -15/29 \\ 0 & 1 & 0 & | & -26/29 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/29 \end{pmatrix}$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x = -15/29 \\ y = -26/29 \\ z = 10/29 \end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-15}{29} \\ -26/29 \\ 10/29 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.