**Задача 1.** *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

*по формулам Крамера.*

*Решение:*

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы $A$, $\Delta$, не равен нулю, то значение переменной $x_i$ можно найти как $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta_i$ – определитель матрицы, полученной из $A$ путём замены $i$-го столбца на столбец из правой части (из чисел $b_1$, …, $b_n$). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5) \cdot 4 + (-3) \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-6) \cdot 2 - 5 \cdot (-5) \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 - (-6) \cdot 2 \cdot 3 =$$
$$= -60 - 30 - 48 + 50 + 48 + 36 = -4.$$

Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-5) \cdot 4 + (-3) \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \cdot 2 - 3 \cdot (-5) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - (-6) \cdot 2 \cdot 2 =$$
$$= -40 - 18 - 12 + 30 + 12 + 24 = -4.$$

Таким образом

$$x = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 12 + 20 + 24 - 10 - 32 - 18 = -4.$$

Таким образом

$$y = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5) \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot (-6) \cdot 2 - 5 \cdot (-5) \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 - (-6) \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= -45 - 15 - 48 + 50 + 36 + 18 = -4.$$

Таким образом

$$z = \frac{-4}{-4} = 1.$$

**Ответ:** система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.