

Задача 1. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -1 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы A , Δ , не равен нулю, то значение переменной x_i можно найти как $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A путём замены i -го столбца на столбец из правой части (из чисел $b_1, \dots, b_n$). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-5) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 = \\ = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8.$$

Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-5) \cdot 1 - (-1) \cdot (-4) \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) = \\ = 5 - 12 + 1 + 5 - 4 - 3 = -8.$$

Таким образом

$$x = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{aligned}\det \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = \\ &= -2 - 3 + 1 + 1 + 1 - 6 = -8.\end{aligned}$$

Таким образом

$$y = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{aligned}\det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) \cdot (-1) - 1 \cdot (-4) \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = \\ &= -10 + 4 + 1 - 5 + 4 - 2 = -8.\end{aligned}$$

Таким образом

$$z = \frac{-8}{-8} = 1.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.