Задача 1. *Дана пирамида $BCDE$ с координатами вершин*

$$B(-2,0,4),\ C(3,-3,7),\ D(-3,-5,11),\ и\ E(-2,-7,15).$$

Найти площадь её грани BCD.

Решение: Площадь грани BCD равна площади $\triangle BCD$. Векторное произведение двух векторов является вектором, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на первые два.

Так как на те же 2 вектора вместо параллелограмма можно натянуть треугольник, и его площадь будет в 2 раза меньше, то в качестве ответа можно взять половину длины векторного произведения сторон треугольника.

Подсчитаем векторное произведение сторон:

$$\vec{BD} = \vec{D} - \vec{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,((-3)\cdot 7 - (-5)\cdot 3) - \vec{j}\,(5\cdot 7 - (-1)\cdot 3) + \vec{k}\,(5\cdot(-5) - (-1)\cdot(-3)) =$$

$$= -6\vec{i} - 38\vec{j} - 28\vec{k}.$$

Длина вектора

$$\left|\vec{BC} \times \vec{BD}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-38)^2 + (-28)^2} = 2\sqrt{566}.$$

Отсюда площадь треугольника равна $\sqrt{566}$.

Ответ: площадь грани BCD равна $\sqrt{566}$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.