Задача 1. *Дана пирамида $BCDE$ с координатами вершин*

$$B(-2,0,4),\ C(3,-3,7),\ D(-3,-5,11),\ \text{и } E(-2,-7,15).$$

Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины E.

Решение: Чтобы найти длину высоты в пирамиде, опущенной из вершины E достаточно спроектировать вектор

$$\vec{EB} = \vec{B} - \vec{E} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix}$$

на вектор, перпендикулярный основанию, на которое опускается высота, или на вектор нормали к плоскости, проходящей через основание. А он считается так. Рассмотрим вектора

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и

$$\vec{BD} = \vec{D} - \vec{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Чтобы получить вектор нормали (перпендикулярный) к плоскости, проходящей через три точки, можно взять два вектора, лежащие в этой плоскости и их векторное произведение.

Векторным произведением двух векторов является третий вектор, направленный перпендикулярно обоим векторам и образующий с ними правую тройку векторов.

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left((-3)\cdot 7 - (-5)\cdot 3\right) - \vec{j}\left(5\cdot 7 - (-1)\cdot 3\right) + \vec{k}\left(5\cdot(-5) - (-1)\cdot(-3)\right) =$$

$$= -6\vec{i} - 38\vec{j} - 28\vec{k}.$$

Одна из геометрических интерпретаций скалярного произведения двух векторов заключается в том, что его модуль равен длине одного вектора, умноженной на длину проекции на него второго вектора. Отсюда получаем, что чтобы узнать длину проекции, надо модуль скалярного произведения разделить на длину вектора, на который происходит проекция.

Скалярным произведением двух векторов является число, равное сумме попарных произведений одноимённых координат.

Скалярное произведение векторов

$$\left(\vec{EB}, \vec{BC} \times \vec{BD}\right) = 0\cdot(-6) + 7\cdot(-38) + (-11)\cdot(-28) = 42$$

Длина вектора

$$\left|\vec{BC} \times \vec{BD}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-38)^2 + (-28)^2} = 2\sqrt{566}.$$

Длина проекции вектора $\vec{EB}$ на вектор $\vec{BC} \times \vec{BD}$:

$$\left|\vec{EB}_{\vec{BC}\times\vec{BD}}\right| = \frac{\left|\left(\vec{EB}, \vec{BC} \times \vec{BD}\right)\right|}{\left|\vec{BC} \times \vec{BD}\right|} = \frac{42}{2\sqrt{566}} = 21\sqrt{566}/566.$$

Ответ: длина высоты равна $21\sqrt{566}/566$.