

**Задача 1.** Найти объём треугольной пирамиды  $BCDE$  через смешанное произведение, где координаты точек  $B(-2, 0, 4)$ ,  $C(3, -3, 7)$ ,  $D(-3, -5, 11)$  и  $E(-2, -7, 15)$ .

*Решение:* Смешанным произведением трёх векторов является число, по модулю равное объёму параллелепипеда, натянутого на эти три вектора. Знак числа "+", если эти три вектора образуют правую тройку векторов, и "-", если левую.

Объём параллелепипеда иначе можно посчитать как площадь основания, умноженную на длину высоты. На те же три вектора вместо параллелепипеда можно натянуть треугольную пирамиду. У пирамиды объём составляет  $1/3$  площади основания пирамиды, умноженной на высоту пирамиды. В этой ситуации длины высот пирамиды и параллелепипеда равны, а основание пирамиды по площади в 2 раза меньше (треугольник – половина параллелограмма). Поэтому объём пирамиды будет в 6 раз меньше объёма соответствующего параллелепипеда. Поэтому для нахождения объёма пирамиды достаточно разделить на 6 модуль смешанного произведения трёх векторов из одной её вершины в остальные.

$$\begin{aligned}\vec{BE} &= \vec{E} - \vec{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 11 \end{bmatrix} \\ \vec{BD} &= \vec{D} - \vec{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \vec{BC} &= \vec{C} - \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Вычислить смешанное произведение трёх векторов можно, подсчитав определитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координаты первого вектора, во второй – второго, а в третьей – координаты третьего вектора.

Подсчитаем определитель соответствующей матрицы:

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (-5) \cdot 11 + (-3) \cdot 7 \cdot 0 + (-1) \cdot (-7) \cdot 3 - 0 \cdot (-5) \cdot 3 - (-1) \cdot (-3) \cdot 11 - (-7) \cdot 7 \cdot 5 = \\ &= -275 + 21 - 33 + 245 = -42.\end{aligned}$$

Поэтому смешанное произведение  $(\vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BE}) = -42$ . Отсюда объём пирамиды равен 7.

**Ответ:** объём треугольной пирамиды равен 7.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.