Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -8 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -8 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -8 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 9R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 73 & 274 & 202 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 73 & 274 & 202 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 0 & 19 & 72 & 51 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 14R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 3 & -34 & 90 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 0 & 19 & 72 & 51 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 6R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 3 & -34 & 90 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0 \\ 0 & -5 & -22 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & -34 & 90 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0 \\ 0 & 0 & 1358 & -2453 & 0 \\ 0 & 3 & -34 & 90 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -30 & -23 & 0 \\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0 \\ 0 & 0 & 1358 & -2453 & 0 \\ 0 & 0 & -862 & 1557 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 496 & -896 & 0\\ 0 & 0 & -862 & 1557 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3/16} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 31 & -56 & 0\\ 0 & 0 & -862 & 1557 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4+27R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 31 & -56 & 0\\ 0 & 0 & -25 & 45 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to -R_4/5} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 31 & -56 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-6R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-5R_3} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & -489 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+489R_4} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & -23 & 0\\ 0 & 1 & 276 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+23R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 276 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-276R_3} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & -30 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+30R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x_1 = 0\\ x_2 = 0\\ x_3 = 0\\ x_4 = 0\end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.